Σήμερα: Ασκήσεις στις Ορίζουσες και τα Γραμμικά Συστήματα

Άσκηση 1

Να υπολογισθούν οι τιμές των παρακάτω οριζουσών

α)

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2000 & \sqrt{8} & 3/2 \\ 0 & 3 & \sin\frac{\pi}{17} & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -1265 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Η M_1 είναι μια 4×4 άνω τριγωνική μήτρα

Άρα, $|M_1| = 1\cdot3\cdot2\cdot4 = 24$

β)

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{R_1 \Leftrightarrow R_4}{=\!=}$$

$$(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{vmatrix} \overset{R_4 \Leftrightarrow R_2}{=\!=} (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot3\cdot2\cdot5\cdot4$$

$$= 120$$

γ)

$$M_3 = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 8\cdot 2 - 6\cdot 1 = 10$$

Υπενθύμιση: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

δ)

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1^{+} & 2^{-} & -2^{+} & 3 \\ 0 & 1 & -1^{-} & 4 \\ -1 & 2 & 0^{+} & 1 \\ 1 & 1 & 0^{-} & 2 \end{vmatrix}$$

1ος τρόπος: Με ανάπτυγμα

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της 3ης στήλης

$$M_4 = +(-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_4 = (-1)^{1+3}(-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$

$$= (-2)\begin{vmatrix} 0^{+} & 1 & 4 \\ -1^{-} & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1^{+} & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + R_1$

$R_3 \to R_3 - R_1$

$$= (-1)(-1)(-2)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(1\cdot 3 - 3\cdot 4) + 1\cdot\underbrace{(-1\cdot 4 - (-1)\cdot 4)}_{0}$$

$$= 18$$

2ος τρόπος: $\boxed{\text{Με μετασχηματισμούς}}$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\Longleftrightarrow} (-1)\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{=\!=} (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2 \to R_2 - 2R_3}{=\!=} (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(1\cdot(-3) - (-3)(-5))$$

$$= 18$$

Άσκηση 2

Έστω A, B δύο 4×4 μήτρες με

$|A| = 3$ και $|B| = 5$

Να βρεθούν οι τιμές των οριζουσών των παρακάτω μητρών

α) AB

$$|AB| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 5 = 15$$

β) A^{-1}

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$$

γ) $2A$

$$|2A| = 2^4 |A| = 16 \cdot 3 = 48$$

δ) $|A| \cdot B$

$$\big|\,|A| \cdot B\,\big| = |3B| = 3^4 \cdot |B| = 3^4 \cdot 5$$

ε) $A + B$

Δεν γνωρίζουμε την απάντηση με βάση τα δεδομένα που έχουμε $\cancel{|A+B| = |A| + |B|}$

στ) A^5 $|A^5| = |A|^5 = 3^5$

Άσκηση 3

Να δειχθεί η ισότητα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & b & c \\ \alpha^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (\alpha-b)(b-c)(c-\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & b & c \\ \alpha^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3 \to C_3 - C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & b-\alpha & c-\alpha \\ \alpha^2 & b^2-\alpha^2 & c^2-\alpha^2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} b-\alpha & c-\alpha \\ b^2-\alpha^2 & c^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-\alpha & c-\alpha \\ (b-\alpha)(b+\alpha) & (c-\alpha)(c+\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= (b-\alpha)(c-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+\alpha & c+\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (b-\alpha)(c-\alpha)\left(c+\alpha-(b+\alpha)\right)$$

$$= (b-\alpha)(c-\alpha)(c-b)$$

$$= (\alpha-b)(b-c)(c-\alpha)$$

Άσκηση 4

Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

α) Αν A αντιστρέψιμη, τότε να δειχθεί ότι

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Αφού A αντιστρέψιμη ισχύει

$$A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I_n| \Rightarrow$$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

β) Αν A ορθογώνια ($A^{-1} = A^t$), τότε να δειχθεί ότι

$$|A| = \pm 1$$

Από το α) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Leftrightarrow \boxed{|A^t|} = \frac{1}{|A|}$

$$\Leftrightarrow \boxed{|A|} = \frac{1}{|A|}$$

$$\Leftrightarrow |A|^2 = 1 \Leftrightarrow |A| = \pm 1$$

γ) Αν η ορθογώνια μήτρα A περιέχει μόνο ακέραιες τιμές τότε και η αντίστροφή της περιέχει μόνο ~~ακέραιες~~ τιμές.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj} A$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί το rank της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 5}$$

Γνωρίζουμε ότι $\text{rank}(A) \leq 5$.

Υπενθύμιση: Το rank της A ισούται με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών της R-ισοδύναμης κλιμακωτής μήτρας της A.

$$A \underset{\substack{R_4 \to R_4 - R_1 \\ R_5 \to R_5 - R_1}}{\overset{R_3 \to R_3 - R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_4 \to R_4 - 2R_2 \\ R_5 \to R_5 + R_2}}{\overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $\text{rank}(A) = 2$

(διότι η R-ισοδύναμη κλιμακωτή της έχει 2 μη μηδενικές γραμμές)

Παρατηρήστε, ότι η μήτρα A που έχει rank 2 προκύπτει ως γινόμενο των παρακάτω μητρών:

$$A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}$$

5×2 $\qquad$ 2×5

---

3 $R_3 = 1 \cdot R_1 + 1 \cdot R_2$

4 $R_4 = 1 \cdot R_1 - 2 \cdot R_2$

5 $R_5 = 1 \cdot R_1 - 1 \cdot R_2$

1 $R_1 = 1 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

2 $R_2 = 0 \cdot R_1 + 1 \cdot R_1$

Άσκηση 6

α) $A, B \in M_{n \times n}$

Να δειχθεί ότι

$$A = B \quad \text{ανν} \quad AX = BX \quad \text{για κάθε } X \in M_{n \times 1}$$

Απόδειξη

Αν $A = B$, τότε προφανώς $AX = BX$ $\forall X \in M_{n \times 1}$

Αντίστροφα, έστω $AX = BX$ $\forall X \in M_{n \times 1}$

Θα δείξουμε ότι $A = B$

Θεωρούμε τις μήτρες

$$X_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j\text{-οστή θέση (γραμμή)} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Τότε για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ ισχύει ότι

$$AX_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{matrix} j\text{-οστή} \\ \text{στήλη} \\ \text{της } A \end{matrix} = BX_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \begin{matrix} j\text{-οστή} \\ \text{στήλη} \\ \text{της } B \end{matrix}$$

Άρα, $A = B$

β) Πως μπορουμε να ελεγξουμε αν ισχυει η ισότητα

$$K \cdot L = \underline{C}$$

οπου $K, L, C \in M_{n \times n}$ χωρις να υπολογισουμε ξανά το γινόμενο $K \cdot L$

Κόστος υπολογισμου: $\underset{n \times n}{K} \cdot \underset{n \times n}{L}$: n^3 πολ/σμοι

Ιδέα: Διαλεγουμε μια τυχαια μητρα $X \in M_{n \times 1}$
Υπολογιζουμε (*) τα γινόμενα KLX και CX
Αν ειναι διαφορετικα, τότε δεν ισχυει η ισότητα
Αν ειναι ισα, τότε η ισότητα ισχυει με πολυ μεγαλη πιθανότητα (σχεδον σίγουρο) (*)

(*) Κοστος $\underset{n \times n}{C} \underset{n \times 1}{X}$: n^2 πολ/σμοι

$$KLX = K(LX)$$

Για το $\underset{n \times n}{L} \underset{n \times 1}{X}$: n^2 πολ/σμοι

Για το $\underset{n \times n}{K} (\underset{n \times 1}{LX})$: n^2 πολ/σμοι

Συνολικό κόστος $3n^2$ πολ/σμοι

Παρατήρηση ⊛

Αν $A \neq B$ τότε οι λύσεις της εξίσωσης

$$AX = BX, \quad , X \in M_{n\times 1}$$

περιέχουν το πολύ $n-1$ ελεύθερους αγνώστους

$$AX = BX \Leftrightarrow \underbrace{(A-B)}_{\neq 0_{n\times n}} X = 0_{n\times 1}$$

Μόνο για την μηδενική μήτρα $0_{n\times n}$ ισχύει ότι το σύστημα $0_{n\times n} X = 0_{n\times 1}$ έχει n ελεύθερους αγνώστους.

Άρα, αν επιλέγουμε τυχαία $X \in M_{n\times 1}$ (δηλαδή έχουμε n ελεύθερες επιλογές) η πιθανότητα να βρούμε μια λύση του συστήματος $(A-B)X = 0$ είναι πολύ μικρή (σχεδόν αδύνατο)

Άσκηση 7

Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + z &= \alpha \\ bx + y + z &= 4 \end{aligned}$$

όπου $\alpha, b \in \mathbb{R}$ παράμετροι

Λύση. Έχουμε 3×3 σύστημα.
Θεωρούμε την ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Υπενθύμιση

Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

Αν $D = 0$, τότε το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις

$$D \overset{C_2 \to C_2 - C_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ b & 1-b & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1-b & 1 \end{vmatrix} = b-3$$

• Αν $b \neq 3$ (δηλ. $D \neq 0$) τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{b-3} = \frac{3-\alpha}{b-3}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 \\ b & 4 & 1 \end{vmatrix}}{b-3} = \dots$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha \\ b & 1 & 4 \end{vmatrix}}{b-3} = \dots$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 1 \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + (-1)(\alpha - 4) = -\alpha + 3$$

• Αν $b=3$ (δηλαδή $D=0$) τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ 2x \quad +z &= \alpha \\ 3x+y+z &= 4 \end{aligned}$$

Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα του συστήματος

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{R_3 \to R_3 - 3R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & \alpha-2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 \to R_2 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Αν $\alpha-3 \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq 3$ το σύστημα είναι αδύνατο

• Αν $\alpha=3$, τότε προκύπτει το απλοποιημένο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ -2y+z &= 1 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x &= 1-y \\ z &= 1+2y \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα είναι αόριστο και οι λύσεις του είναι οι 3-άδες

$$(x,y,z) = (1-y,\ y,\ 1+2y) \qquad y \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 8

Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα

$$x + \alpha y + 2z = 1$$
$$x + (2\alpha-1)y + 3z = 1$$
$$x + \alpha y + (\alpha-3)z = 2\alpha-1$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ ← παράμετρος

Λύση

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha-1 & 3 \\ 1 & \alpha & \alpha-3 \end{vmatrix}$$

ορίζουσα της μήτρας των συντελεστών του συστήματος

$$D \xlongequal[R_2 \to R_2 - R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 0 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-5 \end{vmatrix} = (\alpha-1)(\alpha-5)$$

Αν $D=0$ τότε το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις

• $\boxed{\alpha=1}$

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= 1 \\ x + y - 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x+y&=1 \\ z&=0 \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα είναι αόριστο $y \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) = (1-y, y, 0)$

• $\boxed{\alpha=5}$

$$\begin{aligned} x+5y+2z&=1\\ x+9y+3z&=1\\ x+5y+2z&=9 \end{aligned}$$

Το σύστημα είναι αδύνατο σ' αυτή την περίπτωση

Αν $D\neq 0$ (δηλαδή $\alpha\neq 1,5$) τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \alpha & 2\\ 1 & 2\alpha-1 & 3\\ 2\alpha-1 & \alpha & \alpha-3\end{vmatrix}}{(\alpha-1)(\alpha-5)}=\frac{(1-\alpha)(1+\alpha)}{(\alpha-1)(\alpha-5)}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 2\alpha-1 & \alpha-3\end{vmatrix}}{(\alpha-1)(\alpha-5)}=\frac{2(1-\alpha)}{(\alpha-1)(\alpha-5)}$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \alpha & 1\\ 1 & 2\alpha-1 & 1\\ 1 & \alpha & 2\alpha-1\end{vmatrix}}{(\alpha-1)(\alpha-5)}=\frac{2(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)(\alpha-5)}$$