Εφαρμοσμένη άλγεβρα -1- Σάββατο 28 Μαρτίου 2020

Άσκηση 1

Να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{όπου } b \in \mathbb{R}$$

Λύση Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Gauss

Υπενθύμιση: Πράξεις γραμμών (γραμμοπράξεις)

$R_i \Leftrightarrow R_j$: Εναλλαγή των γραμμών i και j

$R_i \to \lambda R_i$: Πολ/σμός της γραμμής i επί λ όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$R_i \to R_i + \lambda R_j$: Πρόσθεση στην γραμμή i το πολλαπλάσιο της γραμμής j όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

Σημαντική παρατήρηση: Οι γραμμοπράξεις είναι αντιστρέψιμες.

Βασική ιδιότητα: Οι γραμμοπράξεις που μετασχηματίζουν την μήτρα A σε ανηγμένη κλιμακωτή (εδώ στον I_3) αν εφαρμοσθούν με την ίδια σειρά στον I_3 θα τον μετατρέψουν στην αντίστροφη της A.

Ο αλγόριθμος σταματάει είτε όταν η A μετασχηματισθεί στον I_3, είτε όταν κατά τη διαδικασία εμφανισθεί μια μηδενική γραμμή.

Στην πρώτη περίπτωση η A είναι αντιστρέψιμη, ενώ στην δεύτερη περίπτωση δεν είναι.

Θεωρούμε το ζευγάρι

$$A\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - bR_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1-b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \to -\frac{1}{2} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1-b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_3 - (1-b)R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \frac{3-b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & \frac{1-b}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

(1) Αν $b=3$, τότε εμφανίζεται μια μηδενική γραμμή στην διαδικασία, άρα η A δεν αντιστρέφεται

(Ερώτηση: Μπορεί να εμφανισθεί μηδενική γραμμή στον δεξιό πίνακα;)

(2) Αν $b \neq 3$, τότε μπορούμε να συνεχίσουμε την διαδικασία χρησιμοποιώντας την γραμμοπράξη

$$R_3 \to \frac{2}{3-b} R_3$$

οπότε προκύπτουν οι μήτρες

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3-b} & \frac{1-b}{3-b} & \frac{2}{3-b} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 + \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 \to R_2 + \frac{1}{2}R_3 \end{array}$$

$$\left[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{3-b} & \frac{1}{3-b} & \frac{-1}{3-b} \\ \frac{2-b}{3-b} & \frac{1}{3-b} & \frac{1}{3-b} \\ \frac{-2}{3-b} & \frac{1-b}{3-b} & \frac{2}{3-b} \end{array}}_{A^{-1}}\right]$$

Άρα, η μήτρα A αντιστρέφεται και

$$A^{-1} = \frac{1}{3-b}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2-b & 1 & 1 \\ -2 & 1-b & 2 \end{bmatrix} \quad \text{για } b \neq 3$$

Παρ/ση Οι πράξεις γραμμών που εφαρμόσαμε στον αλγόριθμο Gauss αντιστοιχούν σε πολ/σμους της μήτρας A με κατάλληλες μήτρες (από τα αριστερά) που ονομάζονται στοιχειώδεις μήτρες.

Π.χ. Για να εφαρμόσουμε την γραμμοπράξη

$$R_2 \to R_2 - 2R_1$$

στην A αρκεί να την πολ/σουμε (από τα αριστερά) με την μήτρα

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμοσμένη άλγεβρα -4- Σάββατο 28 Μαρτίου 2020

Η μήτρα E_1 προκυπτει απο την μοναδιαια I_3 εφαρμοζοντα πανω στην I_3 την ιδια γραμμοπραξη

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

Και ισχυει οτι:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|$$

και

$$E_1 A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Με τον ιδιο τροπο σε καθε πραξη γραμμων αντιστοιχει και μια στοιχειωδης μήτρα

<u>Προσοχή!</u> Κατα την διαδικασια δεν επιτρεπεται να χρησιμοποιήσουμε αλλους μετασχηματισμους (π.χ. πραξεις στηλων) διοτι τοτε δεν ειναι ορθος ο αλγόριθμος.

Εφαρμοσμένη άλγεβρα -5- Σάββατο 28 Μαρτίου 2020

Άσκηση 2

Να βρεθεί η μήτρα C^n, $n\in\mathbb{N}^*$ όταν $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

<u>Λύση</u> Θα προσπαθήσουμε να εικάσουμε την μορφή της C^n

Παρατηρούμε ότι $C^2=\begin{bmatrix}1 & 2\cdot 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $C^3=\begin{bmatrix}1 & 2\cdot 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$; $C^4=\begin{bmatrix}1 & 2\cdot 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

κ.ο.κ

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει ο τύπος $C^n=\begin{bmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Για $n=1$

$C^1=\begin{bmatrix}1 & 2\cdot 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=C$ ο τύπος ισχύει.

Υποθέτουμε ότι $C^k=\begin{bmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

$$C^{k+1}=C^k\cdot C=\begin{bmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2+2k\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2(k+1)\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Άρα, από την αρχή της επαγωγής ο τύπος ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$

Άσκηση 3

Έστω $A \in M_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα A^4 είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A είναι επίσης αντιστρέψιμη.

Λύση Για να δείξουμε ότι A είναι αντιστρέψιμη αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μήτρα $B \in M_n$ ώστε $AB = I_n$

Αφού A^4 είναι αντιστρέψιμη υπάρχει $C \in M_n$ ώστε

$$A^4 C = I_n \quad (\text{και } CA^4 = I_n)$$

όμως

$$A^4 C = A \cdot \underbrace{A^3 C}_{B} = I_n$$

Αν θέσουμε $B = A^3 C$ τότε $A \cdot B = I_n$ (και $B \cdot A = I_n$)

Άρα, η A είναι επίσης αντιστρέψιμη και η αντιστροφή της είναι η μήτρα $B = A^3 C$.

Παρ)ση: Ο αριθμος 4 μπορει να αντικατασταθει από οποιοδήποτε φυσικό αριθμο $k \in \mathbb{N}^*$.

Το συμπερασμα της ασκησης ειναι ότι αν καποια δυναμη μιας μήτρας A ειναι αντιστρέψιμη, τότε όλες οι δυναμεις της A ειναι αντιστρεψιμες

π.χ.

$$A^5 \cdot (A^{-1})^5 = I_n \quad \text{αρα } A^5 \text{ αντιστρεψιμη.}$$

Άσκηση 4

α) Να δειχθεί ότι για κάθε $A, B \in M_n$ οι οποίες είναι αντιστρέψιμες ισχύει ότι

$$B^{-1} = A^{-1} - B^{-1}(B-A)A^{-1}$$

$BB^{-1} = AA^{-1} = I_n$

<u>Λύση</u> Πράγματι

$$B\left(A^{-1} - B^{-1}(B-A)A^{-1}\right) = BA^{-1} - B\cdot B^{-1}(B-A)A^{-1}$$
$$= BA^{-1} - (B-A)A^{-1} = BA^{-1} - BA^{-1} + AA^{-1} = I_n$$

Άρα, η μήτρα $A^{-1} - B^{-1}(B-A)A^{-1}$ είναι η αντίστροφη της B.

β) Αν $A, A+B \in M_n$ αντιστρέψιμες, να δειχθεί ότι

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + (A+B)^{-1}(BA^{-1})^2$$

<u>Λύση</u> Πράγματι από το α)

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - (A+B)^{-1}BA^{-1}$$

Εφαρμόζοντας πάλι τον τύπο α) προκύπτει

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - \left(A^{-1} - (A+B)^{-1}BA^{-1}\right)BA^{-1}$$
$$= A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} - (A+B)^{-1}(BA^{-1})^2$$

<u>Παρ/ση</u> Μπορούμε να σκεφτόμαστε την μήτρα B ως μήτρα σφάλματος που αλλοιώνει την μήτρα A. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε πόσο θα διαφέρει η αντίστροφη της αλλοιωμένης μήτρας $A+B$ από την αντίστροφη της A

Υπάρχουν μήτρες για τις οποίες μικρές αλλαγές μπορεί να έχουν μικρές αλλαγές στην αντιστροφή τους και άλλες μήτρες για τις οποίες μικρές αλλαγές μπορεί να οδηγήσουν σε μεγάλες αποκλίσεις στην αντιστροφή τους (πχ: μήτρες Hilbert)

Διαισθητικά πάντως αν

$$B \simeq O_n \quad \text{τότε} \quad (BA^{-1})^2 \simeq O_n$$

Άρα

$$(A+B)^{-1} \cong A^{-1} - A^{-1} B A^{-1}$$

δηλαδή αν συμβούν "μικρά" σφάλματα/στρογγυλοποιήσεις στα στοιχεία της A, τότε η αντιστροφή της προσέγγισης θα διαφέρει από την πραγματική αντιστροφή το πολύ κατά $A^{-1}BA^{-1}$.

Άσκηση 5

Να δειχθεί ότι κάθε μήτρα $A \in M_n$ γράφεται (κατά μοναδικό τρόπο) ως άθροισμα μιας συμμετρικής και μιας στρεβλά συμμετρικής μήτρας

Λύση Υπενθύμιση

D συμμετρική: $D^t = D$ π.χ. $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

D στρεβλά συμμετρική: $D^t = -D$ π.χ. $D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

Αναλογία: Κάθε συνάρτηση $f(x)$ γράφεται ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης

$f(x) = A(x) + \Pi(x)$ όπου $A(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $\Pi(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Έστω ότι υπάρχουν B συμμετρική και C στρεβλά συμμετρική ώστε

$$A = B + C \quad (1)$$

Τότε

$$A^t = (B+C)^t = B^t + C^t = B - C \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) \qquad C = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

Η B (αντ. C) είναι συμμετρική (αντ. στρεβλά συμμετρική)

$$B^t = \frac{1}{2}(A+A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = B \qquad (A^t)^t = A$$

$$C^t = \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -C$$

Άσκηση 6

Δίδεται η μετάθεση

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$$

α) Να εκφραστεί η μ ως γινόμενο ξένων κύκλων

$$1 \xrightarrow{\mu} 5 \xrightarrow{\mu} 3 \xrightarrow{\mu} 1$$

$$2 \xrightarrow{\mu} 2$$

$$4 \xrightarrow{\mu} 7 \xrightarrow{\mu} 6 \xrightarrow{\mu} 4$$

$$\mu = (1\,5\,3)(2)(4\,7\,6) \;/\!/\; (4\,6)(4\,7)$$

$$= (1\,5\,3)(4\,7\,6) = (4\,7\,6)(1\,5\,3)$$

$$= \boxed{(\underset{\alpha_1}{7}\,\underset{\alpha_2}{6}\,\underset{\alpha_3}{4})}\boxed{(3\,1\,5)}$$

β) Να εκφραστεί η μ ως γινόμενο αντιμεταθέσεων

Υπενθύμιση: $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n) =$
$(\alpha_1 \alpha_n)(\alpha_1 \alpha_{n-1})(\alpha_1 \alpha_{n-2}) \cdots (\alpha_1 \alpha_2)$

$$\mu = \boxed{(\overset{\alpha_1}{7}\,\overset{\alpha_3}{4})(\overset{\alpha_1}{7}\,\overset{\alpha_2}{6})}\boxed{(3\,5)(3\,1)}$$

γ) Να βρεθει η αρτιοτητα και το πρόσημο της μεταθεσης μ

Επειδη η μ γραφεται ως γινομενο 4 αντιμεταθεσεων επεται οτι ειναι αρτια και $sgn(\mu)=1$, ή $\varepsilon_\mu = 1$

δ) Να βρεθει η ταξη $ord(\mu)$ της μ;

Η μ εκφραζεται ως γινομενο δυο ξενων κυκλων με μηκη 3 και 3.
Η ~~ταξη~~ ταξη της μ ισουται με Ε.Κ.Π. του 3 και του 3, δηλαδη 3.
Αρα $ord(\mu)=3$. $\left(\mu^3 = \mu\circ\mu\circ\mu = Id\right)$

Αν μ γραφεται ως γινομενο <u>δυο</u> κυκλων με μηκη 36 και 42
Ποια ειναι η ταξη της μ;

$\text{εκπ}(36,42) = ;$

αλγοριθμος του Ευκλειδη

Υπενθύμιση: $\boxed{\text{εκπ}(a,b)\cdot \text{μκδ}(a,b) = a\cdot b}$

$$42 = 1 \cdot 36 + 6$$
$$36 = 6 \cdot 6 + 0$$

$$\mu\kappa\delta(42,36) = 6$$

$$\varepsilon\kappa\pi(42,36) = \frac{42 \cdot 36}{6} = 252$$

$$\varepsilon\kappa\pi(10,10,30) = \varepsilon\kappa\pi(10,30)$$

Εφαρμοσμένη άλγεβρα -13- Σάββατο 28.3.2020

Άσκηση 7

Να βρεθούν οι δυνατές τάξεις των μεταθέσεων του S_6 [6]

Λύση

Μια μετάθεση μ του S_6 μπορεί να αποτελείται από

1 κύκλο : μήκος 6. Άρα τάξη 6

2 κύκλους $5+1 \longrightarrow 5$

$4+2 \longrightarrow 4$

$3+3 \longrightarrow 3$

3 κύκλους $4+1+1 \longrightarrow 4$

$3+2+1 \longrightarrow 6$

$2+2+2 \longrightarrow 2$

4 κύκλους $3+1+1+1 \longrightarrow 3$

$2+2+1+1 \longrightarrow 2$

5 κύκλους $2+1+1+1+1 \longrightarrow 2$

6 κύκλους $1+1+1+1+1+1 \longrightarrow 1$