Ασκήσεις στις Μήτρες (Μέρος Α)

Άσκηση 1. *Αν*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textit{και} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι πίνακες $(AB)^{-1}$ *και* $(A^{-1}B^{-1})^t$.

Λύση.

Ισχύει ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Ισχύει ότι $(A^{-1}B^{-1})^t = (B^{-1})^t(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. □

Άσκηση 2. *Να αποδειχθεί ότι* $A^2 = A$, *όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο $B = 2A^5 - 3A^2 + A$.

Λύση. Πράγματι,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \ldots = A$$

```python
import sympy as sp
A = sp.Matrix([[2,-2,-4],[-1,3,4],[1,-2,-3]])
print("A**2:", A**2)
```

Output:

```
A**2: Matrix([[2, -2, -4], [-1, 3, 4], [1, -2, -3]])
```

Επομένως,

$$B = 2A^5 - 3A^2 + A = 2A^5 - 3A + A = 2A^5 - 2A$$

Όμως, $A^5 = A^2A^2A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A$.

Άρα,

$$B = 2A^5 - 2A = 2A - 2A = O$$ □

Παρατήρηση: Η μήτρα A ονομάζεται **αδύναμη** (δεν έχει δύναμη).

Άσκηση 3. *Να βρεθούν οι μήτρες C^n, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:*

i) $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ii) $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση.

i) Θα προσπαθήσουμε να εικάσουμε τον τύπο της μήτρας C_1^n υπολογίζοντας μερικές από τις δυνάμεις της.

```
import sympy as sp
n = sp.symbols('n')
C1 = sp.Matrix([[2,1],[0,3]])
print((C1**n).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
[2**n, -2**n + 3**n]
[   0,         3**n]
```

Εικασία: $C_1^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$

Για την απόδειξη του τύπου θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n.

Για $n = 1$ έχουμε ότι $C_1^1 = \begin{bmatrix} 2^1 & 3^1 - 2^1 \\ 0 & 3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = C_1$, άρα ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $C_1^k = \begin{bmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$.

Θα δειχθεί ότι ισχύει και για $n = k + 1$. Πράγματι

$$\begin{aligned} C_1^{k+1} = C_1 \cdot C_1^k &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^k & 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k + 3^k \\ 0 & 3 \cdot 3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3^{k+1} - 2^{k+1} \\ 0 & 3^{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Θα προσπαθήσουμε να εικάσουμε τον τύπο της μήτρας C_2^n υπολογίζοντας μερικές από τις δυνάμεις της.

```
import sympy as sp
C2 = sp.Matrix([[1,0,1],[0,1,0],[1,0,1]])
for i in range(1,5):
    print("C2**",i,"=")
    print((C2**i).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
C2** 1 =
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[1, 0, 1]
C2** 2 =
[2, 0, 2]
[0, 1, 0]
[2, 0, 2]
C2** 3 =
[4, 0, 4]
[0, 1, 0]
[4, 0, 4]
C2** 4 =
[8, 0, 8]
[0, 1, 0]
[8, 0, 8]
```

Εικασία: $C_2^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$

Για την απόδειξη του τύπου θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n.

Για $n = 1$ έχουμε ότι $C_2^1 = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C_2$, άρα ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $C_2^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix}$.

Θα δειχθεί ότι ισχύει και για $n = k+1$. Πράγματι

$$C_2^{k+1} = C_2 \cdot C_2^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{bmatrix}.$$

Άρα, ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. □

Άσκηση 4. *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *και* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

i) *Να δειχθεί ότι* $AB = 7I_2$.

ii) *Να υπολογισθεί η μήτρα* $(BA)^n$, *όπου* $n \in \mathbb{N}^*$

Λύση.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7I_2$$

$$\begin{aligned} (BA)^n &= \underbrace{(BA)(BA)(BA)\cdots(BA)}_{n \text{ φορές}} \\ &= B\,\underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{n-1 \text{ φορές}}\,A \\ &= B(AB)^{n-1}A \\ &= B(7I_2)^{n-1}A \\ &= B7^{n-1}I_2^{n-1}A = 7^{n-1}BA \\ &= 7^{n-1}\begin{bmatrix} 10 & -3 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 8 & -8 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 5. *Να βρεθούν όλες οι μήτρες $B \in \mathcal{M}_2$ οι οποίες αντιμετατίθενται με την μήτρα* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Λύση. Έστω $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Θέλουμε να ισχύει:

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 0 \\ c+2d & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, ισοδύναμα

$$\begin{cases} a = a + 2b \\ b = 0 \\ 2a = c + 2d \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2a = c + 2d \end{cases}$$

Άρα, οι μήτρες B που αντιμετατίθενται με την A είναι της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2(a-d) & d \end{bmatrix}, \text{ όπου } a, d \in \mathbb{R}.$$

□

Άσκηση 6. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα A^5 είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A είναι επίσης αντιστρέψιμη.*

Λύση. Για να δείξουμε ότι μια μήτρα A είναι αντιστρέψιμη πρέπει να βρούμε μια άλλη μήτρα C ώστε $AC = I_n$.

Επειδή A^5 είναι αντιστρέψιμη υπάρχει μήτρα B ώστε

$$A^5 B = I_n \Leftrightarrow AA^4 B = I_n$$

οπότε η μήτρα A^4B είναι η αντίστροφη της A, δηλαδή η A είναι αντιστρέψιμη. □

Άσκηση 7. *Να βρεθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών (και των προσθέσεων) που απαιτούνται για τον υπολογισμό του γινομένου $C = A \cdot B$, όταν οι μήτρες $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ έχουν τύπο*

i) *A: $1 \times n$ και B: $n \times 1$.*

ii) *A: $m \times n$ και B: $n \times k$.*

i) A: $1 \times n$ και B: $n \times 1$.

Στην περίπτωση αυτή, το γινόμενο AB είναι μια μήτρα $C = [c_{ij}]$ τύπου 1×1 και

$$c_{11} = \sum_{p=1}^{n} a_{1p} b_{p1}$$

οπότε απαιτούνται n πολλαπλασιασμοί (και $n-1$ προσθέσεις).

ii) A: $m \times n$ και B: $n \times k$.

Στην περίπτωση αυτή, το γινόμενο AB είναι μια μήτρα $C = [c_{ij}]$ τύπου $m \times k$, άρα έχει $m \cdot k$ στοιχεία.

Ο υπολογισμός κάθε στοιχείου c_{ij} της C γίνεται βάση του τύπου

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$$

άρα, για κάθε στοιχείο απαιτούνται $n-1$ προσθέσεις και n πολλαπλασιασμοί.

Επομένως, για να βρούμε όλα τα στοιχεία της μήτρας C απαιτούνται $m \cdot n \cdot k$ πολλαπλασιασμοί (και $m \cdot (n-1) \cdot k$ προσθέσεις).

Παραδείγματα:

- αν η A έχει διαστάσεις 5×7 και B έχει διαστάσεις 7×2, τότε η μήτρα AB έχει διαστάσεις 5×2 και για τον υπολογισμό του AB απαιτούνται: $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$ πολλαπλασιασμοί.
- αν η A έχει διαστάσεις 10×30 και B έχει διαστάσεις 30×20, τότε η μήτρα AB έχει διαστάσεις 10×20 και για τον υπολογισμό του AB απαιτούνται: $10 \cdot 30 \cdot 20 = 6000$ πολλαπλασιασμοί.
- αν η A έχει διαστάσεις 10×5, η B έχει διαστάσεις 5×3 και η C έχει διαστάσεις 3×9. Τότε η μήτρα ABC θα έχει διαστάσεις 10×9. Πόσοι πολλαπλασιασμοί χρειάζομαι για να την υπολογίσω;

Υπάρχουν δύο τρόποι να υπολογισθεί το γινόμενο ABC.

- 1ος τρόπος: $(AB)C$
  Το (AB) έχει διαστάσεις 10×3 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 5 \cdot 3 = 150$ πολλαπλασιασμοί.
  Το $(AB)C$ έχει διαστάσεις 10×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 3 \cdot 9 = 270$ πολλαπλασιασμοί.
  Συνολικά, με αυτό τον τρόπο απαιτούνται $150 + 270 = 420$ πολλαπλασιασμοί.
- 2ος τρόπος: $A(BC)$.
  Το (BC) έχει διαστάσεις 5×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $5 \cdot 3 \cdot 9 = 135$ πολλαπλασιασμοί.
  Το $A(BC)$ έχει διαστάσεις 10×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 5 \cdot 9 = 450$ πολλαπλασιασμοί.
  Συνολικά, με αυτό τον τρόπο απαιτούνται $135 + 450 = 585$ πολλαπλασιασμοί.

Άσκηση 8. *Να βρεθεί ο βέλτιστος τρόπος υπολογισθεί το γινόμενο $A \cdot B \cdot C \cdot D$ των μητρών A, B, C, D με τύπους*
A: 10×4
B: 4×12
C: 12×8
D: 8×20

Λύση. Ο πολλαπλασιασμός μητρών είναι προσεταιριστικός, δηλαδή δεν εξαρτάται από την σειρά που θα γίνουν (ανά δύο) οι πολλαπλασιασμοί.

Υπάρχουν 5 τρόποι να υπολογίσουμε το γινόμενο $A \cdot B \cdot C \cdot D$

- 1ος τρόπος: $((AB)C)D$.

  AB έχει διαστάσεις 10×12 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 12 = 480$ πολλαπλασιασμούς.

  $(AB)C$ έχει διαστάσεις 10×8 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 12 \cdot 8 = 960$ πολλαπλασιασμούς.

  $((AB)C)D$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 8 \cdot 20 = 1600$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 3040 πολλαπλασιασμοί.

- 2ος τρόπος: $(AB)(CD)$.

  AB έχει διαστάσεις 10×12 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 12 = 480$ πολλαπλασιασμούς.

  CD έχει διαστάσεις 12×20 και χρειαζόμαστε $12 \cdot 8 \cdot 20 = 1920$ πολλαπλασιασμούς.

  $(AB)(CD)$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 12 \cdot 20 = 2400$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 4800 πολλαπλασιασμοί.

- 3ος τρόπος: $(A(BC))D$.

  BC έχει διαστάσεις 4×8 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ πολλαπλασιασμούς.

  $A(BC)$ έχει διαστάσεις 10×8 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 8 = 320$ πολλαπλασιασμούς.

  $(A(BC))D$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 8 \cdot 20 = 1600$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 2304 πολλαπλασιασμοί.

- 4ος τρόπος: $A((BC)D)$.

  BC έχει διαστάσεις 4×8 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ πολλαπλασιασμούς.

  $(BC)D$ έχει διαστάσεις 4×20 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 8 \cdot 20 = 640$ πολλαπλασιασμούς.

  $A((BC)D)$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 20 = 800$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 1824 πολλαπλασιασμοί.

- 5ος τρόπος: $A(B(CD))$.

  CD έχει διαστάσεις 12×20 και χρειαζόμαστε $12 \cdot 8 \cdot 20 = 1920$ πολλαπλασιασμούς.

  $B(CD)$ έχει διαστάσεις 4×20 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 20 = 960$ πολλαπλασιασμούς.

  $A(B(CD))$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 20 = 800$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 3680 πολλαπλασιασμοί.

Άρα, ο αποδοτικότερος τρόπος υπολογισμού του γινομένου $ABCD$ είναι $A((BC)D)$.

Παρατήρηση: Μπορούμε να διαπιστώσουμε και πειραματικά την απόδοση των διαφορετικών τρόπων υπολογισμού του γινομένου $ABCD$. (Προκειμένου να γίνουν εμφανέστερες οι διαφορές θα χρησιμοποιήσουμε μήτρες A, B, C, D των οποίων οι διαστάσεις είναι πολλαπλασιασμένες επί 20).

```python
import sympy as sp
import datetime
A = sp.ones(200,80) #200 x 80 matrix where every element equals to 1
B = sp.ones(80,240)
C = sp.ones(240,160)
D = sp.ones(160,400)
start = datetime.datetime.now()

R0 = A@B@C@D   #default? ((A@B)@C)@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia0 = finish - start
print("A@B@C@D", diarkeia0)

#1os tropos
start = datetime.datetime.now()
R1 = ((A@B)@C)@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia1 = finish - start
print("((A@B)@C)@D", diarkeia1)

#2os tropos
start = datetime.datetime.now()
R2 = (A@B)@(C@D)
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia2 = finish - start
print("(A@B)@(C@D)", diarkeia2)

#3os tropos
start = datetime.datetime.now()
R3 = (A@(B@C))@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia3 = finish - start
print("(A@(B@C))@D", diarkeia3)

#4os tropos
start = datetime.datetime.now()
R4 = A@((B@C)@D)
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia4 = finish - start
print("A@((B@C)@D)", diarkeia4)

#5os tropos
start = datetime.datetime.now()
R5 = A@(B@(C@D))
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia5 = finish - start
print("A@(B@(C@D))", diarkeia5)
```

Output:

```
A@B@C@D 0:00:29.513232
((A@B)@C)@D 0:00:33.169644
(A@B)@(C@D) 0:00:47.781566
(A@(B@C))@D 0:00:24.835258
A@((B@C)@D) 0:00:18.673987
A@(B@(C@D)) 0:00:35.918524
```

□

Άσκηση 9. *Μια $n \times n$ μήτρα A ονομάζεται **στοχαστική** αν τα στοιχεία της είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε γραμμή της A είναι ίσο με 1.*

i) *Να δειχθεί ότι μια $n \times n$ μήτρα A με στοιχεία μη αρνητικούς αριθμούς είναι στοχαστική αν και μόνο αν $AX = X$ όπου X είναι η μήτρα στήλη $n \times 1$ της οποίας όλα τα στοιχεία είναι ίσα με 1.*

ii) *Να δειχθεί ότι το γινόμενο δύο στοχαστικών $n \times n$ μητρών A, B είναι επίσης στοχαστική μήτρα.*

i) Έστω $A = [a_{ij}]$ και $X = [x_{i1}]$ όπου $x_{i1} = 1$ για κάθε $i \in [n]$. Η μήτρα $C = AX$ έχει διαστάσεις $n \times 1$ δηλαδή είναι μήτρα στήλη. Το στοιχείο c_{i1} της C ισούται με

$$c_{i1} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}x_{p1} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot 1 = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}$$

δηλαδή το στοιχείο c_{i1} ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της i-οστής γραμμής της A.

- Αν η μήτρα A είναι στοχαστική (δηλαδή τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής της αθροίζουν στο 1) τότε $c_{i1} = 1$ για κάθε $i \in [n]$, άρα $C = X$.
- Αν η μήτρα A δεν είναι στοχαστική (δηλαδή υπάρχει γραμμή με άθροισμα στοιχείων διάφορο του 1) τότε υπάρχει στοιχείο $c_{i1} \neq 1$ για κάποιο $i \in [n]$, άρα $C \neq X$.

ii) Επειδή ο τύπος υπολογισμού οποιουδήποτε στοιχείου του γινομένου δύο μητρών A, B χρησιμοποιεί μόνο πρόσθεση και πολλαπλασιασμό και επειδή οι μήτρες A, B έχουν μη αρνητικά στοιχεία, έπεται ότι και η μήτρα AB έχει επίσης μη αρνητικά στοιχεία.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η μήτρα AB είναι στοχαστική αρκεί να δείξουμε ότι $(AB)X = X$.

Πράγματι, $ABX = A(BX) = AX = X$.

Άρα, η μήτρα AB είναι επίσης στοχαστική μήτρα.

Παρατήρηση: Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια τυχαία στοχαστική μήτρα S από μια τυχαία μήτρα μη αρνητικών αριθμών R διαιρώντας κάθε στοιχείο της R με το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής στο οποίο ανήκει.

```python
import sympy as sp

S = sp.randMatrix(7,7,0,10)
print("A random nonnegative", S.rows, "x", S.cols, "matrix:")
print(S.table(sp.StrPrinter()))
for i in range(S.rows):
    rowsum = 0
    for j in range(S.cols):
        rowsum += S[i,j]
    for j in range(S.cols):
        S[i,j] /= rowsum
print("A random stochastic", S.rows, "x", S.cols, "matrix:")
print(S.table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
A random nonnegative 7 x 7 matrix:
[3,  4, 0, 8, 10, 1,  7]
[2,  0, 8, 0,  4, 7,  4]
[8,  2, 4, 0,  7, 8,  1]
[6, 10, 0, 9,  6, 6,  7]
[2,  7, 6, 3,  5, 9, 10]
[8, 10, 5, 3,  8, 0,  1]
[4,  3, 6, 3,  8, 5,  6]
A random stochastic 7 x 7 matrix:
[1/11, 4/33,    0, 8/33, 10/33, 1/33, 7/33]
[2/25,    0, 8/25,    0,  4/25, 7/25, 4/25]
[4/15, 1/15, 2/15,    0,  7/30, 4/15, 1/30]
[3/22, 5/22,    0, 9/44,  3/22, 3/22, 7/44]
[1/21,  1/6,  1/7, 1/14,  5/42, 3/14, 5/21]
[8/35,  2/7,  1/7, 3/35,  8/35,    0, 1/35]
[4/35, 3/35, 6/35, 3/35,  8/35,  1/7, 6/35]
```