1 Μια εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας στη συνδυαστική

Το υλικό της ενότητας αυτής προέρχεται από το βιβλίο Stacys Junka, Extremal Combinatorics, pp. 172–173.

Πρόταση 1 (Ανισότητα Fisher). *Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (διακεκριμένα) υποσύνολα του $[n]$ τέτοια ώστε $|A_i \cap A_j| = k$ για κάθε $i \neq j$, όπου k σταθερός αριθμός με $1 \leq k \leq n$. Τότε $m \leq n$.*

Απόδειξη. Προφανώς, $|A_i| \geq k$ για κάθε $i \in [n]$ και $|A_i| = k$ το πολύ για ένα i, (αλλιώς τα σύνολα A_i δεν είναι διακεκριμένα).

Για κάθε σύνολο A_i ορίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}_i \in \{0,1\}^n$ του οποίου η j-οστή συντεταγμένη είναι 1 αν $j \in A_i$ και 0 αν $j \notin A_i$.

Εύκολα προκύπτει ότι

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{cases} |A_i| & \text{αν } i = j \\ k, & \text{αν } i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

όπου $\langle\rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Η δομή $(\{0,1\}, \oplus, \odot)$ όπου $\oplus$, $\odot$ είναι εσωτερικές πράξεις στο $\{0,1\}$ με

$$\lambda \oplus \mu = (\lambda + \mu) \bmod 2, \qquad \lambda \odot \mu = (\lambda \cdot \mu) \bmod 2$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \{0,1\}$ είναι σώμα.

Επιπλέον, η δομή $(\{0,1\}^n, +, \cdot)$ όπου $+$ είναι εσωτερική πράξη στο $\{0,1\}^n$ με

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \ldots, x_n \oplus y_n)$$

για κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$ και $\cdot$ είναι εξωτερική πράξη στο $\{0,1\}^n$ με τελεστές (από τα αριστερά) από το σώμα $(\{0,1\}, \oplus, \odot)$ με

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \odot x_1, \lambda \odot x_2, \ldots, \lambda \odot x_n)$$

για κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ και $\lambda \in \{0,1\}$ είναι διανυσματικός χώρος (επί του σώματος $(\{0,1\}, \oplus, \odot)$).

Επιπλέον

$$\dim(\{0,1\}^n, +, \cdot) = n$$

αφού τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0)$, …, $(0,0,\ldots,1)$ αποτελούν βάση του $(\{0,1\}^n, +, \cdot)$.

Θα αποδείξουμε ότι και τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \{0,1\}^n$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

τότε

$$\langle \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m, \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m \rangle = 0$$

οπότε, από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, προκύπτει ότι

$$\sum_{(i,j)\in[m]\times[m]} \lambda_i\lambda_j\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$$

ισοδύναμα (διακρίνοντας περιπτώσεις αν $i = j$ ή όχι)

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle + \sum_{\substack{(i,j)\in[m]\times[m]\\ i\neq j}} \lambda_i\lambda_j\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2|A_i| + \sum_{\substack{(i,j)\in[m]\times[m]\\ i\neq j}} \lambda_i\lambda_j k = 0$$

ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2|A_i| - k\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 + k\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 + k\sum_{\substack{(i,j)\in[m]\times[m]\\ i\neq j}} \lambda_i\lambda_j = 0$$

οπότε

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2(|A_i| - k) + k\sum_{(i,j)\in[m]\times[m]} \lambda_i\lambda_j = 0$$

ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2(|A_i| - k) + k\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^2 = 0$$

Επειδή $A_i \geq k$ για κάθε $i \in [m]$ πρέπει $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^2(|A_i| - k) = k\left(\sum\limits_{n=1}^{m} \lambda_i\right)^2 = 0.$

Αν $|A_i| > k$ για κάθε $i \in [m]$ τότε επειδή $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^2(|A_i| - k) = 0$ έπεται ότι $\lambda_i = 0$ για κάθε $i \in [m]$.

Αν υπάρχει $j \in [m]$ με $|A_j| = k$ τότε επειδή $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2(|A_i| - k) = 0$ έπεται ότι $\lambda_i = 0$ για κάθε $i \in [m] \setminus \{j\}$. Άρα, επειδή $k\left(\sum_{n=1}^{m} \lambda_i\right)^2 = k\lambda_j^2 = 0$ έπεται ότι και $\lambda_j = 0$.

Συμπέρασμα, τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άρα, $m \leq n$. □

Η ανισότητα του Fisher μας δίνει ένα άνω φράγμα για το μέγιστο αριθμό (διακεκριμένων) υποσυνόλων του $[n]$ με την ιδιότητα ότι κάθε ζευγάρι διανυσμάτων έχει ακριβώς k κοινά στοιχεία, αλλά δεν μας αποκαλύπτει αν υπάρχουν υποσύνολα ώστε να φτάσουμε αυτό το φράγμα, ούτε και πως μπορούμε να τα κατασκευάσουμε.

Για παράδειγμα, από την ανίσοτητα Fisher προκύπτει ότι ο μέγιστος αριθμός (διακεκριμένων) υποσυνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_m$ του $[n]$ που ανα δύο έχουν ακριβώς ένα κοινό στοιχείο είναι n.

Μπορείτε να κατασκευάσετε n τέτοια υποσύνολα με αυτή την ιδιότητα;