Ασκήσεις στο εσωτερικό γινόμενο

Άσκηση 1.

i) *Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο W που παράγουν τα διανύσματα*

$$\mathbf{x}_1 = (0,1,1,1),\ \mathbf{x}_2 = (1,1,2,0),\ \mathbf{x}_3 = (2,1,3,0)$$

ii) *Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\mathbf{v} = (0,1,4,1)$ στον χώρο W.*

iii) *Να εξετασθεί αν το $\mathbf{v}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.*

iv) *Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\mathbf{v}'$ το οποίο είναι ορθογώνιο στα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.*

v) *Να βρεθεί το μήκος (η norm) της προβολής του $\mathbf{v}$ πάνω στο χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.*

Λύση.

i) Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Gram - Schmidt.

$\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{y}_1||}\boldsymbol{y}_1$ όπου $\boldsymbol{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (0,1,1,1)$

$||\boldsymbol{y}_1|| = \sqrt{0^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

Άρα, $\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1)$.

$\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{y}_2||}\boldsymbol{y}_2$ όπου $\boldsymbol{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle &= \left\langle (1,1,2,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (1,1,2,0), (0,1,1,1) \rangle \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Άρα,

$$\boldsymbol{y}_2 = (1,1,2,0) - \frac{3}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1) = (1,0,1,-1)$$

$||\boldsymbol{y}_2|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$

Άρα, $\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1).$

$\mathbf{v}_3 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{y}_3||}\boldsymbol{y}_3$, όπου $\boldsymbol{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle &= \left\langle (2,1,3,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (2,1,3,0), (0,1,1,1) \rangle \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2\rangle &= \left\langle (2,1,3,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\langle (2,1,3,0),(1,0,1,-1)\rangle \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_3 &= (2,1,3,0) - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1) - \frac{5}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1) \\ &= (2,1,3,0) - \frac{4}{3}(0,1,1,1) - \frac{5}{3}(1,0,1,-1) \\ &= (1/3,-1/3,0,1/3) = \frac{1}{3}(1,-1,0,1).\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{y}_3\| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2+1^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Άρα, $\mathbf{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}/3}\dfrac{1}{3}(1,-1,0,1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1)$

Τελικά, η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ αποτελείται από τα διανύσματα

$\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1).$

$\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1).$

$\mathbf{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1).$

ii) Επειδή έχουμε υπολογίσει την ορθοκανονική βάση προκειμένου να βρούμε την προβολή P του $\mathbf{v} = (0,1,4,1)$ στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της προβολής:

$P = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} P &= \frac{6}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 \\ &= 2(0,1,1,1) + (1,0,1,-1) \\ &= (1,2,3,1) \end{aligned}$$

Άρα, η προβολή του $\mathbf{v} = (0,1,4,1)$ στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι το διάνυσμα $P = (1,2,3,1)$.

iii) Το $\mathbf{v} = (0,1,4,1)$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ διότι η προβολή $P = (1,2,3,1)$ δεν ισούται με το $\mathbf{v}$, άρα το $\mathbf{v}$ δεν ανήκει στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, επομένως δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

iv) Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το διάνυσμα $\mathbf{v} - P$.

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - P = (0,1,4,1) - (1,2,3,1) = (-1,-1,1,0)$$

Πράγματι,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle (-1,-1,1,0), (0,1,1,1) \rangle = 0$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle (-1,-1,1,0), (1,1,2,0) \rangle = 0$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_3 \rangle = \langle (-1,-1,1,0), (2,1,3,0) \rangle = 0$$

Παρατήρηση: Αν θέλουμε να βρούμε ένα ορθογώνιο διάνυσμα $\mathbf{u}$ σε ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, τότε επιλέγουμε "τυχαία" ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$, βρίσκουμε την προβολή P του $\mathbf{v}$ πάνω στα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ και το ζητούμενο u ισούται με $\mathbf{v} - P$.

v) Θέλουμε να βρούμε το μήκος του P.

Υπολογίσαμε ότι

$$P = \frac{6}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 = (1,2,3,1)$$

Άρα,

$$||P|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{15}.$$

Όμως, ισχύει ότι

$$\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{36}{3} + \frac{9}{3}} = \sqrt{\frac{45}{3}} = \sqrt{15}$$

□

Άσκηση 2. *Έστω* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του* $(V, \langle\rangle)$.

i) *(Ανισότητα Bessel) Να δειχθεί ότι για κάθε* $\mathbf{x} \in V$ *ισχύει ότι*
$$\sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle^2 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 .$$
Η ισότητα ισχύει ανν το $\mathbf{x}$ *ανήκει στον χώρο* W *που παράγουν τα* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

ii) *(Ταυτότητα Parseval)*
$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle^2 , \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W.$$

iii)
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y} \rangle , \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W \text{ και } \mathbf{y} \in V.$$

Λύση.

i) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ ισχύει ότι η προβολή P του $\mathbf{x}$ πάνω στο χώρο που παράγουν τα (ορθοκανονικά διανύσματα) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ δίδεται από τον τύπο

$$P = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Επίσης,
$$\mathbf{x} = P + (\mathbf{x} - P)$$
και τα διανύσματα P, $\mathbf{x} - P$ είναι ορθογώνια.

Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι

$$\|P\|^2 + \|\mathbf{x} - P\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

Άρα, $\|P\|^2 \leqslant \|x\|^2 \Leftrightarrow \|P\| \leqslant \|\mathbf{x}\|$.

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\|P\|^2 &= \langle P, P\rangle \\
&= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \mathbf{v}_n, \\
&\qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \mathbf{v}_n\rangle \\
&= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \mathbf{v}_n\rangle \\
&+ \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \mathbf{v}_n\rangle \\
&+ \cdots \\
&+ \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \mathbf{v}_n, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \mathbf{v}_n\rangle \\
&= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1\rangle + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2\rangle + \cdots \\
&\qquad + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \mathbf{v}_n, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle \mathbf{v}_n\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle^2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle^2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle + \cdots \\
&\qquad + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle^2 \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle^2 \|\mathbf{v}_1\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \cdots \\
&\qquad + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle^2 \|\mathbf{v}_n\|^2 \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle^2
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n\rangle^2 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\|\mathbf{x} - P\|^2 = 0$, δηλαδή $\mathbf{x} = P$, δηλαδή το $\mathbf{x}$ ισούται με την προβολή του, δηλαδή το $\mathbf{x}$ ανήκει στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

ii) Η ταυτότητα του Parseval προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Bessel θεωρώντας $\mathbf{x} \in W$. Τότε $x = P$ και άρα θα ισχύει η ισότητα οπότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

iii) Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y} \rangle, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W \text{ και } \mathbf{y} \in V.$$

Αφού $\mathbf{x} \in W$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle + \cdots \\
&\quad + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση Με βάση την προηγούμενη άσκηση έστω ότι σε κάποιο διανυσματικό χώρο τα διανύσματα $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ εκφράζονται σε μια ορθοκανονική βάση που αποτελείται από 3 διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ως εξής:

$$\mathbf{w}_1 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + (-2)\mathbf{v}_3$$

και

$$\mathbf{w}_2 = 3\mathbf{v}_1 + (-2)\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$$

Τότε

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}.$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{77}.$$

και

$$\left\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \right\rangle = 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 8 = -7.$$

$$\left\langle \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \right\rangle = \left\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \right\rangle + 2 \left\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \right\rangle = -7 + 2 \cdot 77 = 147.$$

Άσκηση 3. *Να διαγωνιοποιηθεί ορθογωνίως η μήτρα*

$$A=\begin{bmatrix}7 & -1 & -2\\ -1 & 7 & 2\\ -2 & 2 & 10\end{bmatrix}$$

Λύση. Επειδη η μήτρα είναι συμμετρική έπεται ότι έχει ορθογώνια διαγωνιοποίηση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$$|A-\lambda I_3|=0$$

$$\begin{vmatrix}7-\lambda & -1 & -2\\ -1 & 7-\lambda & 2\\ -2 & 2 & 10-\lambda\end{vmatrix}=0\ (R_1\to R_1+R_2)$$

$$\begin{vmatrix}6-\lambda & 6-\lambda & 0\\ -1 & 7-\lambda & 2\\ -2 & 2 & 10-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(6-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 7-\lambda & 2\\ -2 & 2 & 10-\lambda\end{vmatrix}=0\ (C_2\to C_2-C_1)$$

$$(6-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 8-\lambda & 2\\ -2 & 4 & 10-\lambda\end{vmatrix}=0\ (\text{Ανάπτυγμα με βάση 1η γραμμή})$$

$$(6-\lambda)\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}8-\lambda & 2\\ 4 & 10-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(6-\lambda)((8-\lambda)(10-\lambda)-8)=0$$

$$(6-\lambda)(\lambda^2-18\lambda+72)=0$$

$$(6-\lambda)^2(12-\lambda)=0$$

Άρα, η A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 12$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ (διπλή).

Θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή.

Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι

$$(A-\lambda I_3)X = O_{3\times 1}, \text{ όπου } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 12$ προκύπτει το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -6x_1 - 6x_2 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Άρα, $x_1 = -x_2$.

Οπότε $-4x_1 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2x_1$.

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 12$ έχουν την μορφή

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1, -2x_1) = x_1(1, -1, -2).$$

Επομένως, μια βάση του ιδιόχωρου είναι το ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1, -2).$$

Για τις ιδιοτιμές $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ προκύπτει το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

Οπότε $x_2 = x_1 - 2x_3$.

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ έχουν την μορφή

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_1 - 2x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0) + (0, -2x_3, x_3) \\ &= x_1(1, 1, 0) + x_3(0, -2, 1)\end{aligned}$$

Άρα, ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ έχει ως βάση τα διανύσματα

$\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$ και $\mathbf{u}_3 = (0, -2, 1)$.

Για να κάνουμε την ορθογώνια διαγωνιοποίηση, προκειμένου να βρούμε την ορθογώνια μήτρα P, θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο των Gram - Schmidt στα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

Επειδή το $\mathbf{u}_1$ ανήκει σε διαφορετικό ιδιόχωρο από τα $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ έπεται είναι ορθογώνιο σ' αυτα. Άρα, αρκεί να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο μόνο στα $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ και απλά να κανονικοποίησουμε το $\mathbf{u}_1$.

$\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{||\mathbf{y}_2||}\mathbf{y}_2$ όπου $\mathbf{y}_2 = \mathbf{u}_2$

$||\mathbf{y}_2|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

Άρα,

$\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{||\boldsymbol{y}_3||}\boldsymbol{y}_3$ όπου $\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \left\langle \boldsymbol{u}_3, \mathbf{v}_2 \right\rangle \mathbf{v}_2$

$\left\langle \boldsymbol{u}_3, \mathbf{v}_2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle (0,-2,1),(1,1,0) \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{y}_3 = (0,-2,1) - (-\frac{2}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = (1,-1,1)$

$||\mathbf{y}_3|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$

Άρα,

$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

Τέλος, για τον υπολογισμό του $\mathbf{v}_1$ αρκεί να κανονικοποιήσουμε το $\boldsymbol{u}_1$.

$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{u}_1||}\boldsymbol{u}_1.$

$||\boldsymbol{u}_1|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$

Άρα,

$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$

Συνοψίζοντας

$\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$

$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$\mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

Άρα, οι ζητούμενες μήτρες είναι η ορθογώνια μήτρα P και η διαγώνια μήτρα D όπου

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

και

$$D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$P^t A P = D$$

Υπενθυμίζεται ότι

$$P^{-1} = P^t.$$

διότι η P είναι ορθογώνια. □