

Ασκήσεις στο εσωτερικό γινόμενο

Άσκηση 1.

i) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο W που παράγουν τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 1, 2, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (2, 1, 3, 0)$$

ii) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\mathbf{v} = (0, 1, 4, 1)$ στον χώρο W .

iii) Να εξετασθεί αν το \mathbf{v} είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

iv) Να βρεθεί ένα διάνυσμα \mathbf{v}' το οποίο είναι ορθογώνιο στα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

v) Να βρεθεί το μήκος (η norm) της προβολής του \mathbf{v} πάνω στο χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

Λύση.

i) Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Gram - Schmidt.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|} \mathbf{y}_1 \quad \text{όπου } \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (0, 1, 1, 1)$$

$$\|\mathbf{y}_1\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1).$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|} \mathbf{y}_2 \quad \text{όπου } \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1.$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle &= \left\langle (1, 1, 2, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (1, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbf{y}_2 = (1, 1, 2, 0) - \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} (0, 1, 1, 1) = (1, 0, 1, -1)$$

$$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1).$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|} \mathbf{y}_3, \text{ όπου } \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle &= \left\langle (2, 1, 3, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (2, 1, 3, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle &= \left\langle (2, 1, 3, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (2, 1, 3, 0), (1, 0, 1, -1) \rangle \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_3 &= (2, 1, 3, 0) - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) - \frac{5}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1) \\ &= (2, 1, 3, 0) - \frac{4}{3}(0, 1, 1, 1) - \frac{5}{3}(1, 0, 1, -1) \\ &= (1/3, -1/3, 0, 1/3) = \frac{1}{3}(1, -1, 0, 1).\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{y}_3\| = \frac{1}{3} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}/3} \frac{1}{3}(1, -1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, 1)$$

Τελικά, η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ αποτελείται από τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1).$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1).$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, 1).$$

ii) Επειδή έχουμε υπολογίσει την ορθοκανονική βάση προκειμένου να βρούμε την προβολή P του $\mathbf{v} = (0, 1, 4, 1)$ στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της προβολής:

$$P = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} P &= \frac{6}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 \\ &= 2(0, 1, 1, 1) + (1, 0, 1, -1) \\ &= (1, 2, 3, 1) \end{aligned}$$

Άρα, η προβολή του $\mathbf{v} = (0, 1, 4, 1)$ στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι το διάνυσμα $P = (1, 2, 3, 1)$.

iii) Το $\mathbf{v} = (0, 1, 4, 1)$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ διότι η προβολή $P = (1, 2, 3, 1)$ δεν ισούται με το \mathbf{v} , άρα το \mathbf{v} δεν ανήκει στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, επομένως δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

iv) Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το διάνυσμα $\mathbf{v} - P$.

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - P = (0, 1, 4, 1) - (1, 2, 3, 1) = (-1, -1, 1, 0)$$

Πράγματι,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle (-1, -1, 1, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle (-1, -1, 1, 0), (1, 1, 2, 0) \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_3 \rangle = \langle (-1, -1, 1, 0), (2, 1, 3, 0) \rangle = 0$$

Παρατήρηση: Αν θέλουμε να βρούμε ένα ορθογώνιο διάνυσμα \mathbf{u} σε ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, τότε επιλέγουμε “τυχαία” ένα διάνυσμα \mathbf{v} , βρίσκουμε την προβολή P του \mathbf{v} πάνω στα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ και το ζητούμενο \mathbf{u} ισούται με $\mathbf{v} - P$.

v) Θέλουμε να βρούμε το μήκος του P .

Υπολογίσαμε ότι

$$P = \frac{6}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 1)$$

Άρα,

$$\|P\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{15}.$$

Όμως, ισχύει (θα το δούμε στην επόμενη άσκηση) ότι

$$\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{36}{3} + \frac{9}{3}} = \sqrt{\frac{45}{3}} = \sqrt{15}$$

□

Άσκηση 2. Έστω $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

i) (Ανισότητα Bessel) Ναδειχθεί ότι για κάθε $\mathbf{x} \in V$ ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

Η ισότητα ισχύει αν το \mathbf{x} ανήκει στον χώρο W που παράγουν τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

ii) (Ταυτότητα Parseval)

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle^2, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W.$$

iii)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y} \rangle, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W \text{ και } \mathbf{y} \in V.$$

Λύση.

i) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ ισχύει ότι η προβολή P του \mathbf{x} πάνω στο χώρο που παράγουν τα (ορθοκανονικά διανύσματα) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ δίδεται από τον τύπο

$$P = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Επίσης,

$$\mathbf{x} = P + (\mathbf{x} - P)$$

και τα διανύσματα $P, \mathbf{x} - P$ είναι ορθογώνια.

Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι

$$\|P\|^2 + \|\mathbf{x} - P\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

Άρα, $\|P\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \Leftrightarrow \|P\| \leq \|\mathbf{x}\|$.

Επιπλέον, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια έπεται ότι και τα διανύσματα $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2, \dots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|P\|^2 &= \left\| \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \right\|^2 \\ &= \left\| \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 \right\|^2 + \left\| \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \right\|^2 + \dots + \left\| \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \right\|^2 \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 \|\mathbf{v}_1\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \|\mathbf{v}_n\|^2 \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\|\mathbf{x} - P\|^2 = 0$, δηλαδή $\mathbf{x} = P$, δηλαδή το \mathbf{x} ισούται με την προβολή του, δηλαδή το \mathbf{x} ανήκει στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

ii) Η ταυτότητα του Parseval προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Bessel θεωρώντας $\mathbf{x} \in W$. Τότε $\mathbf{x} = P$ και άρα θα ισχύει η ισότητα οπότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle^2 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

iii) Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y} \rangle, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in W \text{ και } \mathbf{y} \in V.$$

Αφού $\mathbf{x} \in W$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle + \cdots \\ &\quad + \langle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_n \rangle \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση Με βάση την προηγούμενη άσκηση έστω ότι σε κάποιο διανυσματικό χώρο τα διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ εκφράζονται σε μια ορθοκανονική βάση που αποτελείται από 3 διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ως εξής:

$$\mathbf{w}_1 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + (-2)\mathbf{v}_3$$

και

$$\mathbf{w}_2 = 3\mathbf{v}_1 + (-2)\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$$

Τότε

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}.$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{77}.$$

και

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 8 = -7.$$

$$\langle \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle + 2\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = -7 + 2 \cdot 77 = 147.$$

Άσκηση 3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας

$$y = ax + b$$

για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων από τα σημεία

$$A = (1, 3), B = (2, 5), C = (3, 4)$$

είναι ελάχιστο.

Λύση. Η ιδανική ευθεία θα διέρχονταν και από τα 3 σημεία, επόμενως θα ικανοποιούσε τις επόμενες εξισώσεις.

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ a \cdot 2 + b = 5 \\ a \cdot 3 + b = 4 \end{cases}$$

Ισοδύναμα, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Αυτό είναι αδύνατο. Η ζητούμενη βέλτιστη είναι αυτή για την οποία η norm

$$\left\| a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|$$

είναι ελάχιστη.

Υπάρχουν δύο τρόποι να λύσουμε το πρόβλημα:

(1ος τρόπος)

Θεωρούμε την μήτρα A με στήλες τα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, την μήτρα στήλη $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ και την μήτρα $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$A^t A X = A^t B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 14a + 6b = 25 \\ 6a + 3b = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a + 6b = 25 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 3$$

Δηλαδή, η εξίσωση της ευθείας που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων από τα σημεία A , B και C έχει εξίσωση

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Τότε, το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων της ευθείας από τα σημεία A , B , C ισούται με

$$\begin{aligned} \|AX - B\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 7/2 \\ 4 \\ 9/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= (1/2)^2 + (-1)^2 + (1/2)^2 = 3/2 \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε αν μετρήσουμε τις κατακόρυφες αποστάσεις απευθείας:

Για τις κατακόρυφες αποστάσεις: Έστω μια ευθεία με εξίσωση $y = ax + b$ και τα σημεία $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$.

Η κατακόρυφη απόσταση της ευθείας από το σημείο $A(x_0, y_0)$. ισούται με

$$|y_0 - (ax_0 + b)|$$

Η κατακόρυφη απόσταση της ευθείας από το σημείο $B(x_1, y_1)$. ισούται με

$$|y_1 - (ax_1 + b)|$$

Η κατακόρυφη απόσταση της ευθείας από το σημείο $C(x_2, y_2)$. ισούται με

$$|y_2 - (ax_2 + b)|$$

$$\begin{aligned} (3 - ((1/2)1 + 3))^2 + (5 - ((1/2)2 + 3))^2 + (4 - ((1/2)3 + 3))^2 \\ = (-1/2)^2 + 1^2 + (-1/2)^2 \\ = 3/2 \end{aligned}$$

(2ος τρόπος) Θα βρούμε μια ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και έπειτα θα βρούμε την προβολή P του $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και μετά θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Gram-Schmidt στα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|} \mathbf{y}_1 \text{ όπου } \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = (1, 1, 1).$$

$$\|\mathbf{y}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|} \mathbf{y}_2 \text{ όπου } \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1.$$

$$\mathbf{y}_2 = (1, 2, 3) - \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = (-1, 0, 1).$$

$$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).$$

Επομένως, η προβολή του B πάνω στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ (ή ισοδύναμα τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$) δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} P &= \langle B, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle B, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \\ &= \frac{12}{\sqrt{3}} \mathbf{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{v}_2 \\ &= (4, 4, 4) + (-1/2, 0, 1/2) \\ &= (7/2, 4, 9/2) \end{aligned}$$

Τέλος θα λύσουμε το συμβιβαστό σύστημα

$$\begin{cases} a + b = 7/2 \\ 2a + b = 4 \\ 3a + b = 9/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3 \end{cases}$$

□

Άσκηση 4. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\Pi = (x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2$$

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cauchy - Schwarz:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\mathbf{x} = (x + y - 1, 2x - y + 1, y - 5)$$

τότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2 = \Pi$$

Το τέχνασμα είναι να βρούμε ένα διάνυσμα $\mathbf{y} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$ έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ να μην εξαρτάται από τις μεταβλητές x, y .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= a(x + y - 1) + b(2x - y + 1) + c(y - 5) \\ &= (a + 2b)x + (a - b + c)y + b - a - 5c \end{aligned}$$

Άρα, αρκεί να επιλέξουμε τα a, b, c ώστε

$$a + 2b = 0 \text{ και } a - b + c = 0$$

$$a = -2b \text{ και } -3b + c = 0$$

$$a = -2b \text{ και } c = 3b$$

Επιλέγουμε $b = 1$, οπότε $\mathbf{y} = (-2, 1, 3)$.

Τότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 = (b - a - 5c)^2 = (1 - (-2) - 5 \cdot 3)^2 = (-12)^2 = 144.$$

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = (-2)^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 &\leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ 144 &\leq ((x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2) \cdot 14 \end{aligned}$$

Άρα,

$$(x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (y - 5)^2 \geq \frac{144}{14}$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της παράστασης Π ισούται με $\frac{144}{14}$.

(2ος τρόπος) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \Pi &= \left\| \begin{bmatrix} x + y - 1 \\ 2x - y + 1 \\ y - 5 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} x + y \\ 2x - y \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned}$$

Άρα, η ελαχιστοποίηση του Π μπορεί να προκύψει από την λύση του συμβιβαστού συστήματος

$$A^t A X = A^t B$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 5. Δίδεται ο υπόχωρος W του \mathbb{R}^3 με

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$$

- i) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του W .
- ii) Να βρεθεί η προβολή του $\mathbf{v} = (1, 2, 4)$ στον χώρο W .