Ασκήσεις στα Διανύσματα (Μέρος Α)

Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος.

Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ ονομάζονται **γραμμικώς εξαρτημένα** όταν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, όχι όλα ίσα με το 0, τέτοια ώστε

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε ονομάζονται **γραμμικώς ανεξάρτητα**. Ισοδύναμα, τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ ονομάζονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν και μόνο αν, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Άσκηση 1. *Να εξεταστεί αν τα διανύσματα του $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, όταν:*

(i) $\mathbf{x}_1 = (0, 1, -3), \quad \mathbf{x}_2 = (-2, 1, 2), \quad \mathbf{x}_3 = (4, 1, 0).$

(ii) $\mathbf{x}_1 = (2, 1, -1), \quad \mathbf{x}_2 = (-1, 2, 3), \quad \mathbf{x}_3 = (4, 7, 3).$

Λύση. (i) Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(0,1,-3) + \lambda_2(-2,1,2) + \lambda_3(4,1,0) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (0, \lambda_1, -3\lambda_1) + (-2\lambda_2, \lambda_2, 2\lambda_2) + (4\lambda_3, \lambda_3, 0) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (-2\lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, -3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(ii) Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(2,1,-1) + \lambda_2(-1,2,3) + \lambda_3(4,7,3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (2\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_1) + (-\lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2) + (4\lambda_3, 7\lambda_3, 3\lambda_3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3, -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Αν τεθεί, $\lambda_3 = 1$, τότε $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, οπότε ισχύει ότι

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}.$$

Επειδή οι συντελεστές των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ δεν είναι όλοι 0, προκύπτει ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. □

Άσκηση 2. *Να εξετασθεί αν τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.*

i) $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 1, 0)$

ii) $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 7, 3)$.

iii) $\mathbf{v}_1 = (2, 5, -1)$, $(3, 1, 2)$.

Λύση. i) Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1(0,1,-3) + \lambda_2(-2,1,2) + \lambda_3(4,1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = \dfrac{1}{2}\lambda_2 \\ \dfrac{2}{3}\lambda_2 + \lambda_2 + \dfrac{1}{3}\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \dfrac{2}{3}\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα, επειδή η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παρατήρηση: Επειδή τα **τρία** διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^3$ μπορούμε να δώσουμε έναν εναλλακτικό έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας μέσω οριζουσών: Η εξίσωση

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή, ισοδύναμα

$$\begin{aligned} -2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ομογενές σύστημα $AX = \mathbb{O}$)

Άρα,

- αν $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ μοναδική λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
  $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ γραμμικώς ανεξάρτητα.
- αν $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ άπειρες λύσεις για τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
  $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ γραμμικώς εξαρτημένα.

Συμπέρασμα:

Ένας τρόπος για να ελέγξουμε αν n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι: Θεωρήσουμε την $n \times n$ μήτρα A με στήλες τα n διανύσματα (σε οποιαδήποτε σειρά).

- Αν $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Αν $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ γραμμικώς εξαρτημένα.

Εδώ έχουμε ότι

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{R_3 \to R_3 + 3R_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(-6-20) = 26 \neq 0$$

Άρα, τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ii) Θεωρούμε την ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Έχουμε ότι

$$D \overset{R_1 \to R_1 - 2R_2,\ R_3 \to R_3 + R_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα, τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Για παράδειγμα

$$-3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0$$

iii) Έχουμε 2 διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της ορίζουσας.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(2,5,1) + \lambda_2(3,1,2) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Άρα, τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παρατήρηση: Όταν έχουμε 2 διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ τότε

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \overset{\lambda_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} \mathbf{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v}_2$$

δηλαδή το $\mathbf{v}_1$ είναι πολλαπλάσιο του $\mathbf{v}_2$.

Επομένως, για να ελέγξουμε αν **δύο** διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αρκεί να ελέγξουμε αν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Ποιά από τα παρακάτω ζεύγη διανυσμάτων είναι γραμμικώς εξαρτημένα;

$\mathbf{u}_1 = (2,3,5)$, $\mathbf{u}_2 = (4,8,10)$

$\mathbf{u}_1 = (2,7,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (6,21,-3)$

$\mathbf{u}_1 = (0,7,5)$, $\mathbf{u}_2 = (1,14,10)$ $\square$

Άσκηση 3. *Έστω*

$$\mathbf{x}_1 = (1, 2, -1, 0), \mathbf{x}_2 = (1, 0, -1, 3), \mathbf{x}_3 = (0, -1, 1, 1)$$

και $\mathbf{x} = (-1, 0, 5, a)$. *Να βρεθεί το* $a \in \mathbb{R}$, *ώστε το* $\mathbf{x}$ *να είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 &\Leftrightarrow (-1, 0, 5, a) = \lambda_1(1, 2, -1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1, 3) + \lambda_3(0, -1, 1, 1) \\
&\Leftrightarrow (-1, 0, 5, a) = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_2 + \lambda_3) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = a \end{cases}
\end{aligned}$$

Επιλύοντας το σύστημα των **τριών πρώτων** από τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει ότι

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 4.$$

Οπότε είναι $a = 3\lambda_2 + \lambda_3 = -5$. □

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι αν τα διανύσματα* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα διανύσματα* $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1+2V_2-3\mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2+3\mathbf{v}_3$ *είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Λύση. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3) + \lambda_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \lambda_3(\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{v}_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3)\mathbf{v}_2 + (-\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Επειδή τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα έπεται ότι

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα, τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Αν $(V,+,\cdot)$ είναι ένας (πραγματικός) διανυσματικός χώρος και W ένα μη κενό υποσύνολο του V τέτοιο ώστε

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}\in W \text{ για κάθε } \mathbf{x},\mathbf{y}\in W$$

και

$$\lambda\cdot\mathbf{x}\in W \text{ για κάθε } \mathbf{x}\in W,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

τότε η δομή $(W,+,\cdot)$ ονομάζεται **διανυσματικός** (ή **γραμμικός**) **υπόχωρος** (ή απλά **υπόχωρος**) του $(V,+,\cdot)$.

Πρόταση 1. *Έστω $(V,+,\cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του και W ένα μη κενό υποσύνολο του V. Τότε, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *το W είναι υπόχωρος του $(V,+,\cdot)$.*
2. *$\lambda\mathbf{x}\in W$, και $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in W$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$.*
3. *$\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}\in W$, για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$.*
4. *$\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}\in W$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$.*

Άσκηση 5. *Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbf{R}^2$ είναι υπόχωροι του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$:*

1. $W_1=\{(0,0)\}$.
2. $W_2=\{(1,1)\}$.
3. $W_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=2x\}$.
4. $W_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=2x+1\}$.
5. $W_5=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0\}$.
6. $W_6=\{\lambda(1,2) : \lambda\in\mathbb{R}\}$.
7. $W_7=\{a(1,2)+b(2,1) : a,b\in\mathbb{R}\}$.
8. $W_8=\{a(1,2)+(2,1) : a\in\mathbb{R}\}$
9. $W_9=\{a(1,2)+(2,4) : a\in\mathbb{R}\}$
10. $W_{10}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\leqslant 10\}$.

Λύση. Σε όλα τα παρακάτω, είναι χρήσιμη η παρατήρηση ότι το μηδενικό διάνυσμα **πρέπει** να ανήκει σε κάθε κάθε υπόχωρο ενός διανυσματικού χώρου. Εδώ το μηδενικό διάνυσμα είναι το ζεύγος $(0,0)$.

1. Το W_1 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

2. Επειδή $(0,0) \notin W_2$ έπεται ότι W_2 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

3. Προφανώς, $W_3 \neq \varnothing$ αφού $(0,0) \in W_3$ (διότι $0 = 2 \cdot 0$).

   Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_3$ με $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$. Τότε ισχύει $y_1 = 2x_1$ και $y_2 = 2x_2$.

   Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

   $$\begin{aligned} a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 &= a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) \\ &= (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2). \end{aligned}$$

   Για να είναι $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \in W_3$ πρέπει $ay_1 + by_2 = 2(ax_1 + bx_2)$.

   Πράγματι, από τις σχέσεις $y_1 = 2x_1$ και $y_2 = 2x_2$ προκύπτει ότι

   $$ay_1 = 2ax_1 \text{ και } by_2 = 2bx_2.$$

   Προσθέτωντας κατά μέλη έχουμε ότι

   $$ay_1 + by_2 = 2(ax_1 + bx_2).$$

   Άρα, $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \in W_3$, δηλαδή το W_3 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

4. Επειδή $(0,0) \notin W_4$, αφού $0 \neq 2 \cdot 0 + 1$, έπεται ότι W_4 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2), +, \cdot)$.

5. Προφανώς, $W_5 \neq \varnothing$, αφού $(0,0) \in W_5$. Όμως το W_5 δεν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+$ και $\cdot$. Πράγματι, ενώ $(1,1) \in W_5$ ισχύει $(-1)\cdot(1,1) = (-1,-1) \notin W_5$. Άρα το W_5 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

6. Προφανώς, $W_6 \neq \varnothing$, αφού $(1,2) \in W_6$.

   Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_6$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ώστε $\mathbf{v}_1 = \lambda_1(1,2)$ και $\mathbf{v}_2 = \lambda_2(1,2)$.

   Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

   $$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = a\lambda_1(1,2) + b\lambda_2(1,2) = (a\lambda_1 + b\lambda_2)(1,2) \in W_6.$$

   Άρα, το W_6 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

7. Προφανώς, $W_7 \neq \emptyset$, αφού $(1,2) \in W_7$.

   Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_7$. Τότε υπάρχουν $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$ ώστε $\mathbf{v}_1 = a_1(1,2) + b_1(2,1)$, και $\mathbf{v}_2 = a_2(1,2) + b_2(2,1)$.

   Για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\kappa\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 &= \kappa(a_1(1,2) + b_1(2,1))\\ &= \lambda(a_2(1,2) + b_2(2,1))\\ &= (\kappa a_1 + \lambda a_2)(1,2) + (\kappa b_1 + \lambda b_2)(2,1) \in W_7.\end{aligned}$$

   Άρα, το W_7 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

8. Ισχύει ότι $(0,0) \notin W_8$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$a(1,2) + (2,1) = (0,0)$$

   ή, ισοδύναμα,

$$(a+2, 2a+1) = (0,0)$$

   ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} a + 2 &= 0\\ 2a + 1 &= 0,\end{aligned}$$

   το οποίο είναι αδύνατο. Άρα το W_8 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

9. Ισχύει ότι $a(1,2)+(2,4) = a(1,2)+2(1,2) = (a+2)(1,2)$. Επομένως, εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (6), εύκολα προκύπτει ότι το W_9 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

10. Το σύνολο W_{10} δεν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+$ και $\cdot$.

    Προφανώς, $(1,1) \in W_{10}$ αφού $|1| + |1| \leqslant 10$, αλλά $6 \cdot (1,1) = (6,6) \notin W_{10}$, αφού $|6| + |6| > 10$. Άρα, το W_{10} δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι οι μόνοι γνήσιοι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ είναι η αρχή των αξόνων, καθώς και όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. $\square$

Άσκηση 6. *Να εξεταστεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*:*

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1\}$$
$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Λύση. Το μηδενικό στοιχείο $(0, 0, 0)$ του $\mathbb{R}^3$ ανήκει στα W_1, W_2, αφού

$$0^2 + 0^2 + 0^2 \leqslant 1 \quad \text{και} \quad 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0,$$

άρα τα σύνολα W_1, W_2 είναι μη κενά.

Παρατηρούμε ότι $(0, 0, 1) \in W_1$, αφού $0^2 + 0^2 + 1^2 \leqslant 1$, ενώ $2(0, 0, 1) = (0, 0, 2) \notin W_1$, διότι $0^2 + 0^2 + 2^2 = 4 > 1$. Άρα, το σύνολο W_1 δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$ και επομένως δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^3$ και $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in W_2$. Τότε, είναι

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{και} \quad 4y_1 - 2y_2 + y_3 = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο αυτές ισότητες με λ και μ αντίστοιχα, και προσθέτοντας τις ισότητες που προκύπτουν, έπεται ότι

$$\lambda(4x_1 - 2x_2 + x_3) + \mu(4y_1 - 2y_2 + y_3) = 0,$$

οπότε

$$4(\lambda x_1 + \mu y_1) - 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3) = 0,$$

και επομένως

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \in W_2.$$

Άρα, βάσει της Πρότασης 1, το W_2 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. $\square$

Άσκηση 7. *Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος* $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$*, όπου* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το* $\mathbb{R}$ *στο* $\mathbb{R}$ *και οι πράξεις* $+, \cdot$ *ορίζονται ως εξής:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \textit{και} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

για κάθε $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Να εξεταστεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του* $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$*:*

$$\begin{aligned} W_1 &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \textit{ παραγωγίσιμη}, \} \\ W_2 &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \textit{ περιττή}\}, \\ W_3 &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(1) + 2f(2) + \cdots + 9f(9) = 10\}. \end{aligned}$$

Λύση. Επειδή, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ισχύει

$$f, g \text{ παραγωγίσιμες (αντ. περιττές)} \Rightarrow \lambda f + \mu g \text{ παραγωγίσιμη (αντ. περιττή)},$$

έπεται ότι τα σύνολα W_1, W_2 είναι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$.

Αντίθετα, το W_3 δεν είναι υπόχωρος, διότι η μηδενική συνάρτηση δεν ανήκει σε αυτό. □

Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Ένα υποσύνολο

$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\},$$

του V ονομάζεται **βάση** του V αν και μόνο αν

- το S παράγει τον V, δηλαδή

  $$V = < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >$$

  και

- τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 1: Βάση του $\mathbb{R}^n$

Το σύνολο $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ με

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0), \qquad i \in [n],$$

είναι μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Η βάση αυτή ονομάζεται **κανονική βάση** του $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Ένας διανυσματικός χώρος $(V, +, \cdot)$ ονομάζεται **πεπερασμένης διάστασης**, όταν παράγεται από πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων.

Δύο βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου $(V, +, \cdot)$ ονομάζεται **διάσταση** του διανυσματικού χώρου και συμβολίζεται με $\dim V$.

Πρόταση 2. *Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος, με $\dim V = n$.*

- *Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, τότε το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια βάση του $(V, +, \cdot)$.*

- *Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ παράγουν τον $(V, +, \cdot)$, τότε το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια βάση του $(V, +, \cdot)$.*

Άσκηση 8. *Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα*

$$\mathbf{x} = (2, 1, -3), \quad \mathbf{y} = (3, 2, -3), \quad \mathbf{z} = (1, -1, 1)$$

αποτελούν βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Λύση. Επειδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, αρκεί να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{z} = \mathbf{0} \\
\Rightarrow &\lambda_1(2, 1, -3) + \lambda_2(3, 2, -3) + \lambda_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0) \\
\Rightarrow &(2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \\
\Rightarrow &\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow &\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν βάση του χώρου. □

Άσκηση 9. *Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων αποτελούν βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

1. $S_1 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$.
2. $S_2 = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 4, 2), (4, 2, 4)\}$.
3. $S_3 = \{(1, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 3)\}$.
4. $S_4 = \{(1, -1, 1), (2, 1, -1), (2, 7, -7)\}$.

Λύση. Ο διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ έχει διάσταση 3. Επομένως κάθε βάση του έχει ακριβώς 3 στοιχεία.

1. Επειδή $|S_1| = 2$, το σύνολο S_1 δεν αποτελεί βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.
2. Επειδή $|S_2| = 4$, το σύνολο S_2 δεν αποτελεί βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

3. Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $(1,2,1),(2,1,2),(1,2,3)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

   - (1ος τρόπος) Θεωρούμε την εξίσωση

   $$\lambda_1(1,2,1)+\lambda_2(2,1,2)+\lambda_3(1,2,3)=\mathbf{0} \Leftrightarrow$$
   $$(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3, 2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3, \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)=(0,0,0),$$

   από την οποία προκύπτει το σύστημα

   $$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ 2\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow$$
   $$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ -3\lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0.\end{cases}$$

   Άρα, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

   - (2ος τρόπος) Θα υπολογίσουμε την τιμή της ορίζουσας της μήτρας με γραμμές τα 3 διανύσματα. Είναι

   $$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&2\\0&0&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=2(1-4)=-6\neq 0.$$

   Άρα, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.[1]

   Επομένως, το S_3 αποτελεί μια βάση του $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

4. Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $(1,-1,1),(2,1,-1),(2,7,-7)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

   - (1ος τρόπος) Θεωρούμε την εξίσωση

   $$\lambda_1(1,-1,1)+\lambda_2(2,1,-1)+\lambda_3(2,7,-7)=\mathbf{0} \Leftrightarrow$$
   $$(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3, -\lambda_1+\lambda_2+7\lambda_3, \lambda_1-\lambda_2-7\lambda_3)=(0,0,0),$$

   από την οποία προκύπτει το σύστημα

[1] Ο 2ος τρόπος εφαρμόζεται μόνο αν έχουμε να εξετάσουμε n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2+7\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2-7\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2-7\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\lambda_2+9\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2-7\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_2=-3\lambda_3\\ \lambda_1+3\lambda_3-7\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=4\lambda_3\\ \lambda_2=-3\lambda_3.\end{cases}$$

Άρα, το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις (για παράδειγμα την $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-3$ και $\lambda_3=1$), δηλαδή τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

- (2ος τρόπος) Θα υπολογίσουμε την τιμή της ορίζουσας της μήτρας με γραμμές τα 3 διανύσματα. Είναι

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\2&7&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&1&0\\2&7&0\end{vmatrix}=0$$

άρα, τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.[2]

Επομένως, το σύνολο S_4 δεν αποτελεί βάση του $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$. □

Πρόταση 3. *Έστω $(V,+,\cdot)$ ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος, ο οποίος έχει μια βάση με n στοιχεία. Αν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m\in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε $m\leqslant n$.*

Άσκηση 10. *Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:*

i) $S_1=\{(2,-7,4),(-1,-1,6),(4,3,-2),(5,-1,-2)\}$.

ii) $S_2=\{(3,0,-2)\}$.

iii) $S_3=\{(2,1,0),(1,-1,-2)\}$.

iv) $S_4=S_2\cup S_3$.

Λύση. Ο χώρος $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ έχει διάσταση 3 επομένως ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ είναι 3.

[2] Ο 2ος τρόπος εφαρμόζεται μόνο αν έχουμε να εξετάσουμε n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

i) Επειδή $|S_1| = 4$ έπεται ότι τα διανύσματα του S_1 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

ii) Επειδή $(3, 0, -2) \neq \mathbf{0}$ έπεται ότι το διάνυσμα $(3, 0, -2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

iii) Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1(2, 1, 0) + \lambda_2(1, -1, 2) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

από την οποία προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Άρα, τα διανύσματα $(2, 1, 0)$,$(1, -1, 2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

iv) Παρατηρούμε ότι $(3, 0, -2) = (2, 1, 0)+(1, -1, -2)$, άρα τα διανύσματα $(3, 0, -2)$, $(2, 1, 0)$, $(1, -1, -2)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Παρατήρηση: Η ένωση δύο γραμμικώς ανεξάρτητων συνόλων διανυσμάτων δεν είναι απαραίτητα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων. □

Πρόταση 4. *Έστω $(V, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος. Αν για τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in V$ ισχύει ότι*

$$V =< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m >,$$

τότε υπάρχει μια βάση του χώρου αυτού, η οποία αποτελείται από κάποια από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Άσκηση 11. *Να βρεθεί μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ η οποία περιέχει τα διανύσματα $(0, 1, 1, 1)$ και $(1, -1, -1, 0)$.*

Λύση. Προφανώς, τα διανύσματα $(0, 1, 1, 1)$ και $(1, -1, -1, 0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επειδή $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, αρκεί να βρούμε δύο επιπλέον γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Θα αναζητήσουμε αυτά τα δύο διανύσματα μεταξύ των διανυσμάτων της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^4$.

Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $(0,1,1,1),(1,-1,-1,0),\mathbf{e}_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω

$$\begin{aligned}\lambda_1(0,1,1,1)+\lambda_2(1,-1,-1,0)+\lambda_3(1,0,0,0)=\mathbf{0}\Leftrightarrow\\(\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1-\lambda_2,\lambda_1-\lambda_2,\lambda_1)=(0,0,0,0)\end{aligned}$$

τότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases}\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_1-\lambda_2=0\\\lambda_1-\lambda_2=0\\\lambda_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

άρα τα διανύσματα $(0,1,1,1),(1,-1,-1,0),\mathbf{e}_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απομένει να βρούμε άλλο ένα διάνυσμα.

Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $(0,1,1,1),(1,-1,-1,0),\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω

$$\begin{aligned}\lambda_1(0,1,1,1)+\lambda_2(1,-1,-1,0)+\lambda_3(1,0,0,0)+\lambda_4(0,1,0,0)=\mathbf{0}\Leftrightarrow\\(\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4,\lambda_1-\lambda_2,\lambda_1)=(0,0,0,0).\end{aligned}$$

Τότε, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases}\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4=0\\\lambda_1-\lambda_2=0\\\lambda_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0.$$

Άρα, τα διανύσματα $(0,1,1,1),(1,-1,-1,0),\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο $\{(0,1,1,1),(1,-1,-1,0),\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

Αν το διάνυσμα $\mathbf{e}_1$ ή το διάνυσμα $\mathbf{e}_2$ δεν ήταν γραμμικώς ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα, τότε θα δοκιμάζαμε το επόμενο διάνυσμα της κανονικής βάσης. Η θεωρία μας εξασφαλίζει ότι μεταξύ των στοιχείων της κανονικής βάσης θα βρούμε το ζητούμενο σύνολο. $\square$

Άσκηση 12. *Να βρεθεί μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *που περιέχει τα διανύσματα*

$$\mathbf{x} = (-1, 1, 0, 0), \qquad \mathbf{y} = (0, 0, 2, 1).$$

Λύση. Επειδή $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, αρκεί να βρεθούν δύο διανύσματα $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$, τέτοια ώστε το σύνολο $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}\}$ να είναι βάση του χώρου. Τα διανύσματα $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ θα αναζητηθούν μεταξύ των στοιχείων της κανονικής βάσης.

Αρχικά, ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1$. Είναι

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} + \lambda_3 \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\ \Rightarrow &\lambda_1(-1, 1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 2, 1) + \lambda_3(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \\ \Rightarrow &(-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1, 2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0) \\ \Rightarrow &\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Στη συνέχεια, ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Είναι

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} + \lambda_3 \mathbf{e}_1 + \lambda_4 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \\ \Rightarrow &\lambda_1(-1, 1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 2, 1) + \lambda_3(1, 0, 0, 0) + \lambda_4(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \\ \Rightarrow &(-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_4, 2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0) \\ \Rightarrow &\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_1, \lambda_4 = -\lambda_1, \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει άπειρες μη μηδενικές λύσεις, προκύπτει ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Κατόπιν τούτου, ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$. Είναι

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{e}_1 + \lambda_4\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \\
\Rightarrow &\lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,1) + \lambda_3(1,0,0,0) + \lambda_4(0,0,1,0) = (0,0,0,0) \\
\Rightarrow &(-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1, 2\lambda_2 + \lambda_4, \lambda_2) = (0,0,0,0) \\
\Rightarrow &\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του χώρου. □

Άσκηση 13. *Να βρεθεί η διάσταση των παρακάτω διανυσματικών χώρων.*

1. $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$.
2. $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$.
3. $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$.
4. $V_4 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : a + b = c + d\}$.
5. $V_5 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : a = 2b = 3c\}$.

Λύση.

Θα βρούμε μια βάση για κάθε ένα από τους παραπάνω διανυσματικούς χώρους, εκφράζοντας κάθε στοιχείο τους ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της αντίστοιχης βάσης.

1. Έστω $(x, y) \in V_1$. Τότε, επειδή $x - 2y = 0$, έπεται ότι

$$(x, y) = (2y, y) = y(2, 1)$$

άρα κάθε στοιχείο του V_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός του $(2, 1)$. Το σύνολο $\{(2, 1)\}$ είναι μια βάση του V_1. Άρα, $\dim V_1 = 1$.

2. Έστω $(x, y, z) \in V_2$. Τότε, επειδή $x + y = z$, έπεται ότι

$$(x, y, z) = (x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1).$$

Άρα, κάθε στοιχείο του V_2 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 1)$. Τα διανύσματα $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αφού

$$\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 1) = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

οπότε το σύνολο $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ είναι μια βάση του V_2. Άρα, $\dim V_2 = 2$.

3. Έστω $(x, y, z) \in V_3$. Τότε, επειδή $x - 2y = z$, έπεται ότι

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = (2y, y, 0) + (0, 0, z) = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Άρα, κάθε στοιχείο του V_3 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(2, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$, τα οποία είναι προφανώς γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε το σύνολο $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ είναι μια βάση του V_3. Άρα, $\dim V_3 = 2$.

4. Έστω $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V_4$. Τότε, επειδή $a+b=c+d$, έπεται ότι

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άρα, κάθε στοιχείο του V_4 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικώς ανεξάρτητων μητρών $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Επομένως, $\dim V_4 = 3$.

5. Έστω $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V_5$. Τότε, επειδή $a = 2b = 3c$, έπεται ότι

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{3} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{3} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα, κάθε στοιχείο του V_4 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικώς ανεξάρτητων μητρών $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, επομένως $\dim V_5 = 2$. $\square$