Περιεχόμενα

Μέρος I

Κεφάλαιο 1

Μήτρες

1.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Έστω F ένα μη κενό σύνολο.

Μήτρα (ή **πίνακας**) **τύπου** $m \times n$, ή $m \times n$ **μήτρα**, **με στοιχεία από το** F, ονομάζεται κάθε απεικόνιση

$$A : [m] \times [n] \to F.$$

Η εικόνα του $(i, j) \in [m] \times [n]$[1] μέσω της απεικόνισης A συμβολίζεται με $\mathbf{a_{ij}}$ αντί για $A(i, j)$ και ονομάζεται **στοιχείο** της μήτρας A.

Παράδειγμα: Η απεικόνιση $A : [2] \times [3] \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} a_{11} &= A(1,1) = 2 \\ a_{12} &= A(1,2) = 5 \\ a_{13} &= A(1,3) = 1 \\ a_{21} &= A(2,1) = 3 \\ a_{22} &= A(2,2) = 3 \\ a_{23} &= A(2,3) = 5 \end{aligned}$$

είναι μια 2×3 μήτρα με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Μια $m \times n$ μήτρα A με στοιχεία $a_{ij} \in F$, (όπου $i \in [m],\ j \in [n]$), **παριστάνεται** διατάσσοντας τα στοιχεία a_{ij} σε m **γραμμές** και n **στήλες** ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα:

Η μήτρα $A : [2] \times [3] \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{matrix} a_{11} = 2 & a_{12} = 5 & a_{13} = 1 \\ a_{21} = 3 & a_{22} = 3 & a_{23} = 5 \end{matrix}$$

παριστάνεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

[1](Υπενθύμιση $[n] = \mathbb{N}_n^* = \{1, 2, \ldots, n\}$).

Στα επόμενα θα ταυτίζουμε μια μήτρα με την αναπαράστασή της.

Το σύνολο όλων των $m \times n$ μητρών με στοιχεία από το F θα το συμβολίζεται με $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$.

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Η διατεταγμένη n-άδα

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in})$$

ονομάζεται ***i*-γραμμή της μήτρας** A και συμβολίζεται με R_i. Το i θα λέγεται **δείκτης** της γραμμής.

Η διατεταγμένη n-άδα

$$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj})$$

ονομάζεται ***j*-στήλη της μήτρας** A και συμβολίζεται με C_j. Το j θα λέγεται **δείκτης** της στήλης.

Στο στοιχείο a_{ij} της μήτρας A, ο πρώτος δείκτης i είναι ο δείκτης της γραμμής R_i στην οποία ανήκει το στοιχείο, ενώ ο δεύτερος δείκτης j είναι δείκτης της στήλης C_j στην οποία ανήκει το στοιχείο.

Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ θα λέμε ότι ο **τύπος** της μήτρας A είναι $m \times n$. Στα επόμενα, θα θεωρούμε $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και θα γράφουμε απλά $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Επίσης, για λόγους συντομίας θα χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς

$$A = [a_{ij}]_{i\in[m],j\in[n]}, \text{ ή } A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

ή απλά

$$A = [a_{ij}]$$

όταν ο τύπος της μήτρας A είναι γνωστός.

Μια γραμμή ή στήλη μιας μήτρας λέγεται **μηδενική** αν όλα τα στοιχεία της είναι ίσα με 0.

Παράδειγμα: Η παρακάτω μήτρα έχει δύο μηδενικές γραμμές (την R_2 και την R_5) και μια μηδενική στήλη (την C_2).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2 Ισότητα μητρών

Δύο μήτρες $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ είναι **ίσες** αν έχουν τον ίδιο τύπο $m \times n$ και ισχύει

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ για κάθε } i \in [m] \text{ και } j \in [n]$$

1.3 Μορφές μητρών

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

(1) Η A λέγεται **μήτρα γραμμή** αν $m = 1$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) Η A λέγεται **μήτρα στήλη** αν $n = 1$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(3) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **μηδενική μήτρα** και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{m\times n}$ αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{2\times 3}.$$

Αν $m = n$ γράφουμε $\mathbb{O}_n$.

(4) Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **ανάστροφη μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και συμβολίζεται με A^t ή A^T, αν $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ και

$$b_{ij} = a_{ji}$$

για κάθε $i \in [n]$ και $j \in [m]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 4},$$

τότε

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 2}.$$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι

$$(A^t)^t = A,$$

δηλαδή η ανάστροφη της ανάστροφης μήτρας της A ισούται με τη μήτρα A.

(5) Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **αντίθετη μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και συμβολίζεται με $-A$, αν $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και

$$b_{ij} = -a_{ij}$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

τότε

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(6) Η μήτρα $B = [b_{ij}]$ λέγεται **συζυγής μήτρα** της $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ και συμβολίζεται με $\overline{A}$ αν $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ και

$$b_{ij} = \overline{a}_{ij}$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 3+3i \\ 6 & -i & 5-4i \end{bmatrix}$$

τότε

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+i & 3-3i \\ 6 & i & 5+4i \end{bmatrix}.$$

1.4 Τετραγωνικές μήτρες

Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ ονομάζεται **τετραγωνική μήτρα** αν $m = n$.
Στην περίπτωση αυτή, αντί για $\mathcal{M}_{n\times n}$ γράφουμε $\mathcal{M}_n$.
Για τις τετραγωνικές μήτρες μόνο έχουμε και τους παρακάτω ορισμούς:

(i) Η **κύρια διαγώνιος** της A αποτελείται από τα στοιχεία a_{ii}, $i \in [n]$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Η **δευτερεύουσα διαγώνιος** της A αποτελείται από τα στοιχεία $a_{i,n-i+1}$, $i \in [n]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\ 1} & \mathbf{a}_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n} \\ \mathbf{a}_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(ii) **Ίχνος της** $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου της και συμβολίζεται με $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, δηλαδή

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Παράδειγμα:

Αν

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 7 \\ \sqrt{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + (-8) + 1 = -6.$$

(iii) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **διαγώνια μήτρα** αν

$$a_{ij} = 0, \text{ για κάθε } i \neq j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε και

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Έτσι στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$$A = \mathrm{diag}(-3, 4, 0).$$

Όμοια,

$$\mathrm{diag}(1,2,0,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση: Το σύνολο των διαγώνιων μητρών τύπου $n \times n$ συνήθως συμβολίζεται με $\mathcal{D}_n$.

(iv) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **μοναδιαία** (ή **ταυτοτική**) **μήτρα** αν είναι διαγώνια μήτρα με $a_{ii} = 1$ για κάθε $i \in [n]$ και συμβολίζεται με I_n.

Παραδείγματα

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(v) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **τριγωνική κάτω** αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i < j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **τριγωνική πάνω** αν

$$a_{ij} = 0 \text{ για κάθε } i > j.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(vi) Η $A = [a_{ij}]$ λέγεται **συμμετρική μήτρα** αν

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A^t = A.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \\ 2 & -4 & 10 & 1 \end{bmatrix} = A^t.$$

(vii) Η A λέγεται **στρεβλά συμμετρική** αν

$$a_{ij} = -a_{ji} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A = -A^t.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A^t.$$

(viii) Η $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ερμιτιανή** αν

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}} \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$A = \overline{A^t}.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix} = \overline{A^t}.$$

(ix) Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **στοχαστική** αν

$$a_{ij} \geqslant 0, \text{ για κάθε } i, j \in [n]$$

και

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \text{ για κάθε } i \in [n],$$

δηλαδή, το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με 1.

Παράδειγμα: Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

είναι στοχαστική.

1.5 Πράξεις μητρών

(1) **Πρόσθεση μητρών**

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την πράξη $+$ ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ ορίζουμε

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Η μήτρα $A + B$ ονομάζεται **άθροισμα** των A και B.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A + B = \begin{bmatrix} -2+1 & 0+4 & 3-5 \\ 1+2 & 4-1 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.1. *Αν $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}$ τότε*

(i) $A + B = B + A$.

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(iii) $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$.

Απόδειξη. Έστω $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$. Τότε

(i)

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A.$$

(ii)

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] \\ &= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) \\ &= A + (B + C)\end{aligned}$$

(iii) Άσκηση. □

Πρόταση 1.2. *Η δομή $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.*

(2) **Αφαίρεση μητρών**

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την πράξη $-$ ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ ορίζουμε

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$, ή ισοδύναμα

$$A - B = A + (-B).$$

Η μήτρα $A - B$ ονομάζεται **διαφορά** των A και B.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε

$$A - B = \begin{bmatrix} -2-1 & 0-4 & 3+5 \\ 1-2 & 4+1 & 7-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

(3) **Πολλαπλασιασμός μήτρας με πραγματικό αριθμό**

Στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}$ ορίζουμε την (εξωτερική) πράξη $\cdot$ (με σύνολο τελεστών το $\mathbb{R}$) ως εξής: Για κάθε $A = [a_{ij}]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = [\lambda a_{ij}]$$

για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$.

Παράδειγμα:

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 4\lambda & -5\lambda \\ 2\lambda & -\lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι,

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -15 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.3. *Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

(i) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

(ii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

(iii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

(iv) $1A = A$.

Απόδειξη. Έστω $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Τότε

(i)

$$\begin{aligned} \lambda(A+B) &= \lambda([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \lambda[a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [\lambda(a_{ij} + b_{ij})] = [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] \\ &= [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = \lambda[a_{ij}] + \lambda[b_{ij}] \\ &= \lambda A + \lambda B. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)A &= (\lambda+\mu)[a_{ij}] = [(\lambda+\mu)a_{ij}] \\ &= [\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] + [\mu a_{ij}] \\ &= \lambda[a_{ij}] + \mu[a_{ij} = \lambda A + \mu A.\end{aligned}$$

(iii) Άσκηση.

(iv) Άσκηση. □

(4) **Γινόμενο μητρών**

Έστω

$$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

και

$$B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times k}.$$

Ονομάζουμε **γινόμενο** της A επί B, και γράφουμε AB, τη μήτρα

$$C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times k},$$

όπου

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\sigma=1}^{n} a_{i\sigma}b_{\sigma j}.$$

Παρατηρήσεις:

Από τον ορισμό του γινομένου μητρών είναι προφανές ότι το γινόμενο AB ορίζεται μόνο αν η μήτρα A έχει τόσες στήλες όσες είναι οι γραμμές της μήτρας B.

Το στοιχείο c_{ij} που δίνεται στην προηγούμενη ισότητα είναι το άθροισμα των n γινομένων $a_{i1}b_{1j}$, $a_{i2}b_{2j}$, …, $a_{in}b_{nj}$ των στοιχείων της i γραμμής της A με τα αντίστοιχα στοιχεία της j στήλης της B.

Παραδείγματα

i) Αν $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}$ και $B = \begin{bmatrix}4\\-5\\6\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}$, τότε ορίζονται τα γινόμενα AB και BA και ισχύει ότι $AB \in \mathcal{M}_{1\times 1}$ και $BA \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ με

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 4 + 2\cdot(-5) + 3\cdot 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\end{bmatrix}$$

και

$$BA = \begin{bmatrix}4\\-5\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 3\\ (-5)\cdot 1 & (-5)\cdot 2 & (-5)\cdot 3\\ 6\cdot 1 & 6\cdot 2 & 6\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 8 & 12\\ -5 & -10 & -15\\ 6 & 12 & 18\end{bmatrix}.$$

ii) Αν $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ και $B = \begin{bmatrix}-5 & 6 & -7\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$, τότε ορίζεται το γινόμενο AB, (αλλά όχι το γινόμενο BA), και ισχύει ότι $AB \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ με

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 6 & -7\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot(-5)+2\cdot 0 & 1\cdot 6+2\cdot 1 & 1\cdot(-7)+2\cdot 2\\ 3\cdot(-5)+4\cdot 0 & 3\cdot 6+4\cdot 1 & 3\cdot(-7)+4\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 8 & -3\\ -15 & 22 & -13\end{bmatrix}.$$

(5) **Δυνάμεις μήτρας**

Αν $A \in \mathcal{M}_n$, ορίζουμε τη **δύναμη** A^m, $m \in \mathbb{N}^*$ ως εξής:

$$A^0 = I_n$$

και

$$A^m = A^{m-1}A$$

για κάθε $m \geqslant 1$.

Πρόταση 1.4. *Για κάθε $A, B, C \in \mathcal{M}_n$, $n, m, k \in \mathbb{N}^*$, ισχύουν οι εξής ιδιότητες, (εφόσον φυσικά οι τύποι των μητρών είναι τέτοιοι ώστε να ορίζονται οι αντίστοιχες πράξεις):*

(i) $AI_n = A = I_nA$.

(ii) $(AB)C = A(BC)$.

(iii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

(iv) $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB)$.

(v) $A(B + C) = AB + AC$.

(vi) $(A + B)C = AC + BC$.

(vii) $A^m A^k = A^{m+k}$.

(viii) $(A^m)^k = A^{mk}$.

Επιπλέον, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.5. *Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(ii) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

(iii) $(AB)^t = B^t A^t$.

Προσοχή! Στον πολλαπλασιασμό μητρών παρατηρούμε τα εξής:

(1) Δεν ισχύει πάντα $AB = BA$.

Παράδειγμα:

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

ενώ

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) Αν η AB είναι μηδενική δεν συνεπάγεται ότι η A ή/και η B είναι μηδενική.

Παράδειγμα:

Ενώ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ έχουμε $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) Αν $A^k = \mathbb{O}$ δεν συνεπάγεται ότι $A = \mathbb{O}_n$.

Παραδείγματα

Ενώ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$, ισχύει ότι $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

και ενώ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}_2$ ισχύει ότι $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(4) Αν $AB = AC$ δεν συνεπάγεται $B = C$.

Παράδειγμα:

Για $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ έχουμε ότι

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

και

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{bmatrix} = AB$$

ενώ $B \neq C$.

1.6 Αντιστροφή μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Η μήτρα $B \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **αντίστροφη** της μήτρας A, αν και μόνο αν

$$AB = BA = I_n.$$

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

τότε είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Δηλαδή

$$AB = BA = I_2,$$

και επομένως, η μήτρα B είναι αντίστροφη της μήτρας A.

Φυσικά, και η μήτρα A είναι αντίστροφη της μήτρας B.

Αν μια μήτρα έχει αντίστροφη μήτρα, τότε λέμε ότι **αντιστρέφεται**, ή ότι είναι **αντιστρέψιμη**, ή **ομαλή**.

Παράδειγμα. *Να εξετασθεί αν η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

αντιστρέφεται.

Λύση. Αν η μήτρα A αντιστρέφεται, τότε υπάρχει

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

τέτοια ώστε

$$AB = BA = I_2.$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}
AB = I_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3b_{11} + 4b_{21} & 3b_{12} + 4b_{22} \\ 5b_{11} + 6b_{21} & 5b_{12} + 6b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 0 \\ 5b_{11} + 6b_{21} = 0 \\ 5b_{12} + 6b_{22} = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3b_{11} + 4b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} \\ 5b_{12} + 6b_{22} = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-\frac{6}{5}b_{21}) + 4b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} \\ 5(-\frac{4}{3}b_{22}) + 6b_{22} = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} \\ -\frac{2}{3}b_{22} = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b_{21} = \frac{5}{2} \\ b_{12} = -\frac{4}{3}b_{22} = (-\frac{4}{3})(-\frac{3}{2}) = 2 \\ b_{11} = -\frac{6}{5}b_{21} = (-\frac{6}{5})\frac{5}{2} = -3 \\ b_{22} = -\frac{3}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(Πράγματι, είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-3) + 4 \cdot \frac{5}{2} & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-\frac{3}{2}) \\ 5 \cdot (-3) + 6 \cdot \frac{5}{2} & 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-\frac{3}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.)$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)\cdot 3 + 2\cdot 5 & (-3)\cdot 4 + 2\cdot 6 \\ \frac{5}{2}\cdot 3 + (-\frac{3}{2})\cdot 5 & \frac{5}{2}\cdot 4 + (-\frac{3}{2})\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Άρα, η B είναι αντίστροφη μήτρα της A και επομένως, η A αντιστρέφεται. □

Παρατήρηση: Υπάρχουν μήτρες που δεν αντιστρέφονται.

Παράδειγμα: Έστω ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αντιστρέφεται. Τότε, υπάρχει

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

ώστε

$$AB = BA = I_2.$$

Αλλά

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Όμοια, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται. (Άσκηση.)

Πρόταση 1.6. *Η αντίστροφη μιας μήτρας, αν υπάρχει, είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω ότι η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ έχει δύο αντίστροφες τις $B, C \in \mathcal{M}_n$. Τότε,

$$AB = BA = I_n$$

και

$$AC = CA = I_n.$$

Άρα

$$C = I_nC = (BA)C = B(AC) = BI_n = B,$$

άτοπο, διότι $B \neq C$. □

Η αντίστροφη της μήτρας A, αν υπάρχει, συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$.

Πρόταση 1.7. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$, με $AB = I_n$. Τότε και $BA = I_n$. Άρα, αν $AB = I_n$, τότε $B = A^{-1}$.*

Παρατήρηση: Για να δειχθεί λοιπόν (για τετραγωνική μήτρα) ότι $B = A^{-1}$ δεν χρειάζεται να δειχθεί και $AB = I_n$ και $BA = I_n$. Αρκεί ένα από τα δύο.

Πρόταση 1.8. *Αν η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ αντιστρέφεται τότε για κάθε $B, C \in \mathcal{M}_{n\times k}$ ισχύει ότι*

$$AB = AC \Rightarrow B = C.$$

Απόδειξη. Αφού η A αντιστρέφεται υπάρχει η αντίστροφή της A^{-1}, οπότε

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow I_nB = I_nC \Rightarrow B = C.$$ □

Παρατηρήσεις:

i) Αντίστοιχα, για την αντιστρέψιμη μήτρα $A \in \mathcal{M}_k$ ισχύει και η ιδιότητα

$$BA = CA \Rightarrow B = C.$$

ii) Προφανώς, $I_n^{-1} = I_n$.

Πρόταση 1.9. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$.*

(i) Αν οι A, B είναι αντιστρέψιμες, τότε και η μήτρα AB είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Γενικότερα, αν οι μήτρες $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n$ είναι αντιστρέψιμες, τότε και η μήτρα $A_1A_2 \cdots A_k$ είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

(ii) Η A είναι αντιστρέψιμη, αν και μόνο αν η A^t είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

(iii) Αν η A είναι αντιστρέψιμη και $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τότε και η λA είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

(iv) Αν η A είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A^m, όπου $m \in \mathbb{N}^*$, είναι αντιστρέψιμη, και είναι

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$

Απόδειξη.

(i) Λόγω της προσεταιριστικότητας, ισχύει ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Άρα, πράγματι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Για τη γενίκευση μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το πλήθος k των μητρών (Άσκηση).

(ii) Έστω ότι η A είναι αντιστρέψιμη. Επειδή $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ και $I_n^t = I_n$ θα είναι

$$(AA^{-1})^t = I_n^t \Leftrightarrow (A^{-1})^tA^t = I_n$$

και

$$(A^{-1}A)^t = I_n^t \Leftrightarrow A^t(A^{-1})^t = I_n.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι η μήτρα $(A^{-1})^t$ είναι η αντίστροφη της A^t. Άρα, η A^t είναι αντιστρέψιμη και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Αντίστροφα, έστω ότι η A^t είναι αντιστρέψιμη. Τότε λόγω του προηγούμενου και η $(A^t)^t = A$ είναι επίσης αντιστρέψιμη.

(iii) Άσκηση.

(iv) Άσκηση. □

Παρατήρηση: Αντί για $(A^m)^{-1}$ ή $(A^{-1})^m$ γράφουμε συνήθως $\mathbf{A^{-m}}$.

Πρόταση 1.10. *Έστω $\mathcal{N}_n$ το σύνολο των αντιστρέψιμων μητρών τύπου n. Η δομή $(\mathcal{N}_n, \cdot)$ είναι ομάδα.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Παρατήρηση: Το σύνολο $\mathcal{N}_n$ συμβολίζεται και με $GL(F, n)$.

1.7 Ειδικές μήτρες

(1) Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **ορθογώνια**, αν και μόνο αν $AA^t = A^tA = I_n$, δηλαδή αν έχει ως αντίστροφη την ανάστροφή της, (δηλαδή αν $A^{-1} = A^t$).

Παράδειγμα:

Οι μήτρες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιες.

$$AA^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

$$BB^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Παρατήρηση: Το σύνολο των ορθογώνιων μητρών τύπου $n \times n$ συμβολίζεται με O_n.

(2) Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **αδύναμη** ή **αυτοδύναμη** αν $A^2 = A$.

Παράδειγμα: Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

είναι αδύναμη.

Πράγματι,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = A.$$

Παρατήρηση: Αν η μήτρα A είναι αδύναμη, τότε ισχύει ότι $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, αν υπάρχει, ονομάζεται **κύριο στοιχείο της γραμμής**.

Παράδειγμα:

Τα κύρια στοιχεία της παρακάτω μήτρας φαίνονται μέσα σε κύκλους.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Η A λέγεται **κλιμακωτή μήτρα** (row echelon form (ref)) αν

(i) Ο δείκτης κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι **μικρότερος** από το δείκτη κάθε μηδενικής γραμμής. (Δηλαδή, όλες οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, βρίσκονται στο κάτω μέρος της μήτρας)

(ii) Σε κάθε δύο μη μηδενικές γραμμές ο δείκτης στήλης του κύριου στοιχείου της κατώτερης γραμμής είναι μεγαλύτερος από το δείκτη στήλης του κύριου στοιχείου της ανώτερης γραμμής, (δηλαδή το κύριο στοιχείο της κατώτερης γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το κύριο στοιχείο της ανώτερης γραμμής).

Παραδείγματα

Οι επόμενες μήτρες είναι κλιμακωτές

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ενώ οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτές.

(4) Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Η A λέγεται **υποβαθμισμένη (ή ανηγμένη) κλιμακωτή μήτρα** (reduced row echelon form (**rref**)) αν η A είναι κλιμακωτή και επιπλέον ισχύουν οι ιδιότητες.

(iii) Αν μια γραμμή έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο, τότε το κύριο στοιχείο της γραμμής ισούται με 1.

(iv) Κάθε στήλη που περιέχει κύριο στοιχείο μιας γραμμής έχει όλα τα άλλα στοιχεία μηδενικά.

Παραδείγματα

Οι επόμενες μήτρες είναι υποβαθμισμένες κλιμακωτές

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ενώ οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

δεν είναι υποβαθμισμένες κλιμακωτές.

1.8 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (στηλών)

Έστω η απεικόνιση $\theta : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα λέμε ότι η θ είναι ένας **στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών (στηλών)** αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, η μήτρα $\theta(A)$:

(i) προκύπτει από την A με εναλλαγή δύο, οποιωνδήποτε, γραμμών (στηλών) της A, ή

(ii) προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (στήλης) της A επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ή

(iii) προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (στήλης) της A επί $\lambda \in \mathbb{R}$ και πρόσθεση αυτής σε μια άλλη γραμμή (στήλη).

Παρατήρηση: Κάθε στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών ονομάζεται και **γραμμοπράξη**.

Έστω $R_1, R_2, \ldots, R_m$ οι γραμμές και $C_1, C_2, \ldots, C_n$ οι στήλες της μήτρας $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα συμβολίζουμε με

$R_i \leftrightarrow R_j$ την εναλλαγή των i και j γραμμών της μήτρας A, όπου $i, j \in [m]$, $i \neq j$.

$R_i \to \lambda R_i$ τον πολλαπλασιασμό της R_i επί $\lambda \in \mathbb{R}^*$, όπου $i \in [m]$.

$R_i \to R_i + \lambda R_j$ την πρόσθεση στην R_i της λR_j, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $i, j \in [m]$, $i \neq j$.

Αντίστοιχα για τις στήλες (με C_i, C_j αντί για R_i, R_j).

Παράδειγμα: Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, τότε:

- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \leftrightarrow R_3$ στην A δημιουργεί την μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \to 3R_2$ στην A δημιουργεί την μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Η εφαρμογή της γραμμοπράξης $R_2 \to R_2 + 2R_3$ στην A δημιουργεί την μήτρα
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις:

(1) Η απεικόνιση θ είναι αμφιμονοσήμαντη. Άρα, ορίζεται και ο αντίστροφος μετασχηματισμός θ^{-1} με
$$\theta(A) = B \Leftrightarrow \theta^{-1}(B) = A.$$

(2) Έστω θ ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών (στηλών), $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και θ^{-1} ο αντίστροφος στοιχειώδης μετασχηματισμός του θ.

(i) Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} A$.

(ii) Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \to \lambda R_i}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{Ri \to \frac{1}{\lambda} R_i}{\sim} A$.

(iii) Αν $\theta(A) = B$ με $A \overset{R_i \to R_i + \lambda R_j}{\sim} B$, τότε $\theta^{-1}(B) = A$ με $B \overset{R_i \to R_i - \lambda R_j}{\sim} A$.

Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Θα λέμε ότι η μήτρα B είναι **R-ισοδύναμη** (αντ. **C-ισοδύναμη**) με την μήτρα A και θα γράφουμε
$$\mathbf{A} \overset{\mathbf{R}}{\sim} \mathbf{B} \text{ (αντ. } \mathbf{A} \overset{\mathbf{C}}{\sim} \mathbf{B})$$
αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία μητρών A_0, A_1, …, A_k έτσι ώστε $A_0 = A$, $A_k = B$ και η μήτρα A_{i+1} προκύπτει από την A_i από κάποιο στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών (αντ. στηλών), για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Παρατήρηση: Προφανώς, από τον ορισμό της R (αντ. C)-ισοδυναμίας προκύπτει ότι ότι αν $A \overset{R}{\sim} B$ (αντ. $A \overset{C}{\sim} B$) τότε υπάρχουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (αντ. στηλών) $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}, \theta_k$ τέτοιοι ώστε
$$\begin{aligned} B &= (\theta_k \circ \theta_{k-1} \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) \\ &= \theta_k(\theta_{k-1}(\cdots \theta_2(\theta_1(A)) \cdots)). \end{aligned}$$

Πρόταση 1.11. *Οι σχέσεις $\overset{R}{\sim}$ και $\overset{C}{\sim}$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο $\mathcal{M}_{m\times n}$.*

Απόδειξη. Άσκηση. ☐

Πρόταση 1.12. *Κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα.*

Παράδειγμα:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \overset{R_4 \to R_4 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \overset{R_4 \to R_4 + 4R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1.13. *Κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ είναι R-ισοδύναμη με μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα.*

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1\to R_1-3R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_3\to -R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 & -30 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1\to R_1+17R_3}{\sim}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2\to R_2-5R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1.14. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα. Αν η μήτρα A δεν έχει μηδενική γραμμή, τότε $A = I_n$.*

1.8.1 Αλγόριθμος του Gauss

Παρακάτω, περιγράφεται αναλυτικά βήμα προς βήμα η διαδικασία που ακολουθείται στα προηγούμενα παραδείγματα, και της οποίας η εφαρμογή μας οδηγεί στη μετατροπή μιας μήτρας σε **υποβαθμισμένη κλιμακωτή μορφή**. Η διαδικασία μετατροπής μιας μήτρας σε **υποβαθμισμένη κλιμακωτή** είναι γνωστή ως **απαλοιφή των Gauss–Jordan**, ενώ η διαδικασία μετατροπής μιας μήτρας απλά σε **κλιμακωτή** είναι γνωστή ως **απαλοιφή του Gauss**.

Έστω $n \times m$ μήτρα $A = [a_{ij}]$. Η απαλοιφή του Gauss για τη μετατροπή της A σε απλή κλιμακωτή μορφή αποτελείται από τα εξής βήματα:

Βήμα 1. Εντοπίζουμε το αριστερότερο και υψηλότερο μη μηδενικό στοιχείο στην μήτρα, δηλαδή ένα στοιχείο $a_{ij} \neq 0$, τέτοιο ώστε τα i, j να είναι όσο το δυνατόν μικρότερα. (Πάντα υπάρχει τέτοιο στοιχείο εκτός αν $A = \mathbf{0}$.)

Εναλλάσσουμε τη γραμμή i με την πρώτη γραμμή του πίνακα. ($R_1 \leftrightarrow R_i$)

Βήμα 2. Αν μετά το βήμα 1, το πρώτο στοιχείο της νέας πρώτης γραμμής είναι a, τότε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $1/a$, δηλαδή δημιουργούμε κύριο στοιχείο (pivot) 1. ($R_1 \to \frac{1}{a}R_1$)

Βήμα 3. Προσθέτουμε πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής στις άλλες γραμμές έτσι ώστε να προκύψουν μηδενικά στοιχεία κάτω από το κύριο στοιχείο 1.

($R_i \to R_i - a_{i1}R_1$, για κάθε i με $a_{i1} \neq 0$)

Βήμα 4. Αγνοούμε την πρώτη γραμμή και εφαρμόζουμε τα βήματα 1-3 στην υπομήτρα που προκύπτει, μέχρις ότου εξαντληθούν οι γραμμές.

Η μήτρα A' που προκύπτει είναι κλιμακωτή.

Εκτελώντας, την ίδια διαδικασία στην A' μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία πάνω από κάθε κύριο στοιχείο 1 και έτσι καταλήγουμε σε μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα. Υπολογιστικά είναι αποδοτικότερο να εφαρμόσουμε την διαδικασία με αντίστροφη φορά, δηλαδή από το τελευταίο στοιχείο της τελευταίας γραμμής και με φορά προς τα πάνω και αριστερά.

Η διαδικασία που περιλαμβάνει και τις δύο παραπάνω φάσεις ονομάζεται απαλοιφή των Gauss-Jordan.
Παρατήρηση: Σημειώνουμε ότι η υποβαθμισμένη κλιμακωτή μορφή μιας μήτρας είναι **μοναδική**. Αυτό δεν συμβαίνει στην κλιμακωτή μορφή, όπου αλλαγή της ακολουθίας των στοιχειωδών πράξεων μπορεί να οδηγήσει σε **διαφορετική κλιμακωτή μήτρα**.

1.9 Στοιχειώδεις μήτρες

Κάθε μήτρα που προκύπτει από την μοναδιαία μήτρα I_n με εφαρμογή **μιας μόνο** στοιχειώδους πράξης γραμμών επί του I_n λέγεται **στοιχειώδης μήτρα**.

Για παράδειγμα, από τη μοναδιαία μήτρα

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

προκύπτουν οι στοιχειώδεις μήτρες

$$I_3 \overset{R_2 \to 3R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 \overset{R_2 \longleftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_3 \overset{R_3 \to R_3 + 3R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.15. *Αν η στοιχειώδης μήτρα E προκύπτει από την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης στοιχειώδους πράξης γραμμών θ στην μοναδιαία μήτρα I_m, και A είναι μια $m \times n$ μήτρα, τότε το γινόμενο EA είναι η μήτρα που προκύπτει όταν η θ εφαρμοσθεί επί της A, δηλαδή $\theta(A) = \theta(I_m)A = EA$.*

Για παράδειγμα, έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και θ ο μετασχηματισμός $R_3 \to R_3 + 3R_1$.

Αν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \theta(I_3),$$

τότε, πράγματι

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix},$$

που είναι ίδια με τη μήτρα που προκύπτει αν στην A προστεθεί στην τρίτη γραμμή το τριπλάσιο της πρώτης.

Άρα,

$$\theta(A) = \theta(I_3)A = EA.$$

Παρατήρηση: Με επαγωγή μπορεί να δειχθεί η γενίκευση της προηγούμενης πρότασης:

Πρόταση 1.16. *Αν $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών, $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ και $E_i = \theta_i(I_n)$, $i \in [k]$, τότε*

$$(\theta_k \circ \theta_{k-1} \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A.$$

Παρατήρηση: Επειδή κάθε στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών θ είναι αντιστρέψιμος και η αντίστοιχη στοιχειώδης μήτρα $E = \theta(I_n)$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της προκύπτει εφαρμόζοντας στην μοναδιαία μήτρα I_n τον αντίστροφο μετασχηματισμό γραμμών.

Για παράδειγμα, αν $E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ τότε επειδή $E = \theta(I_n)$ όπου θ είναι ο μετασχηματισμός $R_1 \to R_1 + 4R_2$ έπεται ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός θ^{-1} είναι ο $R_1 \to R_1 - 4R_2$ επομένως η αντίστροφη μήτρα της E ισούται με $E^{-1} = \theta^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Πρόταση 1.17. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$, $A \neq \mathbb{O}_n$ και $A \overset{R}{\sim} B$, όπου $B \in \mathcal{M}_n$ μια κλιμακωτή μήτρα. Η μήτρα A είναι μη αντιστρέψιμη αν και μόνο αν μια τουλάχιστον γραμμή της B είναι μηδενική.*

Παράδειγμα:

Η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

είναι μη αντιστρέψιμη αφού (όπως είδαμε νωρίτερα) είναι R-ισοδύναμη με την κλιμακωτή μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.18. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(i) Η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη.

(ii) Η μήτρα A είναι R-ισοδύναμη με την μήτρα I_n.

(iii) Η μήτρα A είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μητρών.

Παράδειγμα: Η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη, διότι είναι R-ισοδύναμη με τη μήτρα I_n. Πράγματι,

$$A \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 \to R_1 + R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Επίσης, αφού όπως μόλις δείξαμε, η A είναι αντιστρέψιμη, θα είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μητρών. Πράγματι, ισχύει ότι (άσκηση):

$$A = E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$$

όπου οι μήτρες E_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι οι παρακάτω στοιχειώδεις μήτρες:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to R_2 + R_1}{\sim} E_1),$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to 3R_2}{\sim} E_2),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} E_3),$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_3 \to R_3 + R_2}{\sim} E_4),$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_1 \to R_1 + R_3}{\sim} E_5),$$

Παράδειγμα: Έστω οι στοιχειώδεις μήτρες

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim} E_1),$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}{\sim} E_2),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I_3 \overset{R_1 \to R_1 + 2R_2}{\sim} E_3).$$

Τότε η μήτρα

$$
\begin{aligned}
A &= E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

είναι αντιστρέψιμη.

1.10 Μέθοδος εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ μια αντιστρέψιμη μήτρα.

Τότε $A \stackrel{R}{\sim} I_n$. Άρα υπάρχουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ με

$$(\theta_k \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(A) = I_n,$$

ή, ισοδύναμα (λόγω της Πρότασης 1.16) υπάρχουν στοιχειώδεις μήτρες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ με

$$(E_k \cdots E_2 E_1)A = I_n.$$

Δηλαδή η μήτρα $(E_k \cdots E_2 E_1)$ είναι η αντίστροφη της A.

Άρα,

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 = E_k \cdots E_2 E_1 I_n.$$

Άρα, εφαρμόζοντας και πάλι την Πρόταση 1.16 για τη μήτρα I_n, προκύπτει ότι

$$A^{-1} = (\theta_k \circ \cdots \circ \theta_2 \circ \theta_1)(I_n).$$

Δηλαδή, **οι μετασχηματισμοί** $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ **που μετασχηματίζουν την** A **στην** I_n, **μετασχηματίζουν και την** I_n **στην** A^{-1}.

Έτσι, για να βρούμε την αντίστροφη μιας τετραγωνικής μήτρας A (αν η A είναι αντιστρέψιμη), ή για να αποδείξουμε ότι η A δεν είναι αντιστρέψιμη, γράφουμε τις μήτρες A και I_n, τη μια δίπλα στην άλλη και με κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, που **εκτελούμε ταυτόχρονα και στις δύο μήτρες** A και I_n, μετασχηματίζουμε την A σε μια υποβαθμισμένη κλιμακωτή μήτρα B και την I_n σε μια μήτρα C.

- Αν $B = I_n$, τότε η A είναι αντιστρέψιμη και $A^{-1} = C$.

- Αν $B \neq I_n$, τότε η A δεν είναι αντιστρέψιμη.

Παρατήρηση: Αν στην προσπάθεια μετασχηματισμού της A σε υποβαθμισμένη κλιμακωτή φτάσουμε σε κλιμακωτή μήτρα με μηδενική γραμμή, δεν χρειάζεται να συνεχίσουμε αφού, βάσει της Πρότασης 1.17, γνωρίζουμε ότι η A δεν είναι αντιστρέψιμη.

Παράδειγμα. *Να δειχθεί ότι η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη, και να βρεθεί η αντίστροφή της

Λύση. Εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}}{\sim}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to (-1)R_3}{\sim}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3}}{\sim}$$
$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

□

Παράδειγμα. *Να εξετασθεί αν η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 7R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to -\frac{1}{6}R_3}}{\sim}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{7}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Αφού η κλιμακωτή μήτρα, που δημιουργήθηκε ως R-ισοδύναμη της A, είναι η $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, η οποία έχει μηδενική γραμμή, η A δεν είναι αντιστρέψιμη (βάσει της Πρότασης 1.17). □

1.11 Στοιχειώδεις μήτρες και μετασχηματισμοί στηλών

Κάθε στοιχειώδης μήτρα E που προκύπτει από την εφαρμογή ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών θ επί της μοναδιαίας μήτρας I_n μπορεί να προκύψει και από την εφαρμογή ενός άλλου στοιχειώδους μετασχηματισμού στηλών ϕ επί της μοναδιαίας μήτρας I_n.

Συγκεκριμένα,

- αν θ είναι ο μετασχηματισμός γραμμών $R_i \leftrightarrow R_j$ επί της I_n, τότε για τον μετασχηματισμό στηλών ϕ με $C_i \leftrightarrow C_j$ επί της I_n ισχύει ότι $\theta(I_n) = \phi(I_n)$,
- αν θ είναι ο μετασχηματισμός γραμμών $R_i \to \lambda R_i$ επί της I_n τότε για τον μετασχηματισμό στηλών ϕ με $C_i \to \lambda C_i$ επί της I_n ισχύει ότι $\theta(I_n) = \phi(I_n)$,
- αν θ είναι ο μετασχηματισμός γραμμών $R_i \to R_i + \lambda R_j$ επί της I_n, τότε για τον μετασχηματισμό στηλών ϕ με $C_j = C_j + \lambda C_i$ επί της I_n ισχύει ότι $\theta(I_n) = \phi(I_n)$.

Για παράδειγμα, από τη μοναδιαία μήτρα

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

οι στοιχειώδεις μήτρες που προκύπτουν με τους παρακάτω μετασχηματισμούς γραμμών

$$I_3 \overset{R_2 \to 3R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 \overset{R_2 \longleftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 \overset{R_3 \to R_3 + 3R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

μπορούν να προκύψουν από την I_3 και με τους εξής μετασχηματισμούς στηλών:

$$I_3 \overset{C_2 \to 3C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 \overset{C_2 \longleftrightarrow C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 \overset{C_1 \to C_1 + 3C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Όπως είδαμε οι στοιχειώδεις μήτρες (που αντιστοιχούν σε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών) δρουν σε μια μήτρα με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά. Ενώ, οι στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών για να εκφραστούν με τη βοήθεια πολλαπλασιασμού μητρών δρούν από τα δεξιά όπως φαίνεται και στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.19. *Αν η μήτρα E προκύπτει από την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης στοιχειώδους πράξης στηλών ϕ στη μοναδιαία μήτρα I_n και A μια $m \times n$ μήτρα, τότε το γινόμενο AE είναι η μήτρα που προκύπτει όταν η ϕ εφαρμοσθεί επί της A, δηλαδή $\phi(A) = A\phi(I_n) = AE$.*

Για παράδειγμα, έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και ϕ ο μετασχηματισμός $C_3 \to C_3 + 3C_1$.

Αν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \phi(I_4),$$

τότε, πράγματι

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 9 & 6 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

που είναι ίδια με τη μήτρα που προκύπτει αν στην A προστεθεί στην τρίτη στήλη το τριπλάσιο της πρώτης στήλης.

Άρα,

$$\phi(A) = A\phi(I_4) = AE.$$

Παρατήρηση: Με επαγωγή μπορεί να δειχθεί η γενίκευση της προηγούμενης πρότασης:

Πρόταση 1.20. *Αν $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $E_i = \phi_i(I_n)$, $i \in [k]$, τότε*

$$(\phi_k \circ \phi_{k-1} \circ \cdots \circ \phi_2 \circ \phi_1)(A) = AE_1E_2 \cdots E_{k-1}E_k.$$

1.12 Η LU-ανάλυση μιας τετραγωνικής μήτρας

Έστω A μια τετραγωνική μήτρα $n \times n$.

Γνωρίζουμε[2] ότι η A είναι R-ισοδύναμη με μια $n \times n$ κλιμακωτή μήτρα U. Επειδή η U είναι τετραγωνική έπεται ότι η U είναι και άνω τριγωνική (Upper triangular).

Επίσης, είναι γνωστό[3] ότι υπάρχουν στοιχειώδεις μήτρες $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}, E_k$ ώστε

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = U$$

και επειδή οι στοιχειώδεις μήτρες είναι αντιστρέψιμες έπεται ότι

$$A = (E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}) U$$

Αποδεικνύεται[4] ότι η μήτρα

$$E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$$

είναι κάτω τριγωνική (Lower triangular) αν και μόνο αν κατά τη διαδικασία μετατροπής της A στην U δεν χρησιμοποιήθηκαν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί εναλλαγής γραμμών.

Στην περίπτωση αυτή το γινόμενο $E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$ συμβολίζεται με L, δηλαδή $L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$ οπότε

$$A = LU$$

και λέμε ότι η μήτρα A έχει **LU-ανάλυση**, ή **LU-διάσπαση**, ή **LU-παραγοντοποίηση**.

Πρόταση 1.21. *Για μια τετραγωνική μήτρα A υπάρχει κάτω τριγωνική μήτρα L και άνω τριγωνική μήτρα U ώστε*

$$A = LU$$

αν και μόνο αν η A μπορεί να μετασχηματισθεί με μια R-ισοδύναμη κλιμακωτή μήτρα χωρίς να χρησιμοποιηθεί στοιχειώδης μετασχηματισμός εναλλαγής γραμμών.

Η εύρεση μιας LU-ανάλυσης μιας τετραγωνικής μήτρας A μπορεί να γίνει με μια μέθοδο ανάλογη της εύρεσης της αντίστροφης μιας μήτρας.

Επειδή

$$U = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$$

και

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} = I_n E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1},$$

έπεται ότι οι στοιχειώδεις μήτρες $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}, E_{k-2}$ όταν πολλαπλασιαστούν από τα αριστερά (δρώντας ως μετασχηματισμοί γραμμών) μετασχηματίζουν την A στην U και οι αντίστροφες στοιχειώδεις μήτρες $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_{k-1}^{-1}, E_k^{-1}$ όταν πολλαπλασιαστούν από τα δεξιά (δρώντας ως μετασχηματισμοί στηλών) μετασχηματίζουν την I_n στην L.

Υπενθυμίζουμε ότι η εύρεση της αντίστροφης μια στοιχειώδους μήτρας E_i είναι εύκολη και προκύπτει εφαρμόζοντας την αντίθετη στοιχειώδη πράξη πάνω στη μήτρα I_n.

Έτσι, για να βρούμε την LU-ανάλυση μιας τετραγωνικής μήτρας A (όταν υπάρχει αυτή η ανάλυση), γράφουμε τις μήτρες A και I_n τη μία δίπλα στην άλλη και με κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών (οι οποίοι δεν περιλαμβάνουν εναλλαγές γραμμών) μετασχηματίζουμε την A σε μια άνω τριγωνική μήτρα U και ταυτόχρονα εκτελούμε στην I_n τους μετασχηματισμούς στηλών που αντιστοιχούν στους αντίστροφους μετασχηματισμούς γραμμών που εκτελούμε στην μήτρα A.

[2]Βλέπε Πρόταση 1.12.

[3]Βλέπε Πρόταση 1.16.

[4]Διότι όλες οι στοιχειώδεις μήτρες που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της μετατροπής μιας μήτρας A σε κλιμακωτή μορφή είναι κάτω τριγωνικές, όπως επίσης και οι αντίστροφές τους.

Παράδειγμα. *Να βρεθεί μια LU-ανάλυση για τη μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση. Εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \to \frac{1}{2} R_1}{\sim} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{C_1 \to 2C_1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 1R_1}}{\sim} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{C_1 \to C_1 + 3C_2 \\ C_1 \to C_1 + 1C_3}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to (-1) R_2}{\sim} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{C_2 \to \frac{1}{-1} C_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - 2R_2}{\sim} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{C_2 \to C_2 + 2C_3}{\sim}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = L$$

Άρα,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} = LU.$$ □

Παρατηρήσεις:

1. **Προσοχή!** Στην παραπάνω διαδικασία **δεν πρέπει** να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο που μετατρέπει μια μήτρα σε ανηγμένη κλιμακωτή αλλά μόνο σε κλιμακωτή διότι στην πρώτη περίπτωση η μήτρα L που θα προκύψει **δεν θα είναι πάντοτε** κάτω τριγωνική.

   Για παράδειγμα, αν εφαρμόσουμε στην U τον μετασχηματισμό γραμμών $R_1 \to R_1 - 1R_2$ για να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία της δεύτερης στήλης εκτός από το 1 που βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή, τότε στην L θα εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός στηλών $C_2 \to C_2 + 1C_1$ και θα προκύψει η **όχι κάτω τριγωνική μήτρα**

   $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός γραμμών αντιστοιχεί στη στοιχειώδη μήτρα $E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ η οποία έχει αντίστροφη την (στοιχειώδη) μήτρα $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ η οποία δεν είναι κάτω τριγωνική.

2. Στο προηγούμενο παράδειγμα, όλοι οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών που εφαρμόσθηκαν στην A και οι αντίστροφοί τους που εφαρμόσθηκαν στην I_n αντιστοιχούν σε κάτω τριγωνικές μήτρες.

3. Η LU-ανάλυση μιας μήτρας A, αν υπάρχει, δεν είναι απαραίτητα μοναδική.

   Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν εφαρμόσουμε τον στοιχείωδη μετασχηματισμό $R_1 \to 2R_1$ στην μήτρα U, τότε στην L θα εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός $C_1 \to \frac{1}{2}C_1$ οπότε θα προκύψουν οι εξής νέες μήτρες:

   Η άνω τριγωνική μήτρα $U' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$ και η κάτω τριγωνική μήτρα $L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$ για τις οποίες ισχύει ότι

$$A = L'U'.$$

1.13 Συμπληρωματικές λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1.1. *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$. *Να βρεθούν οι μήτρες:* $-2A$, $A+B$, B^t, AB^t *και* B^tA.

Λύση.

$$-2A = -2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}$$

$$\begin{aligned} AB^t &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 1\cdot 4 + 1\cdot 4 + 3\cdot 8 \\ 0\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 4 & 0\cdot 4 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 36 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^tA &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 0 & 2\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 2\cdot 3 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 3 + 4\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 8\cdot 0 & 4\cdot 2 + 8\cdot(-1) & 4\cdot 3 + 8\cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 14 \\ 3 & 2 & 17 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 1.2. *Αν*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι πίνακες $(AB)^{-1}$ *και* $(A^{-1}B^{-1})^t$.

Λύση.

Ισχύει ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Ισχύει ότι $(A^{-1}B^{-1})^t = (B^{-1})^t(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. □

Άσκηση 1.3. *Να αποδειχθεί ότι $A^2 = A$, όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο $B = 2A^5 - 3A^2 + A$.

Λύση. Πράγματι,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \ldots = A$$

```
import sympy as sp
A = sp.Matrix([[2,-2,-4],[-1,3,4],[1,-2,-3]])
print("A**2:", A**2)
```

Output:

```
A**2: Matrix([[2, -2, -4], [-1, 3, 4], [1, -2, -3]])
```

Επομένως,

$$B = 2A^5 - 3A^2 + A = 2A^5 - 3A + A = 2A^5 - 2A$$

Όμως, $A^5 = A^2A^2A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A$.
Άρα,

$$B = 2A^5 - 2A = 2A - 2A = O$$ □

Παρατήρηση: Η μήτρα A ονομάζεται **αδύναμη** (δεν έχει δύναμη).

Άσκηση 1.4. *Να βρεθούν οι μήτρες C^n, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:*

i) $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ii) $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση.

i) Θα προσπαθήσουμε να εικάσουμε τον τύπο της μήτρας C_1^n υπολογίζοντας μερικές από τις δυνάμεις της.

```
import sympy as sp
n = sp.symbols('n')
C1 = sp.Matrix([[2,1],[0,3]])
print((C1**n).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
[2**n, -2**n + 3**n]
[   0,         3**n]
```

Εικασία: $C_1^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$

Για την απόδειξη του τύπου θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n.

Για $n = 1$ έχουμε ότι $C_1^1 = \begin{bmatrix} 2^1 & 3^1 - 2^1 \\ 0 & 3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = C_1$, άρα ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $C_1^k = \begin{bmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$.

Θα δειχθεί ότι ισχύει και για $n = k + 1$. Πράγματι

$$\begin{aligned} C_1^{k+1} = C_1 \cdot C_1^k &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^k & 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k + 3^k \\ 0 & 3 \cdot 3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3^{k+1} - 2^{k+1} \\ 0 & 3^{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Θα προσπαθήσουμε να εικάσουμε τον τύπο της μήτρας C_2^n υπολογίζοντας μερικές από τις δυνάμεις της.

```python
import sympy as sp
C2 = sp.Matrix([[1,0,1],[0,1,0],[1,0,1]])
for i in range(1,5):
    print("C2**",i,"=")
    print((C2**i).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
C2** 1 =
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[1, 0, 1]
C2** 2 =
[2, 0, 2]
[0, 1, 0]
[2, 0, 2]
C2** 3 =
[4, 0, 4]
[0, 1, 0]
[4, 0, 4]
C2** 4 =
[8, 0, 8]
[0, 1, 0]
[8, 0, 8]
```

Εικασία: $C_2^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$

Για την απόδειξη του τύπου θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n.

Για $n = 1$ έχουμε ότι $C_2^1 = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C_2$, άρα ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $C_2^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix}$.

Θα δειχθεί ότι ισχύει και για $n = k + 1$. Πράγματι

$$C_2^{k+1} = C_2 \cdot C_2^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{bmatrix}.$$

Άρα, ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. □

Άσκηση 1.5. *Να βρεθεί ο τύπος της ακολουθίας a_n όπου*

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

και $a_0 = a_1 = 1$.

Λύση.

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \\ a_{n-1} = 1a_{n-1} + 0a_{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$n = 2$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$n = 3$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$n = 4$

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γενικότερα για $n \geqslant 2$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
import sympy as sp
n = sp.symbols('n')
A = sp.Matrix([[5,-6],[1,0]])
print((A**n).table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
[-2*2**n + 3*3**n, 6*2**n - 6*3**n]
[    -2**n + 3**n, 3*2**n - 2*3**n]
```

Επομένως, μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή ότι,

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} & 6 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-1} \\ -2^{n-1} + 3^{n-1} & 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$a_n = -2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-1} = 2^{n+1} - 3^n.$$ □

Άσκηση 1.6. *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *και* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

i) Να δειχθεί ότι $AB = 7I_2$.

ii) Να υπολογισθεί η μήτρα $(BA)^n$, *όπου* $n \in \mathbb{N}^*$

Λύση.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7I_2$$

$$\begin{aligned} (BA)^n &= \underbrace{(BA)(BA)(BA)\cdots(BA)}_{n \text{ φορές}} \\ &= B\,\underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{n-1 \text{ φορές}}\,A \\ &= B(AB)^{n-1}A \\ &= B(7I_2)^{n-1}A \\ &= B7^{n-1}I_2^{n-1}A = 7^{n-1}BA \\ &= 7^{n-1} \begin{bmatrix} 10 & -3 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 8 & -8 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 1.7. *Να βρεθούν όλες οι μήτρες* $B \in \mathcal{M}_2$ *οι οποίες αντιμετατίθενται με την μήτρα* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Λύση. Έστω $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Θέλουμε να ισχύει:

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 0 \\ c+2d & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, ισοδύναμα

$$\begin{cases} a = a + 2b \\ b = 0 \\ 2a = c + 2d \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2a = c + 2d \end{cases}$$

Άρα, οι μήτρες B που αντιμετατίθενται με την A είναι της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2(a-d) & d \end{bmatrix}, \text{ όπου } a, d \in \mathbb{R}.$$

□

Άσκηση 1.8. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα A^5 είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A είναι επίσης αντιστρέψιμη.*

Λύση. Για να δείξουμε ότι μια μήτρα A είναι αντιστρέψιμη πρέπει να βρούμε μια άλλη μήτρα C ώστε $AC = I_n$.

Επειδή A^5 είναι αντιστρέψιμη υπάρχει μήτρα B ώστε

$$A^5B = I_n \Leftrightarrow AA^4B = I_n$$

οπότε η μήτρα A^4B είναι η αντίστροφη της A, δηλαδή η A είναι αντιστρέψιμη. □

Άσκηση 1.9. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφες των παρακάτω μητρών:*

i) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

ii) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -2 & b & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση.

i) Η μήτρα A_1 αντιστρέφεται ανν η ορίζουσά της είναι μη μηδενική.

Για τον υπολογισμό της ορίζουσας της A_1 χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των οριζουσών καθώς και τον τύπο του αναπτύγματος. Είναι

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 3ης γραμμής και προκύπτει ότι

$$|A_1| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot (-6) - (-2) \cdot 2) = -4 \neq 0.$$

Άρα, η μήτρα A_1 αντιστρέφεται.

Για τον υπολογισμό της αντίστροφής της, χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών και μετασχηματίζουμε τη μήτρα A_1 στη μήτρα I_3 (ταυτόχρονα μετασχηματίζουμε τη μήτρα I_3, εφαρμόζοντας τους ίδιους μετασχηματισμούς, και προκύπτει η αντίστροφη της A_1).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2}{=}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to \frac{1}{2}R_3}{=}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 \to R_1 - 6R_3 \\ R_2 \to R_2 + \frac{5}{2}R_3}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -9/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Άρα, $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -9/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι σωστό πολλαπλασιάζοντας τις δύο μήτρες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -9/4 & -1/2 & 5/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-\frac{9}{4}) + 1 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot \frac{5}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ (-2) \cdot 6 + (-6) \cdot (-\frac{9}{4}) + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) & (-2) \cdot 1 + (-6) \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot 0 & (-2) \cdot (-3) + (-6) \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot (1/2) \\ 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-\frac{9}{4}) + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι για την εύρεση της αντίστροφης μιας μήτρας δεν είναι υποχρεωτική η χρήση του κριτηρίου της ορίζουσας. Αν η μήτρα δεν αντιστρέφεται αυτό θα προκύψει κατά τη διαδικασία μετατροπής της σε ανηγμένη κλιμακωτή, όπου θα εμφανισθούν μηδενικές γραμμές.

ii) Η εύρεση της αντίστροφης της μήτρας A_2 παρουσιάζει τη δυσκολία ότι δεν γνωρίζουμε ποιες είναι οι τιμές των a, b.

Εδώ το κριτήριο της ορίζουσας είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, αλλά η διαδικασία μπορεί να γίνει και χωρίς αυτό, όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\left[\begin{matrix} 1 & a & 3 \\ -2 & b & a \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \overset{R_2 \to R_2 + 2R_1}{=} \left[\begin{matrix} 1 & a & 3 \\ 0 & b+2a & a+6 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right].$$

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν $b + 2a \neq 0$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $R_2 \to \frac{1}{b+2a} R_2$ χωρίς να πάρουμε περιπτώσεις. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα όμως μπορούμε να εναλλάξουμε τις γραμμές 2 και 3 και να συνεχίσουμε τη διαδικασία χωρίς περιπτώσεις:

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} \left[\begin{matrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & b+2a & a+6 \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}\right] \overset{\substack{R_1 \to R_1 - aR_2 \\ R_3 \to R_3 - (b+2a)R_2}}{=}$$
$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+6-2(b+2a) \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2b-3a \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{matrix}\right]$$

Τώρα, προκειμένου να συνεχίσουμε πρέπει οπωσδήποτε να διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $6 - 2b - 3a = 0$, ή ισοδύναμα $b = 3 - \frac{3}{2}a$ τότε η μήτρα A_2 δεν αντιστρέφεται, αφού είναι R-ισοδύναμη με τη μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3-2a \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

η οποία περιέχει μηδενική γραμμή.

Αν $6 - 2b - 3a \neq 0$ τότε έχουμε ότι

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3-2a & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6-2b-3a & 2 & 1 & -b-2a \end{array}\right] \overset{R_3 \to \frac{1}{6-2b-3a} R_3}{=}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3-2a & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a} \end{array}\right] \overset{\substack{R_1 \to R_1 - (3-2a)R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_3}}{=}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a-2b}{6-2b-3a} & -\frac{3-2a}{6-2b-3a} & -\frac{a^2-3b}{6-2b-3a} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{6-2b-3a} & -\frac{2}{6-2b-3a} & \frac{a+6}{6-2b-3a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a} \end{array}\right].$$

Άρα, αν $6 - 2b - 3a \neq 0$ τότε

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a-2b}{6-2b-3a} & -\frac{3-2a}{6-2b-3a} & -\frac{a^2-3b}{6-2b-3a} \\ -\frac{4}{6-2b-3a} & -\frac{2}{6-2b-3a} & \frac{a+6}{6-2b-3a} \\ \frac{2}{6-2b-3a} & \frac{1}{6-2b-3a} & \frac{-b-2a}{6-2b-3a} \end{bmatrix} = \frac{1}{6-2b-3a} \begin{bmatrix} a-2b & 2a-3 & 3b-a^2 \\ -4 & -2 & a+6 \\ 2 & 1 & -b-2a \end{bmatrix}.$$

Ας δούμε, τώρα, τι πληροφορίες μας παρέχει το κριτήριο της ορίζουσας για τη μήτρα A_2 (αναπτύσσοντάς κατά τα στοιχεία της τρίτης γραμμής)

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ -2 & b & a \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & a \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ -2 & b \end{vmatrix} = -1 \cdot (a+6) + 2(b+2a) = 2b + 3a - 6$$

Άρα, επιβεβαιώνουμε και πάλι ότι η μήτρα A_2 αντιστρέφεται αν και μόνο αν $2b + 3a - 6 \neq 0$. Με τη βοήθεια αυτού του κριτηρίου, γνωρίζουμε εξ αρχής ποιες περιπτώσεις πρέπει να διακρίνουμε κατά τη διαδικασία μετατροπής της A_2 σε ανηγμένη κλιμακωτή μήτρα. □

Παρατήρηση: Οι μήτρες δεν είναι μόνο μια δομή αποθήκευσης πληροφορίας, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποίησουν και να λύσουν πολλές κατηγορίες προβλημάτων.

Άσκηση 1.10. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Λύση. Αν τεθεί

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση μητρών

$$AX = B.$$

Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ 2 \cdot x + (-1) \cdot y + 3 \cdot z \\ 1 \cdot x + 2 \cdot x + (-2) \cdot z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x - y + 3z \\ x + 2y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Από την τελευταία ισότητα μητρών προκύπτει το αρχικό σύστημα των τριών εξισώσεων. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση $AX = B$ από τα αριστερά με τη μήτρα

$$C = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Άρα, $x = y = z = 1$. □

Άσκηση 1.11. *Να βρεθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών (και των προσθέσεων) που απαιτούνται για τον υπολογισμό του γινομένου $C = A \cdot B$, όταν οι μήτρες $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ έχουν τύπο*

i) A: $1 \times n$ και B: $n \times 1$.

ii) A: $m \times n$ και B: $n \times k$.

i) A: $1 \times n$ και B: $n \times 1$.

Στην περίπτωση αυτή, το γινόμενο AB είναι μια μήτρα $C = [c_{ij}]$ τύπου 1×1 και

$$c_{11} = \sum_{p=1}^{n} a_{1p} b_{p1}$$

οπότε απαιτούνται n πολλαπλασιασμοί (και $n - 1$ προσθέσεις).

ii) A: $m \times n$ και B: $n \times k$.

Στην περίπτωση αυτή, το γινόμενο AB είναι μια μήτρα $C = [c_{ij}]$ τύπου $m \times k$, άρα έχει $m \cdot k$ στοιχεία.

Ο υπολογισμός κάθε στοιχείου c_{ij} της C γίνεται βάση του τύπου

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$$

άρα, για κάθε στοιχείο απαιτούνται $n - 1$ προσθέσεις και n πολλαπλασιασμοί.

Επομένως, για να βρούμε όλα τα στοιχεία της μήτρας C απαιτούνται $m \cdot n \cdot k$ πολλαπλασιασμοί (και $m \cdot (n-1) \cdot k$ προσθέσεις).

Παραδείγματα:

- αν η A έχει διαστάσεις 5×7 και B έχει διαστάσεις 7×2, τότε η μήτρα AB έχει διαστάσεις 5×2 και για τον υπολογισμό του AB απαιτούνται: $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$ πολλαπλασιασμοί.
- αν η A έχει διαστάσεις 10×30 και B έχει διαστάσεις 30×20, τότε η μήτρα AB έχει διαστάσεις 10×20 και για τον υπολογισμό του AB απαιτούνται: $10 \cdot 30 \cdot 20 = 6000$ πολλαπλασιασμοί.
- αν η A έχει διαστάσεις 10×5, η B έχει διαστάσεις 5×3 και η C έχει διαστάσεις 3×9. Τότε η μήτρα ABC θα έχει διαστάσεις 10×9. Πόσοι πολλαπλασιασμοί χρειάζομαι για να την υπολογίσω;

  Υπάρχουν δύο τρόποι να υπολογισθεί το γινόμενο ABC.

  - 1ος τρόπος: $(AB)C$
    Το (AB) έχει διαστάσεις 10×3 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 5 \cdot 3 = 150$ πολλαπλασιασμοί.
    Το $(AB)C$ έχει διαστάσεις 10×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 3 \cdot 9 = 270$ πολλαπλασιασμοί.
    Συνολικά, με αυτό τον τρόπο απαιτούνται $150 + 270 = 420$ πολλαπλασιασμοί.
  - 2ος τρόπος: $A(BC)$.
    Το (BC) έχει διαστάσεις 5×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $5 \cdot 3 \cdot 9 = 135$ πολλαπλασιασμοί.
    Το $A(BC)$ έχει διαστάσεις 10×9 και για να υπολογισθεί απαιτούνται $10 \cdot 5 \cdot 9 = 450$ πολλαπλασιασμοί.
    Συνολικά, με αυτό τον τρόπο απαιτούνται $135 + 450 = 585$ πολλαπλασιασμοί.

Άσκηση 1.12. *Να βρεθεί ο βέλτιστος τρόπος υπολογισθεί το γινόμενο $A \cdot B \cdot C \cdot D$ των μητρών A, B, C, D με τύπους*
A: 10×4
B: 4×12
C: 12×8
D: 8×20

Λύση. Ο πολλαπλασιασμός μητρών είναι προσεταιριστικός, δηλαδή δεν εξαρτάται από την σειρά που θα γίνουν (ανά δύο) οι πολλαπλασιασμοί.

Υπάρχουν 5 τρόποι να υπολογίσουμε το γινόμενο $A \cdot B \cdot C \cdot D$

- 1ος τρόπος: $((AB)C)D$.

  AB έχει διαστάσεις 10×12 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 12 = 480$ πολλαπλασιασμούς.

  $(AB)C$ έχει διαστάσεις 10×8 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 12 \cdot 8 = 960$ πολλαπλασιασμούς.

  $((AB)C)D$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 8 \cdot 20 = 1600$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 3040 πολλαπλασιασμοί.

- 2ος τρόπος: $(AB)(CD)$.

  AB έχει διαστάσεις 10×12 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 12 = 480$ πολλαπλασιασμούς.

  CD έχει διαστάσεις 12×20 και χρειαζόμαστε $12 \cdot 8 \cdot 20 = 1920$ πολλαπλασιασμούς.

  $(AB)(CD)$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 12 \cdot 20 = 2400$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 4800 πολλαπλασιασμοί.

- 3ος τρόπος: $(A(BC))D$.

  BC έχει διαστάσεις 4×8 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ πολλαπλασιασμούς.

  $A(BC)$ έχει διαστάσεις 10×8 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 8 = 320$ πολλαπλασιασμούς.

  $(A(BC))D$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 8 \cdot 20 = 1600$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 2304 πολλαπλασιασμοί.

- 4ος τρόπος: $A((BC)D)$.

  BC έχει διαστάσεις 4×8 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 8 = 384$ πολλαπλασιασμούς.

  $(BC)D$ έχει διαστάσεις 4×20 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 8 \cdot 20 = 640$ πολλαπλασιασμούς.

  $A((BC)D)$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 20 = 800$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 1824 πολλαπλασιασμοί.

- 5ος τρόπος: $A(B(CD))$.

  CD έχει διαστάσεις 12×20 και χρειαζόμαστε $12 \cdot 8 \cdot 20 = 1920$ πολλαπλασιασμούς.

  $B(CD)$ έχει διαστάσεις 4×20 και χρειαζόμαστε $4 \cdot 12 \cdot 20 = 960$ πολλαπλασιασμούς.

  $A(B(CD))$ έχει διαστάσεις 10×20 και χρειαζόμαστε $10 \cdot 4 \cdot 20 = 800$ πολλαπλασιασμούς.

  Συνολικά, 3680 πολλαπλασιασμοί.

Άρα, ο αποδοτικότερος τρόπος υπολογισμού του γινομένου $ABCD$ είναι $A((BC)D)$.

Παρατήρηση: Μπορούμε να διαπιστώσουμε και πειραματικά την απόδοση των διαφορετικών τρόπων υπολογισμού του γινομένου $ABCD$. (Προκειμένου να γίνουν εμφανέστερες οι διαφορές θα χρησιμοποιήσουμε μήτρες A, B, C, D των οποίων οι διαστάσεις είναι πολλαπλασιασμένες επί 20).

```
import sympy as sp
import datetime
A = sp.ones(200,80) #200 x 80 matrix where every element equals to 1
B = sp.ones(80,240)
C = sp.ones(240,160)
D = sp.ones(160,400)
start = datetime.datetime.now()

R0 = A@B@C@D   #default? ((A@B)@C)@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia0 = finish - start
print("A@B@C@D", diarkeia0)

#1os tropos
start = datetime.datetime.now()
R1 = ((A@B)@C)@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia1 = finish - start
print("((A@B)@C)@D", diarkeia1)

#2os tropos
start = datetime.datetime.now()
R2 = (A@B)@(C@D)
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia2 = finish - start
print("(A@B)@(C@D)", diarkeia2)
```

```
#3os tropos
start = datetime.datetime.now()
R3 = (A@(B@C))@D
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia3 = finish - start
print("(A@(B@C))@D", diarkeia3)

#4os tropos
start = datetime.datetime.now()
R4 = A@((B@C)@D)
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia4 = finish - start
print("A@((B@C)@D)", diarkeia4)

#5os tropos
start = datetime.datetime.now()
R5 = A@(B@(C@D))
finish = datetime.datetime.now()
diarkeia5 = finish - start
print("A@(B@(C@D))", diarkeia5)
```

Output:

```
A@B@C@D 0:00:29.513232
((A@B)@C)@D 0:00:33.169644
(A@B)@(C@D) 0:00:47.781566
(A@(B@C))@D 0:00:24.835258
A@((B@C)@D) 0:00:18.673987
A@(B@(C@D)) 0:00:35.918524
```

□

Άσκηση 1.13. *Μια $n \times n$ μήτρα A ονομάζεται* ***στοχαστική*** *αν τα στοιχεία της είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε γραμμή της A είναι ίσο με 1.*

i) Να δειχθεί ότι μια $n \times n$ μήτρα A με στοιχεία μη αρνητικούς αριθμούς είναι στοχαστική αν και μόνο αν $AX = X$ όπου X είναι η μήτρα στήλη $n \times 1$ της οποίας όλα τα στοιχεία είναι ίσα με 1.

ii) Να δειχθεί ότι το γινόμενο δύο στοχαστικών $n \times n$ μητρών A, B είναι επίσης στοχαστική μήτρα.

i) Έστω $A = [a_{ij}]$ και $X = [x_{i1}]$ όπου $x_{i1} = 1$ για κάθε $i \in [n]$. Η μήτρα $C = AX$ έχει διαστάσεις $n \times 1$ δηλαδή είναι μήτρα στήλη. Το στοιχείο c_{i1} της C ισούται με

$$c_{i1} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}x_{p1} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot 1 = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}$$

δηλαδή το στοιχείο c_{i1} ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της i-οστής γραμμής της A.

- Αν η μήτρα A είναι στοχαστική (δηλαδή τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής της αθροίζουν στο 1) τότε $c_{i1} = 1$ για κάθε $i \in [n]$, άρα $C = X$.
- Αν η μήτρα A δεν είναι στοχαστική (δηλαδή υπάρχει γραμμή με άθροισμα στοιχείων διάφορο του 1) τότε υπάρχει στοιχείο $c_{i1} \neq 1$ για κάποιο $i \in [n]$, άρα $C \neq X$.

ii) Επειδή ο τύπος υπολογισμού οποιουδήποτε στοιχείου του γινομένου δύο μητρών A, B χρησιμοποιεί μόνο πρόσθεση και πολλαπλασιασμό και επειδή οι μήτρες A, B έχουν μη αρνητικά στοιχεία, έπεται ότι και η μήτρα AB έχει επίσης μη αρνητικά στοιχεία.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η μήτρα AB είναι στοχαστική αρκεί να δείξουμε ότι $(AB)X = X$.

Πράγματι, $ABX = A(BX) = AX = X$.

Άρα, η μήτρα AB είναι επίσης στοχαστική μήτρα.

Παρατήρηση: Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια τυχαία στοχαστική μήτρα S από μια τυχαία μήτρα μη αρνητικών αριθμών R διαιρώντας κάθε στοιχείο της R με το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής στο οποίο ανήκει.

```python
import sympy as sp

S = sp.randMatrix(7,7,0,10)
print("A random nonnegative", S.rows, "x", S.cols, "matrix:")
print(S.table(sp.StrPrinter()))
for i in range(S.rows):
    rowsum = 0
    for j in range(S.cols):
        rowsum += S[i,j]
    for j in range(S.cols):
        S[i,j] /= rowsum
print("A random stochastic", S.rows, "x", S.cols, "matrix:")
print(S.table(sp.StrPrinter()))
```

Output:

```
A random nonnegative 7 x 7 matrix:
[3,  4, 0, 8, 10, 1,  7]
[2,  0, 8, 0,  4, 7,  4]
[8,  2, 4, 0,  7, 8,  1]
[6, 10, 0, 9,  6, 6,  7]
[2,  7, 6, 3,  5, 9, 10]
[8, 10, 5, 3,  8, 0,  1]
[4,  3, 6, 3,  8, 5,  6]
A random stochastic 7 x 7 matrix:
[1/11, 4/33,    0, 8/33, 10/33, 1/33, 7/33]
[2/25,    0, 8/25,    0,  4/25, 7/25, 4/25]
[4/15, 1/15, 2/15,    0,  7/30, 4/15, 1/30]
[3/22, 5/22,    0, 9/44,  3/22, 3/22, 7/44]
[1/21,  1/6,  1/7, 1/14,  5/42, 3/14, 5/21]
[8/35,  2/7,  1/7, 3/35,  8/35,    0, 1/35]
[4/35, 3/35, 6/35, 3/35,  8/35,  1/7, 6/35]
```

1.14 Ασκήσεις προς επίλυση

1. (Αντιστροφή μήτρας) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφες των παρακάτω μητρών:

   i) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   ii) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

   iii) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

   iv) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   v) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 2a \\ 1 & 4 & 3a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

   vi) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

   vii) $A_7 = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 12 & -8 & 9 \\ -9 & 8 & 12 & 0 \\ -8 & -9 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

   viii) $A_8 = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 & 0 \\ 24 & 17 & 7 & 0 \\ -32 & 10 & 6 & 0 \\ 16 & 14 & 10 & 1 \end{bmatrix}$.

   ix) $A_8 = \begin{bmatrix} 18 & -38 & 7 & -37 \\ 7 & 21 & -26 & -28 \\ 73 & 81 & 17 & -49 \\ 19 & -43 & -49 & -47 \end{bmatrix}$.

2. (Μήτρες Hilbert) Να βρεθούν οι αντίστροφες των παρακάτω μητρών, που ονομάζονται **μήτρες Hilbert**.

   $$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

   $$H_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

3. (Δυνάμεις μήτρας) Να βρεθούν οι μήτρες B^n, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

   i) $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   ii) $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   iii) $B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   iv) $B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$.

   v) $B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   vi) $B_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   vii) $B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   viii) $B_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   ix) $B_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   x) $B_{10} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$.

   xi) $B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   xii) $B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Σε κάθε περίπτωση, η εικασία σας να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

4. (Μήτρα στροφής) Αν $A = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$ να δειχθεί ότι

   $$A^n = \begin{bmatrix} \cos na & -\sin na \\ \sin na & \cos na \end{bmatrix},$$

   για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

5. (Ειδικές μήτρες)

   i) Αν $A, B \in \mathcal{M}_n$ με $AB = BA = O_n$, να δειχθεί ότι $(A+B)^\nu = A^\nu + B^\nu$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

   ii) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ και $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, να υπολογισθούν οι μήτρες A^ν, B^ν και C^ν, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

6. (Διαγώνιες μήτρες) Έστω A, B διαγώνιες μήτρες με $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ και $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

   i) Να δειχθεί ότι $A^t = A$.

   ii) Να δειχθεί ότι αν $A^n = [c_{ij}]$ τότε $c_{ij} = a_{ij}^n$.

   iii) Να εξετασθεί πότε η A αντιστρέφεται και να βρεθούν τα στοιχεία c_{ij} της A^{-1}.

   iv) Να δειχθεί ότι οι μήτρες $A + B$, $A - B$, AB είναι επίσης διαγώνιες μήτρες.

7. (Αντιμετάθεση μητρών) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Σε ποια περίπτωση ισχύει η ταυτότητα $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

   Επίσης, πότε ισχύει η ταυτότητα $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$;

8. (Αντιμετάθεση μητρών) Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}_n$. Αν $AC = CA$ και $BC = CB$ να δειχθεί ότι

   $$C(AB + BA) = (AB + BA)C.$$

9. (Αντιμετάθεση μητρών) Έστω $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Αν $ABCD = I$ να δειχθεί ότι

   $$ABCD = DABC = CDAB = BCDA = I.$$

10. (Πράξεις μητρών) Έστω A, B, C μήτρες τύπου $n \times n$. Ορίζουμε $A * B = AB - BA$.

    Να δειχθεί ότι $A * A = O_n$ και

    $(A * B) * C + (B * C) * A + (C * A) * B = O_n$.

11. (Ορθογώνια μήτρα) Να εξετασθεί αν η μήτρα

    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

    είναι ορθογώνια.

12. (Ορθογώνιες μήτρες) Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}_n$.

    i) Να δειχθεί ότι αν η A είναι ορθογώνια τότε και η μήτρα A^{-1} είναι ορθογώνια.

    ii) Να δειχθεί ότι αν A, B είναι ορθογώνιες τότε και η μήτρα AB είναι ορθογώνια.

    iii) Να δειχθεί ότι αν $AB = BA$ και C είναι ορθογώνια, τότε οι μήτρες C^tAC και C^tBC αντιμετατίθεται.

13. (Συμμετρικές μήτρες) Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός διαφορετικών στοιχείων που μπορεί να έχει μια συμμετρική $n \times n$ μήτρα A.

14. (Συμμετρικές μήτρες) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$.

    i) Να δειχθεί ότι οι μήτρες AA^t και A^tA είναι συμμετρικές.

    ii) Να δειχθεί ότι αν η μήτρα A είναι συμμετρική τότε και η μήτρα B^tAB είναι συμμετρική.

15. (Ίχνος μήτρας) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$.

    i) Να δειχθεί ότι $tr(A+B) = tr(A)+tr(B)$ και $tr(AB) = tr(BA)$.

    ii) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $AX - XA = I_n$ είναι αδύνατη.

16. (Εξισώσεις με μήτρες)

    i) Έστω $A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & a \end{bmatrix}$, όπου $a \neq 0$.
    Να βρεθούν όλες οι μήτρες B ώστε $A_1B = BA_1$.

    ii) Έστω $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, όπου $ab \neq 0$.
    Να βρεθούν όλες οι μήτρες B ώστε $A_2B = BA_2$.

    iii) Έστω $A_3 = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$, όπου $ab \neq 0$.
    Να βρεθούν όλες οι μήτρες B ώστε $A_3B = BA_3$.

    iv) Να προσδιορισθούν όλες οι αδύναμες μήτρες $A_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

    v) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε η μήτρα $A_5 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ να είναι ορθογώνια.

17. (Αντιπαραδείγματα)

    i) Να δοθεί ένα παράδειγμα δύο μη διαγώνιων μητρών A, B για τις οποίες η μήτρα AB είναι διαγώνια.

    ii) Να δοθεί ένα παράδειγμα τριών μητρών A, B, C για τις οποίες $tr(ABC) \neq tr(ACB)$.

    iii) Να δοθεί ένα παράδειγμα μητρών A, B τύπου 2×2 ώστε $AB = O_2$ και $BA \neq O_2$.

    iv) Να δοθεί ένα παράδειγμα μη μηδενικών μητρών A, B τύπου 2×2 για τις οποίες $A + B = AB$.

18. (Ειδικές μήτρες) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν $A + B = AB$ τότε

    (i) $(A - I_n)(B - I_n) = (B - I_n)(A - I_n)$,

    (ii) $AB = BA$.

19. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα AB είναι αντιστρέψιμη, τότε και οι μήτρες A, B είναι επίσης αντιστρέψιμες.

20. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα A^4 είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα A είναι επίσης αντιστρέψιμη.

21. (Αδύναμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ και $A \neq I_n$. Να δειχθεί ότι αν A είναι αδύναμη, τότε η A δεν αντιστρέφεται.

22. (Αυτοαντίστροφες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Η μήτρα A ονομάζεται **αυτοαντίστροφη** αν $A^2 = I_n$.

    (i) Να δειχθεί ότι αν η A είναι αδύναμη, τότε η μήτρα $2A - I_n$ είναι αυτοαντίστροφη.

    (ii) Να δειχθεί ότι αν η A είναι αυτοαντίστροφη, τότε η μήτρα $(A + I)/2$ είναι αδύναμη.

23. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}^*$ ώστε $A^k = O_n$, τότε η μήτρα $A + I$ είναι αντιστρέψιμη.

24. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ με $A^2 = A - I_n$. Να δειχθεί ότι οι μήτρες A και $A - 2I_n$ είναι αντιστρέψιμες.

25. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ με $A^2 + 2A - 3I_n = O_n$.

    (i) Να δειχθεί ότι οι μήτρες A, $A + 2I$ είναι αντιστρέψιμες.

    (ii) Να δειχθεί ότι η μήτρα $A - kI$ είναι αντιστρέψιμη για κάθε $k \neq 1, 3$.

26. (Αντιστρέψιμες μήτρες) Έστω A, B αντιστρέψιμες $n \times n$ μήτρες. Να δειχθεί ότι

    (i) $(I_n - B^{-1}AB)^{-1} = B^{-1}(I_n - A)B$.

    (ii) $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(B + A)B^{-1}$.

    (iii) $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$.

27. (Συμμετρικές μήτρες) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι η μήτρα $A + A^t$ είναι συμμετρική, ενώ η μήτρα $A - A^t$ είναι αντισυμμετρική.

28. (Ανάλυση μητρών σε άθροισμα) Να δειχθεί ότι κάθε τετραγωνική μήτρα γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα μιας συμμετρικής και μιας στρεβλά συμμετρικής μήτρας.

29. (Άθροισματα στηλών και γραμμών) Να εξετασθεί αν είναι δυνατό να κατασκευασθεί μια $n \times n$ μήτρα με τις παρακάτω ιδιότητες:

    α) το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής της να είναι θετικό.

    β) το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης της να είναι αρνητικό.

30. (Πολυπλοκότητα πολλαπλασιασμού μητρών)

    i) Να υπολογισθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που πρέπει να κάνουμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο μιας μήτρας A τύπου $1 \times n$ με μια μήτρα B τύπου $n \times 1$.

    ii) Να υπολογισθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που πρέπει να κάνουμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο μιας μήτρας A τύπου $m \times n$ με μια μήτρα B τύπου $n \times k$.

31. (Cayley - Hamilton για 2×2 μήτρες) Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   i) Να δειχθεί ότι η A ικανοποιεί την εξίσωση $A^2 - 4A + 5I = O$.

   ii) Να δειχθεί ότι η μήτρα A^n (όπου $n \geqslant 2$) μπορεί να γραφεί με την μορφή $A^n = a_n A + b_n I_2$.

   iii) Να δειχθεί ότι $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ και $b_{n+1} = -5a_n$.

   iv) Να υπολογισθούν οι μήτρες A^3, A^4, A^5.

   v) Να υπολογισθεί η μήτρα A^{-1}.

32. (Τεχνάσματα μητρών) Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

   (i) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι
$$A^{n+2} - A^n = A^2 - I_n.$$

   (ii) Να βρεθεί η μήτρα A^{2016}.

33. (LU-ανάλυση μήτρας) Να βρεθεί, αν υπάρχει, μια LU-ανάλυση για τις παρακάτω μήτρες:

   i) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

   ii) $A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 5 & 26 & 35 \\ 3 & 14 & 25 \end{bmatrix}$

   iii) $A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -6 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 6 & -10 \end{bmatrix}$

   iv) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   v) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   vi) $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Σημείωση: Οι επόμενες ασκήσεις απαιτούν γνώσεις από το κεφάλαιο των αλγεβρικών δομών.

34. (Ορθογώνιες μήτρες) Έστω O_n το σύνολο των ορθογωνίων μητρών. Να δειχθεί ότι σύνολο O_n εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού μητρών είναι ομάδα.

35. (Ομάδα Pauli) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των επόμενων μητρών αποτελεί ομάδα ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού μητρών:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$
$$G = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

η οποία ονομάζεται ομάδα του Pauli.

Κεφάλαιο 2

Ορίζουσες

2.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n.$$

Ορίζουσα της μήτρας A λέγεται το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

όπου S_n είναι το σύνολο των μεταθέσεων του $[n]$ και συμβολίζεται με $\det(A)$ ή $D(A)$ ή $|A|$.

Έτσι, η ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\det(A)$, ή $D(A)$, ή $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Αν $A \in \mathcal{M}_n$, η $\det(A)$ λέγεται **ορίζουσα τάξης** n. Προφανώς, στην περίπτωση όπου $n = 1$ και $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ ορίζουμε $\det(A) = a$.

Το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

έχει $n!$ προσθετέους, όσες και οι μεταθέσεις του S_n.

Κάθε προσθετέος είναι γινόμενο n στοιχείων της μήτρας, που κάθε ένα είναι στοιχείο μιας μόνο γραμμής και μιας μόνο στήλης.

Το ε_σ (ή $\operatorname{sgn}(\sigma)$) καθορίζει το πρόσημο κάθε προσθετέου, αφού

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι άρτια.} \\ -1, & \text{αν η } \sigma \text{ είναι περιττή.} \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι μια μετάθεση λέγεται **άρτια** (αντ. **περιττή**) αν γράφεται ως γινόμενο άρτιου (αντ. περιττού) πλήθος αντιμεταθέσεων. (Η ταυτοτική μετάθεση θεωρείται άρτια.)

Παραδείγματα

1. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$
Τότε
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}.$$
Αλλά,
$$S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$
όπου
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Η (ταυτοτική) μετάθεση σ_1 είναι άρτια, ενώ η $\sigma_2 = (12)$ είναι περιττή. Επομένως, $\varepsilon_{\sigma_1} = 1$ και $\varepsilon_{\sigma_2} = -1$.

Άρα,
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = \varepsilon_{\sigma_1} a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \varepsilon_{\sigma_2} a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

2. Έστω
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$
Τότε
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$
Αλλά, $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ όπου
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{(ταυτοτική)} & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23), \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12), & \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (13)(12), \\ \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (12)(13), & \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13), \end{aligned}$$
και
$$\begin{aligned} \varepsilon_{\sigma_1} = \varepsilon_{\sigma_4} = \varepsilon_{\sigma_5} &= 1, \\ \varepsilon_{\sigma_2} = \varepsilon_{\sigma_3} = \varepsilon_{\sigma_6} &= -1. \end{aligned}$$
Άρα
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{33}.$$

Παρατήρηση:

Σύμφωνα με τον ορισμό της ορίζουσας, η εύρεση της $\det(A)$ απαιτεί τον προσδιορισμό όλων των μεταθέσεων του συνόλου S_n, την εύρεση του ε_σ για κάθε $\sigma \in S_n$, την εύρεση των $n!$ γινομένων $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ και τέλος την εύρεση του αθροίσματος αυτών!

Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε μια επιπλέον μέθοδο εύρεσης της ορίζουσας, λιγότερο περίπλοκη και λιγότερο χρονοβόρα.

Με τη μέθοδο αυτή, η εύρεση της ορίζουσας n τάξης, ανάγεται στην εύρεση οριζουσών $n-1$ τάξης.

2.2 Υπομήτρα μήτρας

Έστω η μήτρα $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, δηλαδή η απεικόνιση $A : [m] \times [n] \to F$, όπου $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Θα λέμε **υπομήτρα** της μήτρας A κάθε περιορισμό της απεικόνισης A στο $L \times K$, όπου $\varnothing \neq L \subseteq [m]$ και $\varnothing \neq K \subseteq [n]$.

Η παράσταση μιας υπομήτρας της μήτρας A προκύπτει με την διαγραφή κάποιων γραμμών ή/και στηλών, από τις γραμμές ή/και τις στήλες της A.

Παράδειγμα: Αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}$$

τότε η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

που προκύπτει με διαγραφή της γραμμής R_3 και των στηλών C_2, C_4, C_5 είναι υπομήτρα της A και συμβολίζεται με $A_{1,2}^{1,3}$. Εδώ $L = \{1,2\} \subset [3]$ και $K = \{1,3\} \subset [5]$.

Προφανώς, τα L και K δείχνουν τις γραμμές και στήλες της A που δεν διαγράφονται (αν και τελικά, συνήθως, χάνουν κάποια στοιχεία τους λόγω της διαγραφής άλλων στηλών και γραμμών).

Ονομάζουμε **υποορίζουσα** της $\det(A)$ οποιαδήποτε ορίζουσα μιας (προφανώς τετραγωνικής) υπομήτρας της A.

2.3 Ανάπτυγμα ορίζουσας

Έστω $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n$, $n \geqslant 2$. Έστω M_{ij} η $(n-1)\times(n-1)$ υπομήτρα της A που προκύπτει με διαγραφή της i γραμμής και j στήλης.

Η $\det(M_{ij})$ λέγεται **ελάσσων ορίζουσα** του στοιχείου a_{ij} και συμβολίζεται με D_{ij}.

Αλγεβρικό συμπλήρωμα A_{ij} του στοιχείου a_{ij} ονομάζεται το γινόμενο

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}.$$

Παράδειγμα: Έστω η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_5.$$

Τότε

$$M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4,$$
$$D_{13} = \det(M_{13})$$

και

$$A_{13} = (-1)^{1+3} D_{13} = D_{13}.$$

Όμοια

$$M_{34} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4,$$
$$D_{34} = \det(M_{34})$$

και

$$A_{34} = (-1)^{3+4} D_{34} = -D_{34}.$$

Πρόταση 2.1. *Έστω $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n$. Τότε, για κάθε $i, j \in [n]$ ισχύει ότι*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

καθώς επίσης και

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Η πρώτη ισότητα λέγεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της i γραμμής**, ενώ η δεύτερη λέγεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της j στήλης**.

Παραδείγματα

1. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = -4.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1.$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (0-4) - 1 \cdot (-4+2) + 3 \cdot (8-0) = 18.$

   (Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.)

   $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4(-1-6) - 2(4+1) = 18.$

   (Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(-4+2) - 2(4-12) = 18.$$

(Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.)

5.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (45-48) - 2 \cdot (36-42) + 3 \cdot (32-35) \\ &= -3 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0. \end{aligned}$$

(Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.)

6.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) - 2 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + 3 \cdot \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2) \cdot (3 \cdot 7 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4)) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 5) + 3 \cdot (2 \cdot (-4) - 2 \cdot 0) \\ &= -2 \cdot 10 - 2(-8) + 3(-8) = -20 + 16 - 24 = -28. \end{aligned}$$

(Ανάπτυγμα της αρχικής 4×4 ορίζουσας κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής και μετά, ανάπτυγμα των τριών 3×3 οριζουσών κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, της πρώτης στήλης και της πρώτης στήλης αντίστοιχα.)

Πρόταση 2.2. *Έστω* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$, $p, q \in [n]$ *και* $p \neq q$. *Τότε*

$$a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + \cdots + a_{pn}A_{qn} = 0,$$

και

$$a_{1p}A_{1q} + a_{2p}A_{2q} + \cdots + a_{np}A_{np} = 0.$$

2.3.1 Κανόνας του Sarrus

Για τον υπολογισμό των **3 × 3 οριζουσών**, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο παρακάτω πρακτικός τρόπος: Αντιγράφουμε τις δύο πρώτες στήλες μετά την ορίζουσα, και παίρνουμε τα γινόμενα όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα:

$$\begin{array}{|ccc|cc} + & + & + & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1,$$

το οποίο **είναι** το ανάπτυγμα της 3×3 ορίζουσας.

Παράδειγμα:

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccccc} - & - & - & & \end{array} \end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot (-1)(-2) - 5 \cdot 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 \cdot 2 - (-3)(-1) \cdot 3 \\
&= -12 + 60 + 2 - 10 + 16 - 9 = 47.
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση: Τονίζουμε ότι ο παραπάνω πρακτικός τρόπος, που ονομάζεται **κανόνας του Sarrus**, μπορεί να εφαρμοστεί **μόνο για 3×3 ορίζουσες**.

2.4 Ιδιότητες των οριζουσών

Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$. Ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες.

(1) $\det(I_n) = 1$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

(2) $\det(A) = \det(A^t)$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$

(3) Αν A' είναι η μήτρα που προκύπτει από την A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε

$$\det(A') = -\det(A).$$

Προφανής συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι αν A' είναι η μήτρα που προκύπτει από την A με p διαδοχικές εναλλαγές γραμμών, τότε

$$\det(A') = (-1)^p \det(A).$$

Παραδείγματα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-8) = 8.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 8 = 8.$$

(4) Αν δύο γραμμες μιας μήτρας A είναι ίσες, τότε $\det(A) = 0$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

(5) Αν A' είναι η μήτρα που προκύπτει από την A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής της A επί $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\det(A') = \lambda \det(A).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 = 24.$

(6) Αν η μήτρα A έχει μηδενική γραμμή, τότε $\det(A) = 0$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

(7) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 8 = 64.$

(8) Έστω A' η μήτρα που προκύπτει από την A αν σε μια γραμμή της A προσθέσουμε μια άλλη γραμμή της A πολλαπλασιασμένη επί $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\det(A') = \det(A).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8$, αφού η R_2 της πρώτης ορίζουσας ισούται με $R_2 + 2R_1$ της δεύτερης.

(9) Αν μια γραμμή της μήτρας A είναι γραμμικός συνδυασμός k άλλων γραμμών, $(k < n)$, τότε $\det(A) = 0$.

Προφανής συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι ότι αν R_i, R_j δύο γραμμές της μήτρας A και $R_i = \lambda R_j$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\det(A) = 0$.

Παραδείγματα

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, αφού $R_2 = 2R_1 + 3R_3$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, αφού $R_2 = 2R_1$.

(10) Αν

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{ij} + c_{ij} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ & \ddots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ & \ddots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ & \ddots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

τότε

$$\det(A) = \det(A_1) + \det(A_2).$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8.$

Παρατηρήσεις:

(1) Από τις προηγούμενες ιδιότητες προκύπτουν οι εξής κανόνες:
Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ και θ στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών με $\theta(A) = A'$. Τότε,

- i) Αν $A \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim} A'$, τότε $\det(A') = -\det(A)$.
- ii) Αν $A \overset{R_i \to kR_i}{\sim} A'$, τότε $\det(A') = k\det(A)$.
- iii) Αν $A \overset{R_i \to R_i + kR_j}{\sim} A'$, τότε $\det(A') = \det(A)$.

(2) Λόγω της ιδιότητας (2), είναι προφανές ότι όλες οι ιδιότητες, που αναφέρονται σε γραμμές εξακολουθούν να ισχύουν αν αναφερθούν αντίστοιχα σε στήλες.

2.5 Ορίζουσα τριγωνικής μήτρας

Πρόταση 2.3. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ με $A = [a_{ij}]$. Αν η A είναι άνω ή κάτω τριγωνική τότε*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(-2)3 = -12.$

Παρατήρηση: Η παραπάνω πρόταση σε συνδυασμό με τις προηγούμενες ιδιότητες μας δίνει άλλη μια μέθοδο υπολογισμού της ορίζουσας μιας τετραγωνικής μήτρας χωρίς την χρήση του ορισμού ή του αναπτύγματος.

Παράδειγμα. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα της μήτρας* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Λύση. Ισχύει ότι $\det(A) \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot (-2) = 8.$ □

Παράδειγμα. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Λύση.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 + 2R_2}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότ. 5}}{=} -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_4 \to R_4 - 4R_3}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -9.$$ □

Παράδειγμα. *Να λυθεί η εξίσωση* $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = 0$, *όπου* a, b *είναι πραγματικές παράμετροι.*

Λύση. Αν D η ορίζουσα τότε

$$D \overset{R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{=} \begin{vmatrix} 2x+a+b & 2x+a+b & 2x+a+b & 2x+a+b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότ. 5}}{=} (2x+a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_4 \to C_4 - C_1}}{=}$$

$$= (2x+a+b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & b-x & 0 \\ x & b-x & a-x & 0 \\ b & x-b & x-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (2x+a+b)(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a-x & b-x \\ x & b-x & a-x \end{vmatrix}$$

$$= (2x+a+b)(a-b) \begin{vmatrix} a-x & b-x \\ b-x & a-x \end{vmatrix}$$

$$= (2x+a+b)(a-b)((a-x)^2 - (b-x)^2)$$

$$= (2x+a+b)(a-b)(a-x+b-x)(a-x-b+x)$$

$$= (2x+a+b)(a-b)(a+b-2x)(a-b) = (a-b)^2(a+b+2x)(a+b-2x).$$

Άρα,

- Αν $a = b$, τότε $D = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν $a \neq b$, τότε $D = 0 \Leftrightarrow (a+b+2x)(a+b-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2}, \text{ ή} \\ x = -\frac{a+b}{2}. \end{cases}$ □

2.6 Ορίζουσα γινομένου

Πρόταση 2.4. *Έστω* $A, B \in \mathcal{M}_n$. *Τότε* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Πρόταση 2.5 (Κριτήριο αντιστρεψιμότητας). *Έστω* $A \in \mathcal{M}_n$. *Η* A *είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν* $\det(A) \neq 0$.

2.7 Συμπληρωματική μήτρα

Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n$ και A_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} της μήτρας A. Τότε, η μήτρα

$$[A_{ij}]^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & & \ddots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

λέγεται **συμπληρωματική** της μήτρας A και συμβολίζεται με $\mathrm{adj}A$.
Παραδείγματα

(1) Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, τότε

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2}(-1) = (-1)(-1) = 1, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, τότε $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$, κ.ο.κ.

Άρα,

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -13 & 10 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 2.6. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Τότε,*

(i) $A \cdot \mathrm{adjA} = \mathrm{adjA} \cdot \mathrm{A} = \det(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{I_n}$.

(ii) Αν $\det(A) \neq 0$, *τότε* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}A$.

Απόδειξη. Έστω $C = [c_{ij}] = \mathrm{adjA} \cdot \mathrm{A}$ όπου

$$\mathrm{adjA} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ji} & \cdots & A_{ni} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ και } \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} c_{ij} = & \text{ το γινόμενο της γραμμής } i \text{ του adj}A \text{ και της στήλης } j \text{ του } A. \\ & = A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + \cdots + A_{ji}a_{ij} + \cdots + A_{ni}a_{nj} \end{aligned}$$

Από τις Προτάσεις 2.1 και 2.2 έπεται ότι αν $i = j$ τότε $c_{ij} = \det(A)$ και αν $i \neq j$ τότε $c_{ij} = 0$, δηλαδή

$$C = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I_n.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και $A \cdot \mathrm{adj}A = \det(A)I_n$.

Επιπλέον, αν $\det(A) \neq 0$ τότε η A αντιστρέφεται και ισχύει ότι

$$A \cdot \mathrm{adjA} = \det(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{I_n} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cdot \left(\frac{1}{\det(\mathrm{A})}\mathrm{adjA}\right) = \mathrm{I_n}.$$

Άρα, η αντίστροφή της A^{-1} είναι η $\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adjA}$. □

Παράδειγμα. *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. *Να βρεθεί, (αν υπάρχει), η μήτρα* A^{-1}.

Λύση. Είναι $\det(A) = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 = -10 \neq 0$. Επομένως υπάρχει η A^{-1} και ισχύει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adjA}.$$

Είναι

$$\mathrm{adjA} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$ □

Παρατήρηση: Από την Πρόταση 2.6.(2) προκύπτει ότι μπορούμε να βρίσκουμε απ' ευθείας την αντίστροφη μιας 2×2 αντιστρέψιμης μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(χωρίς να κάνουμε κάθε φορά τη διαδικασία του παραπάνω Παραδείγματος), αφού

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα. *Έστω* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Να βρεθεί, (αν υπάρχει), η μήτρα* A^{-1}.

Λύση. Είναι $\det(A) = -4 \neq 0$, επομένως υπάρχει η A^{-1} και ισχύει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj} A$$

Είναι

$$\mathrm{adj} A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -8 \\ -3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

2.8 Rank μήτρας

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ και

$$W =< C_1, C_2, \ldots, C_n >$$

όπου $C_1, C_2, \ldots, C_n$ οι στήλες της μήτρας A.

Ορίζουμε $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \dim \widehat{W}$, όπου $\widehat{W}$ είναι ο διανυσματικός χώρος που έχει για φορέα το W.

Παράδειγμα: Για την μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι $\mathrm{rank}(A) = 3$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} W &=< C_1, C_2, C_3, C_4 > \\ &=< (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,0), (0,0,0,1) > \\ &=< (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1) > . \end{aligned}$$

Το σύνολο αυτό είναι και ελεύθερο, αφού

$$\lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(0,1,0,0) + \lambda_3(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, 0, \lambda_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Άρα $\dim \widehat{W} = 3$, άρα $\mathrm{rank}(A) = 3$.

Πρόταση 2.7. *Για το rank μιας μήτρας ισχύουν τα εξής:*

(1) *Αν* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, *τότε*
$$\operatorname{rank}(A) \leqslant \min\{m, n\}.$$

(2) *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *Τότε* $\operatorname{rank}(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O}_{m\times n}$.

(3) *Αν* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, *τότε* $\operatorname{rank}(A) = \dim \widehat{V}$, *όπου* $V =< R_1, R_2, \ldots, R_m >$ *και* $\widehat{V}$ *ο διανυσματικός χώρος που έχει για φορέα τις γραμμές* $R_1, R_2, \ldots, R_m$ *της μήτρας* A.

(4) *Αν* $A \overset{R}{\sim} B$, *ή* $A \overset{C}{\sim} B$ *(δηλαδή ο* B *προκύπτει από τον* A *μετά από πεπερασμένο αριθμό στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών ή στηλών), τότε* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Κατά συνέπεια, και στην ειδική περίπτωση όπου θ *είναι στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών (ή στηλών), τότε* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\theta(A))$.

(5) *Έστω* $A \in \mathcal{M}_n$. *Τότε*

i) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) < n$.

ii) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n$.

(6) *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *και* $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$. *Τότε*
$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

(7) *Έστω* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *Τότε*
$$\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

(8) *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}^*$. *Τότε*
$$\operatorname{rank}(\lambda A) = \operatorname{rank}(A).$$

(9) *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *Τότε*
$$\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A).$$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.7 (5)i), είναι $\operatorname{rank}(A) < 3$, διότι

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Πρόταση 2.8. *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *και έστω ότι* $B \in \mathcal{M}_p$, $(p \leqslant \min\{m, n\})$, *η μεγαλύτερη υπομήτρα της* A *για την οποία* $\det(B) \neq 0$. *Τότε*
$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B).$$

Δηλαδή, $\operatorname{rank}(A) = p$, *αν και μόνο αν η μεγαλύτερης τάξης υποορίζουσα της* $\det(A)$ *που είναι διάφορη του μηδενός, είναι τάξης* p.

Παράδειγμα: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Είναι $\operatorname{rank}(A) = 2$. Πράγματι,

$$\operatorname{rank}(A) \leqslant \min\{3, 4\} = 3.$$

Οι υπομήτρες τύπου 3×3 της μήτρας A είναι

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

και έχουν όλες ορίζουσα ίση με μηδέν. Άρα $\operatorname{rank}(A) < 3$.

Αλλά, η υπομήτρα B της A, όπου

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

έχει $\det(B) = 3 \neq 0$. Άρα

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 2.$$

Πρόταση 2.9. *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *Αν υπάρχει υπομήτρα* $B \in \mathcal{M}_p$ *της μήτρας* A *με* $\det(B) \neq 0$, *ενώ για κάθε υπομήτρα* $C \in \mathcal{M}_{p+1}$ *της* A *που έχει ως υπομήτρα την* B *είναι* $\det(C) = 0$, *τότε* $\operatorname{rank}(A) = p$.

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι για να βρούμε το rank μιας μήτρα ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Βρίσκουμε μια τετραγωνική υπομήτρα B μικρής τάξης (συνήθως 2) της A με $\det(B) \neq 0$.

Αν η μήτρα B είναι τύπου $p \times p$, υπολογίζουμε τις ορίζουσες εκείνων **μόνο** των υπομητρών της A τύπου $(p+1) \times (p+1)$ που έχουν ως υπομήτρα την B. Αν οι ορίζουσες όλων αυτών των μητρών είναι 0, τότε θα είναι $\operatorname{rank}(A) = p$.

Αν βρούμε τουλάχιστον μια μήτρα με ορίζουσα μη μηδενική, αρχίζουμε την ίδια διαδικασία από την αρχή για τη μήτρα αυτή που βρήκαμε.

Παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το rank της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Είναι

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Θεωρούμε τώρα **μόνο** τις υπομήτρες 3×3 της A που περιέχουν την υπομήτρα $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Μεταξύ αυτών, έχουμε

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Επειδή, αυτή η ορίζουσα είναι μη μηδενικη, αρχίζουμε ξανά από την αρχή, και θεωρούμε **μόνο** τις υπομήτρες 4×4 της A που περιεχουν την υπομήτρα $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Υπάρχουν μόνο δύο τέτοιες μήτρες:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Και οι δύο αυτές μήτρες έχουν μηδενικές ορίζουσες. Άρα, $\mathrm{rank}(A) = 3$.

Παρατήρηση: Με τον τρόπο αυτό χρειάστηκε να υπολογίσουμε μόνο δύο "μεγάλες" ορίζουσες της A (τάξης 4) από τις 5 που περιέχει.

Πρόταση 2.10. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Αν A είναι κλιμακωτή μήτρα και το πλήθος των γραμμών της A που έχουν κύρια στοιχεία είναι p, τότε* $\mathrm{rank}(A) = p$.

Παρατήρηση: Επειδή ισχύει ότι αν $A \overset{R}{\sim} B$, τότε $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$, έπεται ότι για βρούμε το rank μιας μήτρας αρκεί να τη μετασχηματίσουμε σε R-ισοδύναμη κλιμακωτή μήτρα B. Ο αριθμός των γραμμών της B που έχουν κύρια στοιχεία, δηλαδή των μη μηδενικών γραμμών, είναι ίσος με $\mathrm{rank}(A)$.

Παράδειγμα. *Να βρεθεί το* rank *της μήτρας A όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Είναι

$$A \overset{R_2 \to \frac{1}{2}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_5 \to R_5 - 5R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & -5/2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_4 \leftrightarrow R_5}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4 \to R_4 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - \frac{1}{10}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/10 & 9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, η A είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα με 3 μη μηδενικές γραμμές, άρα $\operatorname{rank}(A) = 3$. □

Παράδειγμα. *Να βρεθεί το* rank *της μήτρας A όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Είναι

$$A \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_4 \to R_4 + R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \overset{R_4 \to R_4 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Επομένως, η A είναι R-ισοδύναμη με μια κλιμακωτή μήτρα με 4 μη μηδενικές γραμμές, άρα $\operatorname{rank}(A) = 4$. □

Πρόταση 2.11. *Έστω ένα σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$, όπου $m \leqslant n$ και έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ η μήτρα με γραμμές τα u_1, u_2, …, u_m. Τότε το σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ είναι ελεύθερο αν και μόνο αν* $\operatorname{rank}(A) = m$.

Δηλαδή για να δείξουμε ότι m n-άδες ($m \leqslant n$) είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αρκεί να δείξουμε ότι το rank της μήτρας με γραμμές τις n-αδές αυτές είναι ίσο με m.

Παράδειγμα: Έστω οι 4-άδες $u_1 = (1, 2, -1, -2)$, $u_2 = (2, 3, 0, 1)$, $u_3 = (1, 2, 1, 4)$ και $u_4 = (1, 3, -1, 0)$.

Η μήτρα με γραμμές τις τετράδες u_1, u_2, u_3, u_4 είναι η μήτρα A του προηγούμενου παραδείγματος

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

για την οποία, όπως είδαμε, είναι $\operatorname{rank}(A) = 4$. Άρα, και οι τέσσερεις 4-άδες είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πόρισμα 2.12. *Έστω ένα σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ και έστω $A \in \mathcal{M}_n$ η μήτρα με γραμμές τα u_1, u_2, …, u_n. Τότε το σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ είναι ελεύθερο αν και μόνο αν* $\det(A) \neq 0$.

Παρατήρηση: Ένας άλλος τρόπος λοιπόν για να απαντήσουμε στο προηγούμενο παράδειγμα, θα ήταν να ελέγξουμε απλά ότι $|A| \neq 0$, το οποίο πράγματι ισχύει, αφού $|A| = -2$ (Άσκηση).

Πρόταση 2.13 (Μήτρες με rank 1). *Μια $m \times n$ μήτρα $A = [a_{ij}]$ έχει rank 1 αν και μόνο αν*

$$a_{ij} = x_i y_j$$

όπου $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ *και* $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$, *δηλαδή*

$$A = XY = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ έχει rank 1 αφού

$$A = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 3 & 1\cdot 2 & 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ έχει rank 1 αφού

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση: Άρα, μια $m \times n$ μήτρα A έχει rank 1 αν και μόνο αν γράφεται ως γινόμενο μιας μήτρας στήλης $m \times 1$ επί μιας μήτρας γραμμής $1 \times n$.

Παρατήρηση: Μια μήτρα A έχει rank 1 αν και μόνο αν όλες οι γραμμές της (αντ. όλες οι στήλες της) είναι πολλαπλάσια κάποιας γραμμής της (αντ. στήλης της).

Πρόταση 2.14 (Ανάλυση μήτρας σε άθροισμα μητρών με rank 1). *Το rank μια μήτρας A ισούται με τον ελάχιστο αριθμό μητρών με rank 1 που το άθροισμά τους δίνει την A.*

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

άρα, είναι $\text{rank}(A) = 2$. Επομένως, η A γράφεται ως άθροισμα δύο μητρών με rank 1. Πράγματι,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Σε προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ έχει $\text{rank}(A) = 4$ οπότε απαιτούνται 4 μήτρες με rank 1 για να εκφράσουν την A ως άθροισμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Η ανάλυση μιας μήτρας με rank > 1 ως άθροισμα μητρών με rank 1 δεν είναι μονοσήμαντη (δηλαδή μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους).

Παράδειγμα: Για την μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ με $\text{rank}(A) = 2$ έχουμε αφενός

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και αφετέρου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.9 Συμπληρωματικές λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 2.1. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$ με $\det(A) = 3$ και $\det(B) = 2$. Να βρεθούν οι $\det(AB^2)$, $det(A^3)$ και $det(A^{-1}BA)$*

Λύση. Ισχύει ότι

$$\det(AB^2) = \det(A)\det(B^2) = \det(A)(\det(B))^2 = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

$$\det(A^3) = (\det(A))^3 = 3^3 = 27.$$

$$\det(A^{-1}BA) = \det(A^{-1})\det(B)\det(A) = \det(A)^{-1}\det(B)\det(A) = \det(B) = 2.$$

□

Άσκηση 2.2. *Να δειχθεί ότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Λύση.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής καταλήγουμε στον υπολογισμό της ορίζουσας

$$\begin{aligned} 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} &= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) \\ &= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

□

2.10 Ασκήσεις προς επίλυση

1. (Ιδιότητες οριζουσών) Έστω $\det(A) = x$ και $\det(B) = y$, όπου $A, B \in \mathcal{M}_n$ αντιστρέψιμες μήτρες. Να βρεθούν οι τιμές της ορίζουσας των παρακάτω μητρών:

   i) $A^{-1}BA$.

   ii) kA^rB^s, $r, s \in \mathbb{N}^*$.

   iii) $\det(kA)B^{-1}$.

   iv) $k(A^{-1}B)^t$.

   v) $(kA)^{-1}$.

   vi) $(k(A^t)^rB^{-s})^{-1}$.

   vii) της μήτρας που προκύπτει, από την A, αν αλλάξουμε το πρόσημο κάθε στοιχείου της;

   viii) της μήτρας που προκύπτει, από την A, αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο a_{ij} με 2^{i-j};

2. (Ιδιότητες οριζουσών) Έστω

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Να δειχθεί ότι $\det(A) = 2\det(B)$.

   Έστω

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Να δειχθεί ότι $\det(C) = 165\det(D)$.

3. (Υπολογισμός ορίζουσας) Να υπολογισθούν οι ορίζουσες:

   i) $\begin{vmatrix} 1 & 200 & 500 \\ 0 & -2 & 623 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$. (Απ. -14.)

   ii) $\begin{vmatrix} 0 & 67 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 56 & 10 \end{vmatrix}$. (Απ. 268.)

   iii) $\begin{vmatrix} 500 & 20 & 40 \\ 7 & -12 & 5 \\ 50 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. (Απ. 0.)

   iv) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -9 \end{vmatrix}$. (Απ. -24.)

   v) $\begin{vmatrix} 8k^2+8k & 2k+1 & 4k \\ 4k^2+4k & k+1 & 2k+1 \\ 4k^2+4k+1 & k & 2k-1 \end{vmatrix}$ (Απ. 1)

   vi) $\begin{vmatrix} a-b & d-e & k-l \\ b-c & e-z & l-m \\ c-a & z-d & m-k \end{vmatrix}$. (Απ. 0)

   vii) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ (Απ. 120)

   viii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ (Απ. 0)

   ix) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ (Απ. 0)

   x) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ (Απ. 1875)

   xi) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (Απ. 0)

   xii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (Απ. 5)

4. (Μήτρες Hilbert) Να βρεθούν οι ορίζουσες των παρακάτω μητρών, που ονομάζονται **μήτρες Hilbert**.

   i) $H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (Απ. $\frac{1}{12}$)

   $H_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ (Απ. $\frac{1}{2160}$)

$$H_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}. \text{ (Απ. } \tfrac{1}{6048000})$$

ii) Έστω $H_n = [h_{ij}]$ όπου $h_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.
⋆ Να δειχθεί ότι

$$\det(H_n) = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n-1} j!\right)^4}{\prod_{j=1}^{2n-1} j!}.$$

iii) Να δειχθεί ότι

$$\frac{\det(H_{n+1})}{\det(H_n)} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

iv) Να δειχθεί ότι το στοιχείο της i-γραμμής και j-στήλης της H_n^{-1} ισούται με $(-1)^{i+j}(i+j-1)\binom{n+i-1}{n-j}\binom{n+j-1}{n-i}\binom{i+j-2}{i-1}^2$.

5. (Ταυτότητες με ορίζουσες) Να δειχθούν οι ισότητες:

i) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(b-c)(c-d)$.

ii) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = (a^3-b^3)^2$.

iii) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$
$= 4(a-b)(b-c)(a-c)$.

iv) $\begin{vmatrix} 1 & a+d & (a+d)^2 \\ 1 & b+d & (b+d)^2 \\ 1 & c+d & (c+d)^2 \end{vmatrix} = (b-a)(b-a)(c-d)$.

v) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$
$= \sin(b-c) + \sin(c-a) + \sin(a-b)$.

vi) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$
$= 4(a+b)(b+c)(c+a)$.

vii) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$
$= 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

viii) $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$.

ix) $\begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{vmatrix} = -8$.

x) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} = -2(a-b)^2(a+b)$.

xi) $\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix} = 2a(b^2+c^2)$.

xii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 & 1 \\ r & r & r & 1 \end{vmatrix} = (1-r)^3$.

xiii) $\begin{vmatrix} 1 & a^2-bc & a^4 \\ 1 & b^2-ca & b^4 \\ 1 & c^2-ab & c^4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+$
$b+c)(b^2+bc+c^2+ac+ab+a^2)$

6. (Εξίσωση οριζουσών) Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(Απ. $x = \pm 1, \pm 3$.)

7. (Διαιρετότητα και ορίζουσες)

i) Αν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 100\cdot x_1 + 10\cdot x_2 + x_3 \\ x_4 & x_5 & 100\cdot x_4 + 10\cdot x_5 + x_6 \\ x_7 & x_8 & 100\cdot x_7 + 10\cdot x_8 + x_9 \end{vmatrix}.$$

ii) Αν ο αριθμός x διαιρεί τους αριθμούς 204, 527 και 255 να αποδειχθεί ότι ο x διαιρεί και τον αριθμό $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

iii) Αν ο αριθμός x διαιρεί τους αριθμούς 2988, 1245, 5478 και 5229 τότε να δειχθεί ότι ο x διαιρεί και τον αριθμό

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 2 & 9 \end{vmatrix}.$$

8. Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ για την οποία

$$A^4 - A^3 + A^3 - A + I_n = O_n.$$

Να δειχθεί ότι $\det(A) = (-1)^n$.

9. Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Αν $A^3 = 2I$, να δειχθεί ότι η μήτρα

$$B = A^2 - 2A + 2I$$

είναι αντιστρέψιμη.

10. (Συμπληρωματική μήτρα) Να βρεθεί ο $adjA$ όπου

i) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

(Απ. $\begin{bmatrix} 23 & -52 & 53 \\ 38 & 8 & -22 \\ -37 & 68 & -7 \end{bmatrix}$.)

iii) $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & y & 2 \\ 1 & 2 & z \end{bmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(Απ. $\begin{bmatrix} -4+yz & 4-z & 2-2y \\ 2-z & -2+xz & 2-2x \\ 2-y & 1-2x & -1+xy \end{bmatrix}$.)

iv) $A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix}$. (Απ. $\begin{bmatrix} b+c+bc & -c & -b \\ -c & a+c+ac & -a \\ -b & -a & a+b+ab \end{bmatrix}$.)

v) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix}$. (Απ. $\begin{bmatrix} bc+ac+ab+abc & -bc & -ac & -ab \\ -bc & bc & 0 & 0 \\ -ac & 0 & ac & 0 \\ -ab & 0 & 0 & ab \end{bmatrix}$.)

vi) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(Απ. $\begin{bmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

11. (Ιδιότητες συμπληρωματικής μήτρας)

i) Να δειχθεί ότι αν $A \in \mathcal{M}_n$ είναι μη αντιστρέψιμη μήτρα, τότε η μήτρα $\mathrm{adj}A$ είναι επίσης μη αντιστρέψιμη.

ii) Να δειχθεί ότι αν $A \in \mathcal{M}_n$ είναι αντιστρέψιμη μήτρα, τότε

$$\det(\mathrm{adj}A) = \det(A)^{n-1}.$$

iii) Να δειχθεί ότι αν $A \in \mathcal{M}_n$ είναι αντιστρέψιμη μήτρα, τότε

$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = |A|^{n-2}A.$$

iv) Να δειχθεί ότι αν $A, B \in \mathcal{M}_n$ είναι αντιστρέψιμες μήτρες, τότε

$$\mathrm{adj}AB = \mathrm{adj}B \cdot \mathrm{adj}A.$$

12. (Ορθογώνιες μήτρες)

i) Να δειχθεί ότι αν η A είναι ορθογώνια μήτρα $n \times n$, τότε $\det(A) = \pm 1$.

ii) Να δειχθεί ότι αν A είναι μια $n \times n$ μήτρα με στοιχεία ακέραιους αριθμούς τότε $\det(A)$ είναι επίσης ακέραιος αριθμός.

iii) Να δειχθεί ότι αν A είναι μια $n \times n$ μήτρα με στοιχεία ακέραιους αριθμούς και $\det(A) = \pm 1$, τότε και η μήτρα A^{-1} έχει στοιχεία ακέραιους αριθμούς.

13. (Rank μήτρας) Να βρεθεί το rank των επόμενων μητρών

i) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, (Απ. 2)

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, (Απ. 4)

iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. (Απ. 2)

iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (Απ. 4)

v) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (Απ. 4)

vi) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (Απ. 3)

vii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (Απ. 4)

viii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (Απ. 2)

ix) $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ με $a_{ij} = i + j$ για κάθε $i, j \in [4]$ (Απ. 2)

14. (Μήτρες με rank 1) Να δειχθεί ότι αν μια $n \times n$ μήτρα A έχει rank 1 τότε υπαρχει στήλη της C και γραμμή της R ώστε

$$A = \frac{1}{\lambda} CR.$$

όπου λ είναι το κοινό στοιχείο της γραμμής R και της στήλης C.

15. (Μήτρα με ελάχιστο rank) Να συμπληρωθούν οι τιμές που λείπουν ώστε η μήτρα που προκύπτει να έχει το μικρότερο δυνατό rank.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & ? & ? & 24 & 28 & 32 & 36 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & ? & ? & 30 & 35 & 40 & 45 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 \\ 0 & 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 \\ 0 & 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 \\ 0 & 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 \end{bmatrix}$$

16. (Ιδιότητες rank)

i) Να δειχθεί ότι αν $A, B \in \mathcal{M}_n$ και $\mathrm{rank}(A) < n$ τότε $\det(AB) = 0$.

ii) Να δειχθεί ότι αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ με $m > n$ τότε $\det(AB) = 0$.

17. i) (Εξίσωση ευθείας) Να δειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ii) (Έλεγχος συγραμμικότητας) Να δειχθεί τρία σημεία του επιπέδου $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ είναι συγγραμικά (δηλαδή ανήκουν στην ίδια ευθεία) αν $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

iii) (Εμβαδόν τριγώνου) Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν τρία σημεία του επιπέδου $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ισούται με την απόλυτη τιμή του $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Κεφάλαιο 3

Γραμμικά συστήματα

3.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Έστω ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με m εξισώσεις και n αγνώστους:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
$$

Αν θεωρήσουμε τις μήτρες

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

όπου A είναι τύπου $m \times n$, X είναι τύπου $n \times 1$ και B είναι τύπου $m \times 1$, τότε το σύστημα γράφεται

$$AX = B$$

όπου
A: Η μήτρα των συντελεστών,
B: Η μήτρα των σταθερών όρων,
X: Η μήτρα των αγνώστων.

Παράδειγμα. *Το σύστημα*

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + z &= 1 \\
x + y + z &= 0 \\
x + 4y + 2z &= 0.
\end{aligned}
$$

γράφεται προφανώς

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

δηλαδή

$$AX = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ είναι η μήτρα των συντελεστών,}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ είναι η μήτρα των αγνώστων όρων,}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ είναι η μήτρα των σταθερών όρων.}$$

Επίσης, χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$E \text{ (ή } \begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix}) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Η μήτρα E (ή $\begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix}$) ονομάζεται **επαυξημένη μήτρα** του συστήματος $AX = B$.

Παράδειγμα. *Η μήτρα*

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

είναι η επαυξημένη μήτρα του προηγούμενου παραδείγματος.

Λύση του συστήματος ονομάζεται κάθε μήτρα $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ η οποία επαληθεύει την εξίσωση $AX = B$.

Αποδεικνύεται ότι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων,

- είτε δεν έχει καμιά λύση (οπότε λέγεται **αδύνατο**),
- είτε έχει ακριβώς μια λύση,
- είτε έχει άπειρες λύσεις (οπότε λέγεται **αόριστο**).

Αν ένα σύστημα έχει τουλάχιστον μια λύση, (δηλαδή δεν είναι αδύνατο), τότε λέγεται **συμβιβαστό**.

Αν $B = \mathbb{O}_{m\times 1}$ το σύστημα λέγεται **ομογενές**:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

3.2 Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων

3.2.1 Λύση με αντίστροφη μήτρα

Έστω $AX = B$, όπου A μια αντιστρέψιμη τετραγωνική μήτρα. Τότε

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Παράδειγμα. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x + 4y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Λύση. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$AX = B.$$

Ισχύει ότι

$$\det(A) = -4 \neq 0.$$

Επομένως, υπάρχει η αντίστροφη μήτρα A^{-1} με

$$A^{-1} = \cdots = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

ή,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4} \right).$$

□

3.2.2 Λύση με τη μέθοδο οριζουσών (μέθοδος Cramer)

Έστω το σύστημα

$$AX = B, \text{ με } A \in \mathcal{M}_n.$$

1. Αν $D(A) \neq 0$, τότε
$$x_i = \frac{D_i(A)}{D(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
όπου $D_i(A)$ (ή $D_{x_i}(A)$) είναι η ορίζουσα της μήτρας που προκύπτει από την A, αν αντικαταστήσουμε την i στήλη της με τη στήλη B.

2. Αν $D(A) = 0$ και υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $D_i(A) \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

3. Αν $D(A) = 0$ και $D_i(A) = 0$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.
Σε αυτή την περίπτωση προχωράμε με τη μέθοδο Gauss, ή διερευνούμε με χρήση rank, (όπως θα δούμε στη συνέχεια).

Παράδειγμα. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7w &= 6 \\ 3x - 2y + 5w &= 5 \\ 4x + 3y - 9w &= 8. \end{aligned}$$

Λύση. Είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 28 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 5 & -2 & 5 \\ 8 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 56, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -7 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 84, \quad D_w = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 28.$$

Άρα

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{56}{28} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{84}{28} = 3, \quad w = \frac{D_w}{D} = \frac{28}{28} = 1.$$ □

Παράδειγμα. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 7w &= 6 \\ 3x - 2y + 5w &= 5 \\ 7x + 4y - 9w &= 18. \end{aligned}$$

Λύση. Είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

ενώ

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 5 & -2 & 5 \\ 18 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 785 \neq 0.$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο. □

3.2.3 Λύση με τη μέθοδο Gauss

Έστω $AX = B$ ένα $m \times n$ γραμμικό σύστημα (Σ). Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gauss στην επαυξημένη μήτρα E, μέχρι η A να δώσει μια ισοδύναμη **υποβαθμισμένη** κλιμακωτή μήτρα

$$E' = \left[A' \mid B'\right].$$

Έστω

$$B' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν κατά τη διάρκεια της παραπάνω διαδικασίας εμφανισθεί κάποια γραμμή της μορφής $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & K \end{bmatrix}$, όπου $K \neq 0$, τότε το (Σ) **είναι αδύνατο**, αφού προφανώς αυτή η γραμμή της επαυξημένης μήτρας θα αντιστοιχεί σε μια εξίσωση της μορφής:

   $$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = K \neq 0,$$

   το οποίο φυσικά είναι αδύνατο.

2. Αν οι μη μηδενικές γραμμές τις A' σχηματίζουν την I_n, τότε έχουμε τη **(μοναδική) λύση** $X = B'$, δηλαδή $x_i = b'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Αν η A' έχει m' μη μηδενικές γραμμές $(m' < n)$, τότε γράφουμε το σύστημα εξισώσεων που αντιστοιχεί στην εξίσωση

   $$A'X = B'.$$

   Λύνουμε κάθε εξίσωση ως προς εκείνο το x_i (**κύριος άγνωστος**) που αντιστοιχεί σε στήλη της A' που περιέχει κύριο στοιχείο, (οι υπόλοιποι άγνωστοι είναι οι **ελεύθεροι άγνωστοι**), παίρνοντας έτσι τις **(άπειρες) λύσεις** του **αόριστου** συστήματος (Σ).

Παράδειγμα. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Λύση. Εδώ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 7 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα

$$E = \left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -7 & 7 & 4 \end{array}\right].$$

Τότε

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & -7 & 7 & 4 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -13 & 11 & -13 \\ 0 & -13 & 11 & -6 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -13 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right].$$

Επειδή, στην διάρκεια της διαδικασίας εμφανίστηκε η γραμμή $0 \; 0 \; 0 \mid 7$, προκύπτει ότι το σύστημα είναι αδύνατο. □

Παράδειγμα. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 3w &= 1 \\ x + y + 2w &= 9 \\ 3x + 6y - 5w &= 0. \end{aligned}$$

Λύση. Εδώ
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα

$$E = \begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right].$$

Τότε

$$E \overset{R_2 \leftrightarrow R_1}{\sim} \dots \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}}{\sim} \dots \overset{R_2 \to \frac{1}{2} R_2}{\sim} \dots \overset{\substack{R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2}}{\sim} \dots \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right],$$

δηλαδή $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$, $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση, την $x = 1$, $y = 2$, $w = 3$, δηλαδή $(x, y, w) = (1, 2, 3)$. □

Παράδειγμα. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 4. \end{aligned}$$

Λύση. Εδώ
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε την επαυξημένη μήτρα

$$E = \begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right] \end{array}.$$

Τότε

$$E \sim (\text{γραμμοπράξεις - άσκηση}) \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Επομένως, έχουμε:

Κύριοι άγνωστοι: x_1, x_4, x_5.
Ελεύθεροι άγνωστοι: x_2, x_3.
Επομένως, το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_4 &= -1 \\ x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Λύνουμε ως προς τους κύριους άγνωστους x_1, x_4, x_5 και προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 &= -1 \\ x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3 - 2x_2 + x_3, x_2, x_3, -1, 2),$$

όπου $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, ή, ισοδύναμα,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3 - 2a + b, a, b, -1, 2),$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$. □

3.2.4 Ύπαρξη λύσεων (διερεύνηση με rank)

Πρόταση 3.1. *Έστω (Σ) ένα σύστημα $AX = B$ όπου $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $E = \begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix}$ η επαυξημένη μήτρα του συστήματος.*

(i) Αν $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(E)$, τότε το (Σ) είναι αδύνατο.

(ii) Αν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(E) = n$, τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση.

(iii) Αν $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(E) < n$, τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις (με $n - \operatorname{rank}(A)$ ελεύθερους άγνωστους).

Παρατηρήσεις:

(1) Αν $m < n$, έχουμε
ή $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(E)$ (περίπτωση 1, άρα αδύνατο),
ή $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(E) \leqslant m < n$, (περίπτωση 3, άρα αόριστο).
Άρα, αν $m < n$, αποκλείεται η περίπτωση της μοναδικής λύσης.

(2) Η διερεύνηση μάς δίνει απλά το πλήθος των λύσεων, αλλά δεν βρίσκει τις λύσεις (αν υπάρχουν).

Παράδειγμα: Το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + y - 2z &= 2 \\ 2x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

είναι αδύνατο, διότι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

και

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

με

$$\text{rank}(A) = 2 \neq 3 = \text{rank}(E).$$

Πράγματι, $\text{rank}(A) = 2$, αφού $D(A) = 0$, ενώ η A έχει την 2×2 μήτρα $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ με $D(A_1) = -1 \neq 0$.

Εξάλλου, $\text{rank}(E) = 3$ αφού η E έχει την 3×3 υπομήτρα $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ με $D(E_1) = 2 \neq 0$.

Ειδικά για τα συστήματα με $n+1$ εξισώσεις και n αγνώστους, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.2. *Έστω το σύστημα $n+1$ γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους*

$$(\Sigma) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n+1}x_1 & + & a_{n+1}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1\ n}x_n & = & b_{n+1} \end{cases} \quad \textit{και } A = [a_{ij}], B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $\det(A|B) = 0$.

Παραδείγματα

(1) Το 4×3 σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

είναι συμβιβαστό, αφού

$$D([A|B]) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \cdots = 0.$$

(Πράγματι, το παραπάνω σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3)$ - Άσκηση.)

(2) Το 4×3 σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

είναι αδύνατο, αφού

$$D([A|B]) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

3.2.5 Ύπαρξη λύσεων ομογενούς συστήματος

Έστω ένα ομογενές σύστημα (Σ)

$$AX = \mathbb{O}_{n\times 1} \text{ με } A \in \mathcal{M}_n.$$

Το (Σ) έχει πάντα τουλάχιστον μια λύση: Τη (μηδενική) λύση $X = \mathbb{O}_{n\times 1}$. Άρα, **ποτέ** δεν είναι αδύνατο.

Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι:

(i) Αν $D(A) \neq 0$, τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση, (τη μηδενική).

(ii) Αν $D(A) = 0$, τότε έχει άπειρες λύσεις, (οπότε μπορούμε να προχωρήσουμε με Gauss).

3.2.6 Ανακεφαλαίωση τρόπων επίλυσης γραμμικών συστημάτων

Μέθοδος αντικατάστασης:
Μόνο για πολύ απλά συστήματα.

Μέθοδος αντίστροφης μήτρας:
Μόνο για τετραγωνικές μήτρες A. Δεν απαντά στην περίπτωση όπου η A δεν είναι αντιστρέψιμη.

Μέθοδος Cramer:
Μόνο για τετραγωνικές μήτρες A. Δεν απαντά στη περίπτωση όπου $D(A) = D_i(A) = 0$, για κάθε $i \in [n]$.

Μέθοδος Gauss:
Όχι μονο για τετραγωνικές μήτρες A. Γενική μέθοδος. Δίνει **πάντοτε** απάντηση.

3.3 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 3.1. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13. \end{aligned}$$

Λύση. **1ος τρόπος** (μέθοδος αντίστροφης μήτρας).

Αφού $D(A) = -2 \neq 0$, προκύπτει ότι η A είναι αντιστρέψιμη, με $A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\text{adjA}$.

$$\text{adjA} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -7 & 11 \\ 6 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -17 & -7 & 11 \\ 6 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ -3 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

οπότε

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ -3 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

δηλαδή $(x, y, z) = (1, 3, 1)$.

2ος τρόπος (μέθοδος Cramer).

$$D = D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Άρα, μοναδική λύση.

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -2, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 11 & 1 \\ 2 & 13 & -4 \end{vmatrix} = -6, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 11 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -2,$$

οπότε

$$x = \frac{D_x}{D} = 1,\ y = \frac{D_y}{D} = 3,\ z = \frac{D_z}{D} = 1,$$

δηλαδή $(x, y, z) = (1, 3, 1)$.

3ος τρόπος (μέθοδος Gauss).

$$\left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right] \underset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\overset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \overset{R_3 \to -\frac{1}{2}R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{R_2 \to R_2 - 4R_3}{\overset{R_1 \to R_1 + 11R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Άρα, το σύστημα έχει τη (μοναδική) λύση

$$(x, y, z) = (1, 3, 1).$$

□

Άσκηση 3.2. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} x - 2z &= -7 \\ 2x - 7y + 3z &= 7 \\ -y + z &= 3. \end{aligned}$$

Λύση. Το σύστημα έχει

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

με

$$D(A) = 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Άρα,

$$\text{rank}(A) = 2.$$

Επίσης, έχουμε

$$E = \begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 2 & -7 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right],$$

με

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & -7 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -7 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Άρα,

$$\text{rank}(E) = 2.$$

Επομένως,

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(E) = 2 < 3 \ (= n \text{ άγνωστοι})$$

οπότε το σύστημα (Σ) είναι αόριστο με

$$n - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$$

ελεύθερο άγνωστο.

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο Gauss

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 2 & -7 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα

$$\begin{aligned} x - 2z &= -7 \\ y - z &= -3, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x &= 2z - 7 \\ y &= z - 3. \end{aligned}$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι $(x, y, z) = (2z - 7, z - 3, z)$ όπου $z \in \mathbb{R}$, (ο ελεύθερος άγνωστος). $\square$

Άσκηση 3.3. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} x + y - w &= 1 \\ 2x + 3y + 2w &= 3 \\ x + 2y + 3w &= 2. \end{aligned}$$

Λύση. Ισχύει ότι

$$\mathsf{rank}(A) = \mathsf{rank}(\begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix}) = 2 < 3 (= n)$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, με $n - \mathsf{rank}(A) = 3 - 2 = 1$ ελεύθερους άγνωστους.

Εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε μια παραλλαγή της μεθόδου Cramer, (φυσικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Gauss): Γράφουμε το σύστημα στη μορφή

$$\begin{aligned} x + y &= 1 + w \\ 2x + 3y &= 3 - 2w \\ x + 2y + 3w &= 2 \end{aligned}$$

και επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Crammer για το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y &= 1 + w \\ 2x + 3y &= 3 - 2w. \end{aligned}$$

Είναι

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 + w & 1 \\ 3 - 2w & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3 + 3w - 3 + 2w}{3 - 2} = 5w,$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 + w \\ 2 & 3 - 2w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3 - 2w - 2 - 2w}{3 - 2} = 1 - 4w.$$

Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι

$$(x, y, w) = (5w, 1 - 4w, w)$$

όπου $w \in \mathbb{R}$. $\square$

Άσκηση 3.4. *Να λυθεί το σύστημα*

$$
\begin{aligned}
x - 2y + z &= 3\\
2x + 3y - 2z &= 5\\
3x + y - z &= 6.
\end{aligned}
$$

Λύση. **1ος τρόπος** (μέθοδος αντίστροφης μήτρας).

Η μήτρα A δεν είναι αντιστρέψιμη αφού $\det(A) = 0$. Άρα, η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί εδώ.

2ος τρόπος (μέθοδος Cramer)

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.
$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

3ος τρόπος (μέθοδος Gauss)

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].
$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

4ος τρόπος (μέθοδος rank)

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D(A) = 0, \text{ ενώ } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,
$$

Άρα

$$
\operatorname{rank}(A) = 2.
$$

$$
E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right]
$$

με

$$
\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.
$$

Άρα

$$
\operatorname{rank}(E) = 3 \neq 2 = \operatorname{rank}(A).
$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο. □

Άσκηση 3.5. *Δίδεται το σύστημα*

$$
\begin{aligned}
\lambda x + y - \lambda z &= 0\\
5\lambda x - 5\lambda y + 2z &= 0\\
x + 8y - 7z &= 0
\end{aligned}
$$

όπου λ: θετική παράμετρος.

(i) Να βρεθεί το λ, ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

(ii) Αν (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) είναι δύο διαφορετικές λύσεις του συστήματος αυτού, να δειχθεί ότι:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (z_1 - z_2)^2.$$

Λύση.

(i) Πρέπει

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -\lambda \\ 5\lambda & -5\lambda & 2 \\ 1 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0 \overset{C_1 \to C_1 + C_3}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda \\ 5\lambda+2 & -5\lambda & 2 \\ -6 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\begin{vmatrix} 5\lambda+2 & 2 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 5\lambda+2 & -5\lambda \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -10\lambda^2 + 19\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} -\frac{1}{10} < 0 \text{ (απορρίπτεται)} \\ 2. \end{cases}$$

(ii) Για $\lambda = 2$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 0 \\ 10x - 10y + 2z &= 0 \\ x + 8y - 7z &= 0. \end{aligned}$$

Λύνοντας σύμφωνα με την μέθοδο Gauss έχουμε ότι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 10 & -10 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & -7 & 0 \end{array}\right] \underset{R_2 \to \frac{1}{2}R_2}{\overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{\overset{R_2 \leftrightarrow R_2 - 5R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 0 \\ 0 & -45 & 36 & 0 \\ 0 & -15 & 12 & 0 \end{array}\right] \underset{R_3 \to \frac{1}{3}R_3}{\overset{R_2 \to -\frac{1}{45}R_2}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{R_3 \to R_3 + 5R_2}{\overset{R_1 \to R_1 - 8R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Άρα, το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{cases} x - \frac{3}{5}z &= 0 \\ y - \frac{4}{5}z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}z \\ y = \frac{4}{5}z. \end{cases}$$

Άρα $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}z, \frac{4}{5}z, z\right)$, $z \in \mathbb{R}$.

Αν λοιπόν

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{3}{5}z_1, \frac{4}{5}z_1, z_1\right)$$

και

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{3}{5}z_2, \frac{4}{5}z_2, z_2\right),$$

τότε:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &= \left(\frac{3}{5}z_1 - \frac{3}{5}z_2\right)^2 + \left(\frac{4}{5}z_1 - \frac{4}{5}z_2\right)^2 \\ &= \frac{9}{25}(z_1 - z_2)^2 + \frac{16}{25}(z_1 - z_2)^2 = \frac{25}{25}(z_1 - z_2)^2 \\ &= (z_1 - z_2)^2. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 3.6. *Να λυθεί (και να διερευνηθεί) το σύστημα*

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= k \\ x + y + kz &= k^2 \end{aligned}$$

όπου k: πραγματική παράμετρος.

Λύση.

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k(k^2-1) - (k-1) + (1-k) = k(k+1)(k-1) - 2(k-1)$$
$$= (k-1)(k^2+k-2) = (k-1)(k-1)(k+2) = (k-1)^2(k+2).$$

Άρα:

- Αν $k \neq -2, 1$ (οπότε $D \neq 0$) τότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ k^2-1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k^2-1)(1-k) = -(k-1)^2(k+1).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k & 1 \\ k^2 & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & k^2 \end{vmatrix}$$
$$= k\left(k^2 - k^2\right) - (k-1) + k^2 - k = -k + 1 + k^2 - k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix} \overset{C_3 \to C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k^2-1 \end{vmatrix} = (k^2-1)(k^2-1) = (k-1)^2(k+1)^2.$$

Άρα

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+2)} = -\frac{k+1}{k+2}, \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2}, \\ z &= \frac{D_z}{D} = \frac{(k-1)^2(k+1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k+2}. \end{aligned}$$

- Αν $k = 1$, τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y - z.$$

Ώστε $(x, y, z) = (1 - y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

- Αν $k = -2$, τότε

$$D_x = -(-3)^2(-1) = 9 \neq 0,$$

οπότε το σύστημα είναι αδύνατο. □

Άσκηση 3.7. *Έστω το σύστημα*

$$AX = B, \text{ με } A \in \mathcal{M}_n.$$

i) *Να δειχθεί ότι αν $D(A) \neq 0$, τότε*

$$x_i = \frac{D_i(A)}{D(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

όπου $D_i(A)$ (ή $D_{x_i}(A)$) είναι η ορίζουσα της μήτρας που προκύπτει από την A, αν αντικαταστήσουμε την i στήλη της με τη στήλη B.

ii) *Να δειχθεί ότι αν $D(A) = 0$ και υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $D_i(A) \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.*

Λύση. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.6 έχουμε ότι

$$AX = B \Rightarrow \mathrm{adj}A \cdot AX = \mathrm{adj}A \cdot B \Rightarrow \det(A) I_n X = \mathrm{adj}A \cdot B$$

οπότε

$$\det(A)X = \mathrm{adjA} \cdot \mathrm{B}.$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.1, έχουμε ότι

$$\mathrm{adjA} \cdot \mathrm{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ji} & \cdots & A_{ni} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{j1}b_j + \cdots + A_{n1} \cdot b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{j2}b_j + \cdots + A_{n2} \cdot b_n \\ \vdots \\ A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ji}b_j + \cdots + A_{nj} \cdot b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{jn}b_j + \cdots + A_{nn} \cdot b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1(A) \\ D_2(A) \\ \vdots \\ D_j(A) \\ \vdots \\ D_n(A) \end{bmatrix}$$

i) Αν $D(A) \neq 0$ έπεται ότι $X = \dfrac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}A \cdot B = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} D_1(A) \\ D_2(A) \\ \vdots \\ D_j(A) \\ \vdots \\ D_n(A) \end{bmatrix}$, δηλαδή $x_i = \dfrac{D_i(A)}{D(A)}$.

ii) Αν $D(A) = 0$, τότε $\mathrm{adj}A \cdot B = 0X = O_{n\times 1}$, δηλαδή $\begin{bmatrix} D_1(A) \\ D_2(A) \\ \vdots \\ D_j(A) \\ \vdots \\ D_n(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Επομένως, αν υπάρχει $i \in [n]$ ώστε $D_i(A) \neq 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη και άρα και το σύστημα είναι αδύνατο. □

3.4 Ασκήσεις προς επίλυση

1. (Σωστό ή λάθος) Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να εξετασθεί αν είναι σωστή ή λάθος. Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.

   i) Ένα γραμμικό σύστημα με περισσότερους αγνώστους από ότι εξισώσεις πάντα έχει λύση.

   ii) Ένα γραμμικό σύστημα με περισσότερες εξισώσεις από ότι αγνώστους πάντα είναι αδύνατο.

   iii) Υπάρχει γραμμικό σύστημα με 3 αγνώστους και 3 εξισώσεις το οποίο έχει ακριβώς 3 λύσεις.

   iv) Ένα γραμμικό ομογενές σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο.

   v) Αν το γραμμικό σύστημα
   $$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
   είναι αδύνατο, τότε και το σύστημα
   $$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 + k \\ a_2x + b_2y = c_2 + k \end{cases}$$
   όπου $k \in \mathbb{R}$, είναι επίσης αδύνατο.

   vi) Αν το γραμμικό σύστημα
   $$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
   είναι αδύνατο, τότε και το σύστημα
   $$\begin{cases} a_1x + b_1y = kc_1 \\ a_2x + b_2y = kc_2 \end{cases}$$
   όπου $k \in \mathbb{R}$, είναι επίσης αδύνατο.

   vii) Αν κάθε λύση ενός γραμμικού συστήματος (Σ) με 2 αγνώστους και 2 εξισώσεις είναι λύση ενός γραμμικού συστήματος (Σ′) με 2 αγνώστους και 2 εξισώσεις τότε τα δύο συστήματα έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

   viii) Αν δύο γραμμικά συστήματα (Σ) και (Σ′) έχουν άπειρες λύσεις, τότε το σύστημα (Σ″) που αποτελείται από τις εξισώσεις και των δύο συστημάτων είναι συμβιβαστό.

2. (Γραμμικά συστήματα) Να λυθούν τα συστήματα:

   i) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

   ii) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -9 \\ 10x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 10. \end{cases}$

   iii) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6. \end{cases}$

   iv) $\begin{cases} \dfrac{yz + xz + xy}{xyz} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3yz + 2xz - 2xy}{xyz} = 3 \\ \dfrac{6yz + xz + xy}{xyz} = 2. \end{cases}$

3. (Γραμμικά συστήματα με παραμέτρους) Να διερευνηθούν και να λυθούν, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων a, b τα συστήματα:

   i) $\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ x + (2a-1)y + 3z = 1 \\ x + ay + (a-3)z = 2a - 1. \end{cases}$

   ii) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 - a \\ x + y + az = 3a + 1. \end{cases}$

   iii) $\begin{cases} a^2x + y + z = 1 \\ x + a^2y + z = 1 \\ x + y + a^2z = 1. \end{cases}$

   iv) $\begin{cases} 2(a-1)x + 2y + z = 2(a+1) \\ 2x + 2ay + 2z = 4a^2 + 3 \\ 4ax + (4a+2)y + (2a+1)z = 16a^3 - 2a^2 - a + 5. \end{cases}$

   v) $\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay + 8z = 3 \end{cases}$

   vi) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \\ 4x + (a-1)y + z = 1 \end{cases}$

vii) $\begin{cases} x+y+z+aw=b^3 \\ x+y+az+w=b^2 \\ x+ay+z+w=b \\ ax+y+z+w=1 \end{cases}$

viii) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+z=a \\ bx+y+z=4 \end{cases}$

4. (Γραμμικά συστήματα με παραμέτρους)

   i) Να βρεθούν $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε και τα δύο συστήματα
   $\begin{cases} ax+by=a+2 \\ 2x+y=b+1 \end{cases}, \quad \begin{cases} (a+1)x-y=a+1 \\ -bx+y=b+2 \end{cases}$
   να έχουν άπειρες λύσεις.

   ii) Να βρεθούν $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε και τα δύο τα συστήματα
   $\begin{cases} ax+by=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} ax-(b+1)y=-2 \\ x+2y=5 \end{cases}$
   να είναι αδύνατα.

5. (Πολυωνυμική παρεμβολή) Να προσδιορισθούν, αν υπάρχουν, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε η παραβολή $y = ax^2 + bx + c$ να διέρχεται από τα σημεία $(2, 5)$, $(3, 4)$ και $(4, 6)$.

6. (Υπολογισμός αθροίσματος) Να υπολογισθεί το άθροισμα

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} k(3k+2),$$

δεδομένου ότι είναι γνωστό πως το $S(n)$ είναι ένα πολυώνυμο του n με βαθμό 3.

7. (Προσδιορισμός εξίσωσης επιπέδου) Στο χώρο $\mathbb{R}^3$ επίπεδο ονομάζεται στο σύνολο των σημείων $x = (x_1, x_2, x_3)$ τα οποία ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$, όπου a_1, a_2, a_3 και c είναι σταθερές και $|a_1| + |a_2| + |a_3| \neq 0$.

   i) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου του $\mathbb{R}^3$ το οποίο περιέχει τα σημεία $(0, 0, 1)$, $(-1, 3, 5)$ και $(1, -1, 0)$.

   ii) Να δειχθεί, με ένα παράδειγμα, ότι δεν υπάρχει επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που να περιέχει κάθε τετράδα σημείων.

8. Να λυθεί το σύστημα $AX = X$ τριών αγνώστων όπου $A = I_3 + \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P^2$ και

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. (Παραμετρική εξίσωση ευθείας) Έστω u, a δύο διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$ με $u \neq \mathbf{0}$. Το σύνολο των διανυσμάτων x του $\mathbb{R}^n$ με

$$x = a + tu$$

όπου $t \in \mathbb{R}$ ονομάζεται ευθεία που διέρχεται από το a με διεύθυνση το u και η εξίσωση $x = a + tu$ ονομάζεται παραμετρική εξίσωση της ευθείας ενώ το t ονομάζεται παράμετρος.

   i) Να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση της ευθείας του $\mathbb{R}^2$ η οποία περιέχει τα σημεία $(1, 1)$ και $(3, 4)$.

   ii) Να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση της ευθείας του $\mathbb{R}^2$ η οποία περιέχει τα σημεία (a, b) και (c, d). Πότε δεν ορίζεται μονοσήμαντα η εξίσωση;

10. (Κυρτό σύνολο) Έστω a, b δύο σημεία του $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο των σημείων $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ με

$$x = (1-t)a + tb, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

ονομάζεται ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα a και b.

Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **κυρτό** αν για κάθε $a, b \in S$ όλα τα σημεία x του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα a και b ανήκουν και αυτά στο S.

Κάθε σύνολο του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει μόνο ένα σημείο είναι κυρτό σύνολο. Επίσης, το κενό σύνολο θεωρείται κυρτό σύνολο.

   i) Να δειχθεί ότι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^2$ που ανήκουν σε μια ευθεία είναι κυρτό σύνολο.

   ii) Να δειχθεί ότι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^2$ που δεν ανήκουν σε μια συγκεκριμένη ευθεία δεν είναι κυρτό σύνολο.

iii) Να δειχθεί ότι αν A είναι μια οικογένεια κυρτών συνόλων του $\mathbb{R}^2$ τότε και η τομή τους είναι κυρτό σύνολο.

iv) Να δειχθεί ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$, όπου $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, $X \in \mathcal{M}_{2\times 1}$ και $B \in \mathcal{M}_{2\times 1}$ είναι κυρτό σύνολο.

Κεφάλαιο 4

Χαρακτηριστικά μεγέθη

4.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Έστω A: $n \times n$ μήτρα, X: $n \times 1$ μήτρα, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$).

Το σύστημα

$$AX = \lambda X$$

(ισοδύναμα $AX - \lambda X = O_{n\times1}$, ή $(A - \lambda I_n)X = O_{n\times1}$) ονομάζεται **χαρακτηριστικό σύστημα της** A.

Η μήτρα

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική μήτρα της** A.

Η ορίζουσα

$$\det(A - \lambda I_n) = f(\lambda) = \beta_n\lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_0$$

είναι πολυώνυμο του λ βαθμού n (με $\beta_n = (-1)^n$) και ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο της** A.

Η εξίσωση

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση της** A.

Οι ρίζες λ_i της χαρακτηριστικής εξίσωσης ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ ή $\lambda_i \in \mathbb{C}$) ονομάζονται **ιδιοτιμές** (ή **χαρακτηριστικές τιμές**) της A.

Παρατήρηση: Για κάθε ιδιοτιμή λ_i το ομογενές σύστημα $(A - \lambda_i I_n)X = O_{n\times1}$ έχει και μη μηδενικές λύσεις (αφού $\det(A - \lambda_i I) = 0$).

Οι **μη μηδενικές λύσεις** του συστήματος

$$(A - \lambda I_n)X = O_{n\times1}$$

ονομάζονται **χαρακτηριστικά διανύσματα** ή **ιδιοδιανύσματα της** A, **που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή** λ_i.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων της A (μαζί με το μηδενικό διάνυσμα) παράγουν ένα διανυσματικό χώρο που ονομάζεται **ιδιόχωρος της** A, **που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή** λ_i.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μιας τετραγωνικής μήτρας A ονομάζονται **χαρακτηριστικά μεγέθη** της A.

Παράδειγμα. *Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη της μήτρας A όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό σύστημα της A είναι

$$\begin{aligned}
AX = \lambda X &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} - \lambda I_3 \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & 6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Η παραπάνω 3×3 μήτρα είναι η χαρακτηριστική μήτρα της A.

Άρα, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 = 0 \\ 2x_1 + (-1-\lambda)x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + (6-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_n) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)\left((-1-\lambda)(6-\lambda) + 12\right) \\
&= (3-\lambda)(-6 + \lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 12) \\
&= (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\
&= 3\lambda^2 - 15\lambda + 18 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda \\
&= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω πολυώνυμο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A.

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση της A είναι

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_n)=0 &\Leftrightarrow \\
-\lambda^3+8\lambda^2-21\lambda+18=0 &\Leftrightarrow \\
(3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0 &\Leftrightarrow \\
(3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-2)=0 &\Leftrightarrow \\
-(\lambda-3)^2(\lambda-2)=0 &\Leftrightarrow \\
&\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2=3 \text{ (διπλή)}\\ \lambda_3=2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Άρα, οι ιδιοτιμές της A είναι οι

$$\lambda_1=\lambda_2=3, \lambda_3=2.$$

Για $\lambda_1=\lambda_2=3$ ισχύει ότι

$$(A-3I_3)=O_{3\times 1}\Leftrightarrow \begin{cases}0x_1=0\\ 2x_1-4x_2-2x_3=0\\ 3x_1+6x_2+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1=0\\ 2x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_3=-2x_2.\end{cases}$$

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=\lambda_2=3$ είναι

$$X=\begin{bmatrix}0\\ a\\ -2a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2\end{bmatrix},\ a\in\mathbb{R}^*.$$

Για $\lambda_3=2$ ισχύει ότι

$$(A-2I_3)=O_{3\times 1}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ 2x_1-3x_2-2x_3=0\\ 3x_1+6x_2+4x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ 3x_2+2x_3=0\\ 3x_2+2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_3=-\frac{3}{2}x_2.\end{cases}$$

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3=2$ είναι

$$X=\begin{bmatrix}0\\ b\\ -\frac{3}{2}b\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix},\ b\in\mathbb{R}^*.$$ □

Παράδειγμα. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A όπου*

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\ -2&4&0\\ 0&0&3\end{bmatrix}.$$

Λύση. Χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2=0\\ -2x_1+(4-\lambda)x_2=0\\ (3-\lambda)x_3=0.\end{cases}$$

Χαρακτηριστική μήτρα:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Χαρακτηριστική πολυώνυμο:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 15\lambda.$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 15\lambda = 0.$$

Ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5.$$

Ιδιοδιανύσματα: (δηλαδή μη μηδενικές λύσεις των αντίστοιχων συστημάτων):
Για $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}^*.$$

Για $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ 0x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R}^*.$$

Για $\lambda_3 = 5$:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -2c \\ 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}^*.$$ □

Παράδειγμα. *Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη της μήτρας A όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Χαρακτηριστική μήτρα:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(3 - \lambda) = 0.$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$
Ιδιοδιανύσματα:

Για $\lambda = 0$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -x_1 - x_2.$$

Άρα,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

όπου $|a| + |b| \neq 0$.
Παρατήρηση: Όταν τα ιδιοδιανύσματα έχουν πάνω από ένα ελεύθερο άγνωστο, τα διασπάμε (όπως προηγουμένως) γράφοντάς τα ως γραμμικό συνδυασμό άλλων (γραμμικά ανεξάρτητων) διανυσμάτων.

Για $\lambda = 3$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Το λύνουμε με τη μέθοδο Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3 \to R_3 + R_2 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 \to R_2 + 2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \to R_1 + 2R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Άρα

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3,$$

οπότε

$$X = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c \neq 0.$$

□

4.2 Βασικές ιδιότητες χαρακτηριστικών τιμών

Πρόταση 4.1. *Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές της $A \in \mathcal{M}_n$. Τότε:*

(i) $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

(ii) $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
Επομένως, η A είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή της.

(iii) Αν η A είναι τριγωνική, οι ιδιοτιμές της συμπίπτουν με τα στοιχεία της διαγωνίου της.

(iv) Αν η A είναι ερμιτιανή, τότε όλες οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικές, δηλαδή $\lambda_i \in \mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Επομένως, αν η A είναι συμμετρική, τότε όλες οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικές.

*(v) Η A επαληθεύει την χαρακτηριστική της εξίσωση (**θεώρημα Cayley-Hamilton**).*

(vi) Έστω ότι η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη. Αν τα λ, X είναι χαρακτηριστικά μεγέθη της αντιστρέψιμης μήτρας, τότε τα λ^{-1}, X είναι αντίστοιχα χαρακτηριστικά μεγέθη της A^{-1}, δηλαδή

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X.$$

(vii) Αν λ, X είναι χαρακτηριστικά μεγέθη της A, τότε τα λ^k, X είναι αντίστοιχα χαρακτηριστικά μεγέθη της A^k, δηλαδή

$$AX = \lambda X \Rightarrow A^k X = \lambda^k X.$$

Παράδειγμα: Είδαμε ότι για την

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (διπλή), $\lambda_3 = 2$. Ισχύει ότι

- $\mathrm{tr}A = 3 + (-1) + 6 = 8$, αλλά και $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + 3 + 2 = 8$, επαληθεύοντας την ιδιότητα 1.

- $\det A = 3(-6 + 12) = 18$, αλλά και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$, επαληθεύοντας την ιδιότητα 2.

- Η συμμετρική μήτρα $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ του παραδείγματος 2 έχει πραγματικές ιδιοτιμές 0, 3, 5, επαληθεύοντας την ιδιότητα 4.

- Για την μήτρα A του παραδείγματος 2 ισχύει ότι

  $-A^3 + 8A^2 - 21A + 18I_3 = O_3$

  επαληθεύοντας την ιδιότητα 5.

- Οι ιδιοτιμές της μήτρας

  $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

  είναι οι

  $$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \neq 0 \text{ (διπλή)}, \lambda_3 = 2 \neq 0,$$

  άρα η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη.

  Επίσης, στο παράδειγμα 3 βρήκαμε ότι οι ιδιοτιμές της μήτρας

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  είναι οι

  $$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ (διπλή)}, \lambda_3 = 3$$

  άρα η μήτρα A δεν είναι αντιστρέψιμη.

4.3 Διαγωνιοποίηση

Έστω $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Λέμε ότι η A **διαγωνιοποιείται** όταν υπάρχει αντιστρέψιμη μήτρα $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ με

$$P^{-1}AP = D,$$

όπου D διαγώνια. (Στην περίπτωση αυτή, οι μήτρες D, A λέγονται **όμοιες**.)

Πρόταση 4.2. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Η μήτρα A διαγωνιοποιείται αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Πρόταση 4.3. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Τα ιδιοδιανύσματα της A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Πόρισμα 4.4. *Έστω $A \in \mathcal{M}_n$. Αν η A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε διαγωνιοποιείται.*

Διαδικασία Διαγωνιοποίησης

1. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ της A (όχι κατ΄ ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους), λύνοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση.

2. Βρίσκουμε τις βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων:
   - Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα για κάθε λ_i.
   - Κάθε ιδιοδιάνυσμα το εκφράζουμε ως γραμμικό συνδυασμό ενός, ή περισσότερων, γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν το χώρο. (Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων αυτών διανυσμάτων πρέπει να είναι συνολικά ίσο με n, αλλιώς η A δεν διαγωνιοποιείται.)

3. Φτιάχνουμε τη μήτρα $P \in \mathcal{M}_n$ με στήλες τα παραπάνω n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, (η οποία είναι πάντοτε αντιστρέψιμη). Τότε,

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα. *Να διαγωνιοποιηθεί η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση.
1ο βήμα: Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1.$$

2ο βήμα: Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ a \in \mathbb{R}^* \text{ και } \begin{bmatrix} 3b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b \in \mathbb{R}^*.$$

3ο βήμα: Βρίσκουμε τις μήτρες P και D:

Αν διαλέξουμε τα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, (για $a = 1$) και $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, (για $b = 1$), έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε, βρίσκουμε την $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, και έχουμε

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Παρατήρηση: Για κάθε διαφορετική επιλογή ιδιοδιανύσματος, σχηματίζεται διαφορετική μήτρα P.
Παρατήρηση: Η υπόθεση της προηγούμενης πρότασης (να έχει η A διακεκριμένες ιδιοτιμές) είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία, δηλαδή αν η A δεν έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, δεν γνωρίζουμε αν διαγωνιοποιείται ή όχι.

Έτσι, η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$, που έχει $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (διπλή) και $\lambda_3 = 2$ (δηλ. δεν έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές) *δεν διαγωνιοποιείται.*

Πράγματι, για $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$, ενώ για $\lambda_3 = 2$, είναι τα $b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

Τα ιδιοδιανύσματα αυτά δίνουν προφανώς τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ που είναι μόνο $2 \neq 3 = n$.

Άρα, με βάση την σχετική παρατήρηση στο βήμα 2 της διαδικασίας διαγωνιοποίησης, ο A δεν διαγωνιοποιείται.

Αντίθετα όμως, ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα.

Η $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ που επίσης δεν έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$) *διαγωνιοποιείται.* Πράγματι, όπως είδαμε ήδη, τα ιδιοδιανύσματα της A είναι τα

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \text{όπου } a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

Σχηματίζουμε λοιπόν την

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και παίρνουμε

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D.$$

Παράδειγμα. *Να διαγωνιοποιηθεί η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Λύση.
1ο βήμα: Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -(\lambda+5)(\lambda^2+\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -5, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1.$$

Οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές ανά δύο, άρα η A είναι διαγωνιοποίησιμη.
2ο βήμα: Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα και τους ιδιόχωρους: Από το χαρακτηριστικό σύστημα προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - (5+\lambda)x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - (5+\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Για $\lambda = -5$ έχουμε ότι

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Άρα

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}^*.$$

Για $\lambda = -2$ έχουμε ότι

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2. \end{cases}$$

Άρα

$$X = \begin{bmatrix} -b \\ b \\ -b \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ b \in \mathbb{R}^*.$$

Για $\lambda = 1$ έχουμε ότι

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Άρα

$$X = \begin{bmatrix} -2c \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ c \in \mathbb{R}^*.$$

3ο βήμα: Βρίσκουμε τις μήτρες P και D

Από τα προηγούμενα,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε την

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα,

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

4.4 Βασική εφαρμογή διαγωνιοποίησης

Θα μας χρειαστούν τα παρακάτω αποτελέσματα:

1. Για κάθε διαγώνια μήτρα

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

   ισχύει ότι

$$D^k = \begin{bmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^k \end{bmatrix}$$

   Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. (Άσκηση.)

2. Αν η P είναι αντιστρέψιμη, τότε

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

   Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. (Άσκηση.)

Έστω τώρα $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Αν η A διαγωνιοποιείται, τότε η A^k μπορεί να υπολογισθεί ως εξής: Αν $P^{-1}AP = D$ μια διαγωνιοποίηση της A, τότε

$$(P^{-1}AP)^k = D^k \overset{2}{\Rightarrow} P^{-1}A^kP = D^k \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}.$$

Δεδομένου ότι η D^k υπολογίζεται εύκολα (λόγω της 1), υπολογίζουμε και την A^k.

Παράδειγμα. *Να βρεθεί η μήτρα A^k, όπου $k \in \mathbb{N}$ και*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 6 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -2,$$

που δίνουν τα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ b \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } a, b, c \in \mathbb{R}^*,$$

δηλαδή

$$a \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

Σχηματίζουμε λοιπόν την

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

με στήλες τα ιδιοδιανύσματα (για $a = b = c = 1$).

Βρίσκουμε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

και άρα,

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -4^k & 0 \\ 0 & 4^k & -(-2)^k \\ 0 & 4^k & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4^k & -4^k & -4^k \\ 4^k - (-2)^k & 4^k & 4^k - (-2)^k \\ 4^k + (-2)^k & 4^k & 4^k + (-2)^k \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

□

4.5 Φασματικό θεώρημα

Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών μιας τετραγωνικής μήτρας A ονομάζεται **φάσμα** της μήτρας και συμβολίζεται με **sp(A)**.

Πρόταση 4.5 (Φασματικό θεώρημα). *Για κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ και κάθε πολυώνυμο $q(x)$ ισχύει ότι*

$$\mathrm{sp}(q(A)) = \{q(\lambda) : \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}.$$

Απόδειξη. Θα δειχθεί ότι $\{q(\lambda) : \lambda \in \mathrm{sp}(A)\} \subseteq \mathrm{sp}(q(A))$.

(Η απόδειξη της σχέσης $\mathrm{sp}(q(A)) \subseteq \{q(\lambda) : \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$ παραλείπεται.)

Έστω

$$q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m \text{ με } a_m \neq 0.$$

και λ μια ιδιοτιμή της μήτρας A, δηλαδή $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$. Θα δείξουμε ότι $q(\lambda) \in \mathrm{sp}(q(A))$.

Αρκεί, ισοδύναμα, να δείξουμε ότι η μήτρα $q(A) - q(\lambda)I$ δεν είναι αντιστρέψιμη. (Υπενθυμίζουμε ότι αν το λ είναι ιδιοτιμή της μήτρας A, τότε και μόνο τότε η μήτρα $A - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμη.)

Ισχύει ότι

$$q(A) - q(\lambda)I = a_1(A - \lambda I) + a_2(A^2 - \lambda^2 I) + \cdots + a_m(A^m - \lambda^m I)$$

Από την ταυτότητα

$$A^k - \lambda^k I = (A - \lambda I)(A^{k-1} + \lambda A^{k-2} + \cdots + \lambda^{k-2}A + \lambda^{k-1}I)$$

προκύπτει ότι η μήτρα $A - \lambda I$ είναι παράγοντας κάθε όρου του αθροίσματος, οπότε υπάρχει πολυώνυμο $r(A)$ ώστε

$$q(A) - q(\lambda)I = (A - \lambda I)r(A).$$

Αν η μήτρα $q(A) - q(\lambda)I$ είναι αντιστρέψιμη, τότε

$$I = (A - \lambda I)r(A)(q(A) - q(\lambda)I)^{-1}$$

δηλαδή, η μήτρα $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμη, άτοπο.

Άρα, η μήτρα $q(A) - q(\lambda)I$ είναι μη αντιστρέψιμη, δηλαδή $|q(A) - q(\lambda)I| = 0$, οπότε το $q(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή της μήτρας $q(A)$, δηλαδή $q(\lambda) \in \mathrm{sp}(q(A))$. □

Παράδειγμα. *Έστω A μια 3×3 μήτρα με φάσμα $\mathrm{sp}(A) = \{0, 1, 2\}$. Να βρεθεί το φάσμα της μήτρας $B = A^2 + 3A - I$.*

Λύση. Η μήτρα $B = A^2 + 3A - I$, η οποία ισούται με $q(A)$ όπου $q(x) = x^2 + 3x - 1$ έχει φάσμα $\mathrm{sp}(q(A)) = \{q(0), q(1), q(2)\} = \{-1, 3, 9\}$. □

Παρατήρηση: Από τα παραπάνω, προκύπτει επίσης ότι η ορίζουσα της μήτρας A ισούται με $0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$, δηλαδή η μήτρα A είναι μη αντιστρέψιμη, ενώ η ορίζουσα της μήτρας $q(A)$ ισούται με $(-1) \cdot 3 \cdot 9 = -27$, άρα η μήτρα $q(A)$ είναι αντιστρέψιμη.

Επιπλέον, το ίχνος της μήτρας A ισούται με $0 + 1 + 2 = 3$, ενώ το ίχνος της μήτρας $q(A)$ ισούται με $-1 + 3 + 9 = 11$.

4.6 Συμπληρωματικές λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 4.1. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A είναι το πολυώνυμο

$$f(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $f(\lambda)$ είναι οι ιδιοτιμές της μήτρας A.

Το $f(\lambda)$ έχει δύο ρίζες τα $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 1$, άρα οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι οι αριθμοί 0 και 1.

Τα ιδιοδιανύσματα X της μήτρας A προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος

$$AX = \lambda X$$

αντικαθιστώντας στη θέση του λ τις ιδιοτιμές της μήτρας A.

Για $\lambda = \lambda_1 = 0$ και $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή, ισοδύναμα

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & = 0 \end{cases}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$x_1 = -x_2$$

Επομένως

$$X = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ x_2 \in \mathbb{R}$$

Άρα, το διάνυσμα $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 0$.

Για $\lambda = \lambda_2 = 0$ και $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ή, ισοδύναμα

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & = x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & = x_2 \end{cases}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$x_1 = x_2$$

Επομένως

$$X = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \ x_2 \in \mathbb{R}$$

Άρα, το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 1$. Συνεπώς, τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A είναι τα $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. □

Παρατηρήσεις: Όπως βλέπουμε σ' αυτό το παράδειγμα, μια μήτρα μπορεί να έχει και μηδενικές ιδιοτιμές, αντίθετα τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας είναι (πάντα) μη μηδενικά.

Οι ιδιοτιμές μιας μήτρας είναι μοναδικές, ενώ για τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας υπάρχουν άπειρες επιλογές. Στο παράδειγμα αυτό, αντί του ιδιοδιανύσματος $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ μπορούσαμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε μη μηδενικό πολλαπλάσιο αυτού, όπως για παράδειγμα το $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$, ομοίως αντί για το $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ μπορούσαμε να επιλέξουμε το $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ο λόγος για τον οποίο υπάρχουν άπειρες επιλογές είναι ότι αν X_1, X_2 είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ μιας μήτρας, τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους $c_1X_1 + c_2X_2$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα της μήτρας αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ. Λόγω αυτής της ιδιότητας τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας A που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ ορίζουν ένα διανυσματικό χώρο, ο οποίος ονομάζεται **ιδιόχωρος** της μήτρας A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Άσκηση 4.2. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 4 \\ 2 & -x & 2 \\ 4 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 4 \\ 0 & -x & 2 \\ 1+x & 2 & 3-x \end{vmatrix} = (1+x) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -x & 2 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix}$$
$$= (1+x) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 7-x \\ 0 & -x & 2 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = (1+x) \begin{vmatrix} 4 & 7-x \\ -x & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -(x+1)^2(x-8).$$

Οι χαρακτηριστικές τιμές είναι -1 και 8.

Τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα που αντιστοιχούν στη χαρακτηριστική τιμή $\lambda = -1$, προκύπτουν από το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 0 \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

δηλαδή

$$x_2 = -2x_1 - 2x_3$$

Άρα, τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $(1, -2, 0)$ και $(0, -2, 1)$ παράγουν όλα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -1$.

Ανάλογα, για $\lambda = 8$ έχουμε το ιδιοδιάνυσμα $(2, 1, 2)$. □

Άσκηση 4.3. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Ισχύει ότι $p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$.

Άρα $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Εύκολα προκύπτει ότι ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα

$$(-1, -1, 1)$$

ενώ ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα

$$(1, 0, 1), (-1, 1, 0)$$ □

Άσκηση 4.4. *Να δειχθεί ότι το χαρακτηριστικό σύστημα $AX = \lambda X$, μια μήτρας $A \in \mathcal{M}_n$ έχει πάντα και μη μηδενική λύση, όταν λ είναι ιδιοτιμή της μήτρας A.*

Λύση. Έστω ότι λ είναι ιδιοτιμή της μήτρας A, τότε το λ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της A δηλαδή $f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$. Επομένως, η μήτρα $A - \lambda I$ είναι μη αντιστρέψιμη.

Έστω λ μια ιδιοτιμή της μήτρας A. Αν το σύστημα $AX = \lambda X$ έχει ως μοναδική λύση το μηδενικό διάνυσμα, τότε για το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I)X = O_{n\times 1}$, έπεται ότι $|A - \lambda I| \neq 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Παρατήρηση: Από την άσκηση αυτή προκύπτει ότι σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα της μήτρας.

Άσκηση 4.5. *Να δειχθεί ότι αν X_1, X_2 είναι ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας $A \in \mathcal{M}_n$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2 τότε τα X_1, X_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Λύση. Για να δείξουμε ότι τα X_1, X_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα θεωρούμε την εξίσωση

$$c_1X_1 + c_2X_2 = O_{n\times 1} \tag{4.1}$$

και θα δείξουμε $c_1 = c_2 = 0$.

Πολλαπλασιάζουμε τους όρους της εξίσωσης (4.1) με A (από τα αριστερά)

$$c_1AX_1 + c_2AX_2 = O_{n\times 1}$$

επειδή $AX_1 = \lambda_1X_1$ και $AX_2 = \lambda_2X_2$ προκύπτει ότι

$$c_1\lambda_1X_1 + c_2\lambda_2X_2 = O_{n\times 1} \tag{4.2}$$

Πολλαπλασιάζουμε τους όρους της εξίσωσης (4.1) με $-\lambda_1$ και προκύπτει ότι

$$-c_1\lambda_1 X_1 - c_2\lambda_1 X_2 = O_{n\times 1} \tag{4.3}$$

Προσθέτοντας κατα μέλη τις σχέσεις (4.2) και (4.3) έχουμε ότι

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 = O_{n\times 1}$$

και επειδή $X \neq O_{n\times 1}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ έπεται ότι $c_2 = 0$.

Αντικαθιστώντας το $c_2 = 0$ στη σχέση (4.1) προκύπτει ότι $c_1 X_1 = O_{n\times 1}$, άρα και $c_1 = 0$.

Επομένως, τα X_1, X_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Παρατήρηση: Στην άσκηση αυτή αποδείξαμε κάτι πολύ σημαντικό. Οποιαδήποτε δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές μιας μήτρας είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως, αν για κάθε συγκεκριμένη ιδιοτιμή μιας μήτρας επιλέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, η ένωση όλων αυτών των ιδιοδιανυσμάτων που επιλέγχηκαν, θα περιέχει διανύσματα που είναι και αυτά γραμμικώς ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.6. *Να δειχθεί ότι κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ γράφεται στη μορφή*

$$AP = PD$$

*όπου $D \in \mathcal{M}_n$ είναι μια διαγώνια μήτρα με στοιχεία της ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ της μήτρας A (μερικές από τις οποίες μπορεί να είναι μιγαδικές και να εμφανίζονται περισσότερες από μια φορά, όσες και η πολλαπλότητά τους ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της μήτρας A) και $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι μια μήτρα με στήλες μια **οικογένεια** ιδιοδιανύσματων της μήτρας A.*

Λύση. Έστω $D = [d_{ij}]$ η διαγώνια $n \times n$ μήτρα με στοιχεία της ιδιοτιμές της μήτρας A έτσι ώστε στη στήλη j να εμφανίζεται η ιδιοτιμή λ_j (δηλαδή $d_{jj} = \lambda_j$) και $P = [p_{ij}]$ η $n \times n$ μήτρα της οποίας η στήλη j είναι **κάποιο** από τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ_j, το οποίο ας συμβολίσουμε με $X_{g(j)}$.

Τότε, η στήλη j της μήτρας PD είναι το διάνυσμα $\lambda_j X_{g(j)}$.

Πράγματι, έστω $X_{g(j)} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, (δηλαδή $p_{ij} = c_i$).

Το πρώτο στοιχείο της γραμμής j της μήτρας PD ισούται με

$$\sum_{k=1}^{n} p_{1k}d_{kj} = p_{1j} \cdot d_{jj} = c_1\lambda_j$$

Γενικά, το i-στό στοιχείο της γραμμής j της μήτρας PD ισούται με

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik}d_{kj} = p_{ij} \cdot d_{jj} = c_i\lambda_j$$

Άρα, η στήλη j της μήτρας PD είναι το διάνυσμα $\lambda_j \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \lambda_j X_{g(j)}$.

Αντίστοιχα, η στήλη j της μήτρας AP είναι το διάνυσμα $AX_{g(j)}$.

Πράγματι, έστω $A = [a_{ij}]$. Το i-στό στοιχείο της γραμμής j της μήτρας AP ισούται με

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k$$

Άρα, η στήλη j της μήτρας AP είναι το διάνυσμα $A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = AX_{g(j)}$

Επειδή

$$AX_{g(j)} = \lambda_j X_{g(j)}$$

προκύπτει ότι οι $n \times n$ μήτρες AP και PD έχουν τις ίδιες στήλες, άρα

$$AP = PD. \qquad \square$$

Παρατηρήσεις: Αν τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας P είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε η μήτρα P αντιστρέφεται. Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$P^{-1}AP = D$$

δηλαδή η μήτρα A διαγωνιοποιείται.

Στην περίπτωση αυτή $A = PDP^{-1}$. Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται στον υπολογισμό δυνάμεων της μήτρας A αφού ισχύει ότι

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Άσκηση 4.7. *Να δειχθεί ότι δύο όμοιες μήτρες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.*

Λύση. Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$ όμοιες μήτρες. Υπάρχει αντιστρέψιμη μήτρα P ώστε

$$B = P^{-1}AP.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας B είναι

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_nP) \\ &= \det(P^{-1}(AP - \lambda I_nP)) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= \det(P^{-1}\det(A - \lambda I_n)\det(P)) \\ &= \det(A - \lambda I_n) \end{aligned} \qquad \square$$

Άσκηση 4.8. *Να βρεθεί ένας τύπος για την ακολουθία των αριθμών Fibonacci f_n όπου $f_0 = f_1 = 1$ και $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ για κάθε $n \geqslant 2$.*

Λύση. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει ότι

$$\begin{cases} f_n &= 1 \cdot f_{n-1} + 1 \cdot f_{n-2} \\ f_{n-1} &= 1 \cdot f_{n-1} + 0 \cdot f_{n-2} \end{cases}$$

Οι σχέσεις αυτές ορίζουν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα f_n, f_{n-1}, f_{n-2} το οποίο μπορεί να γραφεί ως ισότητα μητρών ως εξής:

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix},$$

το οποίο ισχύει για κάθε $n \geqslant 2$.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα αυτή, μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή, ότι για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix},$$

και επειδή $f_0 = f_1 = 1$ τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Επομένως, ο υπολογισμός του f_n ανάγεται στην εύρεση της πρώτης γραμμής της μήτρας $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}$. Αν a, b είναι τα αντίστοιχα στοιχεία αυτή της γραμμής, τότε $f_n = 1 \cdot a + 1 \cdot b$.

Προκειμένου να βρούμε αυτά τα στοιχεία θα διαγωνιοποιήσουμε την μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A

$$f(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Οι ρίζες λ_1, λ_2 της χαρακτηριστικής εξίσωσης $f(\lambda) = 0$ είναι οι ιδιοτιμές της μήτρας A και ισχύει ότι

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Για $\lambda = \lambda_1$ και $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ από το χαρακτηριστικό σύστημα προκύπτει ότι

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 x_1 \\ x_1 = \lambda_1 x_2 \end{cases}$$

Δηλαδή

$$x_1 = \lambda_1 x_2$$

επομένως

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \ x_2 \in \mathbb{R}.$$

Άρα, το διάνυσμα $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ_1.

Ανάλογα, προκύπτει ότι το διάνυσμα $\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ_2.

Επομένως, η μήτρα A διαγωνιοποιείται και γράφεται στη μορφή

$$A = PDP^{-1}$$

όπου $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ και $P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Η αντίστροφη της μήτρας P είναι η μήτρα

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}, -\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \\ -\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, η ζητούμενη μήτρα A^{n-1} είναι η

$$A^{n-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή, επιστρέφοντας στο πρόβλημα, έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έπομένως

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \lambda_2 \\ -1 + \lambda_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \lambda_2)\lambda_1^{n-1} \\ (\lambda_1 - 1)\lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1(1 - \lambda_2)\lambda_1^{n-1} + \lambda_2(\lambda_1 - 1)\lambda_2^{n-1} \\ 1(1 - \lambda_2)\lambda_1^{n-1} + 1(\lambda_1 - 1)\lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left((1 - \lambda_2)\lambda_1^{n-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} + (\lambda_1 - 1)\lambda_2^{n-1} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_1^{n-1} + \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_2^{n-1} \tag{4.4}$$

Όσον αφορά το f_n από την σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$f_n = \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^n + \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^n$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των λ_1, λ_2 προκύπτει ότι

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \tag{4.5}$$

Για παράδειγμα, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = 5$, $f_5 = 8$, $f_6 = 13$, $f_7 = 21$. □

Παρατηρήσεις: Η μορφή της σχέσης (4.4) είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα.

Η μήτρα $\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων της μήτρας A καθώς και δυνάμεων των ιδιοτιμών της. Οι σταθερές c_1, c_2 που εμφανίζονται στο άθροισμα εξαρτώνται από τις αρχικές τιμές της ακολουθίας f_n.

Αν αλλάξουν οι αρχικές τιμές, θα αλλάξουν μόνο οι σταθερές c_1, c_2 και πάλι η λύση θα έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_1^{n-1} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_2^{n-1} \tag{4.6}$$

οπότε ο f_n θα εκφράζεται στη μορφή $f_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$.

Ότι συμβαίνει στο παράδειγμα της άσκησης αυτής δεν είναι συμπτωματικό. Όλες οι ακολουθίες που ικανοποιούν μια γραμμική αναγωγική σχέση, όπως η $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, έχουν τύπους της μορφής $c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_n\lambda_k^n$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι ιδιοτιμές μιας μήτρας που ορίζεται με τρόπο ανάλογο με αυτόν της μήτρας A για την ακολουθία των αριθμών Fibonacci.

Επίσης, προσέξτε ότι η μορφή του τύπου για την ακολουθία f_n δεν προδίδει πως η ακολουθία f_n λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές. Με κάποιο τρόπο όμως οι άρρητοι αριθμοί που εμφανίζονται στις δύο δυνάμεις αλληλοαναιρούνται και προκύπτει ακέραια τιμή.

Μια ακόμα ενδιαφέρουσα πληροφορία που μας δίνει η σχέση (4.5) είναι η εξής: Διαιρώντας το πρώτο και το δεύτερο μέλος με $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}/\sqrt{5}$ προκύπτει ότι

$$\frac{f_n}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} = 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}$$

Επειδή $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ καθώς το n μεγαλώνει η έκφραση $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}$ τείνει στο μηδέν, οπότε το πρώτο μέλος τείνει στο 1.

Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι καθώς το n μεγαλώνει η f_n είναι “σχεδόν” ίση με $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Στον επόμενο πίνακα, δίνονται για σύγκριση ορισμένες τιμές της f_n και της $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

n	f_n	$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$
1	1	1.17
2	2	1.89
3	3	3.06525
4	5	4.95967
10	89	88.9978
20	10946	10945.99998
25	121393	121393.0000016

Παρατηρούμε ότι οι δύο εκφράσεις έχουν τις αντίστοιχες τιμές πολύ ‘‘κοντά’’. Συγκεκριμένα, η τιμής της f_n είναι ο πλησιέστερος ακέραιος της δεύτερης έκφρασης.

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι η ιδιοτιμή $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι ο γνωστός αριθμός της **χρυσής τομής** που συμβολίζεται με ϕ.

Άσκηση 4.9. *(Μια γεωμετρική ερμηνεία των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων)*

Λύση. Έστω η μήτρα

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Η μήτρα T μπορεί να θεωρηθεί ως ένας (γραμμικός) μετασχηματισμός των σημείων του επιπέδου xy, ο οποίος μετασχηματίζει το σημείο $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ στο σημείο $P' = TP$. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε:

Το σημείο $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ μέσω της μήτρας T μεταφέρεται στο σημείο $A' = TA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Το σημείο $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ μέσω της μήτρας T μεταφέρεται στο σημείο $B' = TB = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

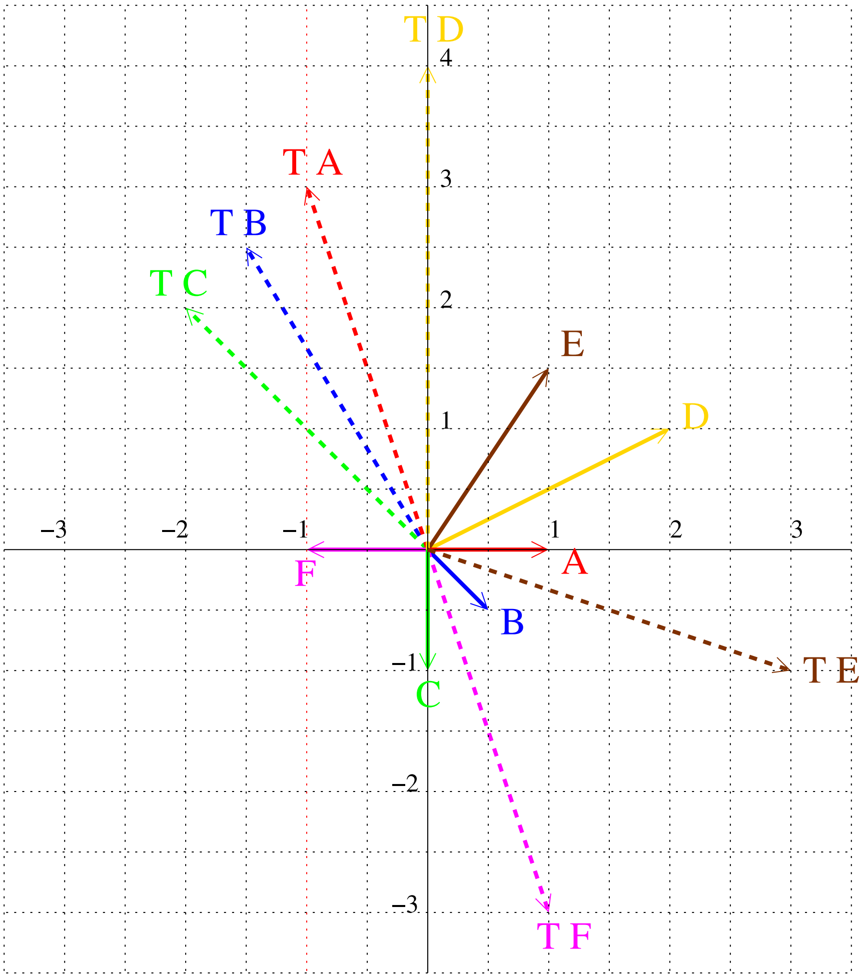
Το σημείο $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ μέσω της μήτρας T μεταφέρεται στο σημείο $C' = TC = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Το σημείο $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ μέσω της μήτρας T μεταφέρεται στο σημείο $D' = TD = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Το σημείο $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ μέσω της μήτρας T μεταφέρεται στο σημείο $E' = TE = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Το σημείο $F = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ μέσω της μήτρας T μεταφέρεται στο σημείο $F' = TF = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί φαίνονται και στο επόμενο σχήμα:



Τι ιδιότητες έχει ο μετασχηματισμός T; Για παράδειγμα, υπάρχουν σημεία P_1, P_2 με $P_1 \neq P_2$ και $TP_1 = TP_2$;

Παρατηρούμε ότι $|T| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$. Άρα, η μήτρα T αντιστρέφεται, επομένως αν $TP_1 = TP_2$, πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με την μήτρα T^{-1} προκύπτει ότι $P_1 = P_2$, δηλαδή ο μετασχηματισμός T είναι 1-1.

Υπάρχουν σημεία P τα οποία παραμένουν αναλλοίωτα από τον μετασχηματισμό T; Δηλαδή υπάρχουν P ώστε $TP = P$;

Κάθε λύση της εξίσωσης $TP = P$, αν υπάρχει τέτοια, θα είναι και λύση του χαρακτηριστικού συστήματος $TX = \lambda X$ της μήτρας T, οπότε η T πρέπει να έχει ιδιοτιμή $\lambda = 1$ και ιδιοδιάνυσμα το P.

Στο παράδειγμα μας, έχουμε

$$f(\lambda) = |T - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(2+\lambda) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 4$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι τα 1 και -4.

Άρα, η μήτρα T έχει ιδιοτιμές το $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -4$.

Για $\lambda = \lambda_1 = 1$ και $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ από το χαρακτηριστικό σύστημα της T έχουμε ότι

$$TX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει ότι $x_1 = x_2$, άρα το X έχει τη μορφή

$$X = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

Επομένως, το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A (όπως και κάθε διάνυσμα $\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$ με $c \in \mathbb{R}^*$).

Ειδικά αυτά τα ιδιοδιανύσματα, δεν μεταβάλλονται από τον μετασχηματισμό T, αφού ισχύει $TX = 1 \cdot X$. Για παράδειγμα

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι όλα αυτά τα διανύσματα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

Τι συμβαίνει όμως με τα ιδιοδιανύσματα της άλλης ιδιοτιμής, της $\lambda_2 = -4$.

Για $\lambda = \lambda_2 = -4$ και $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ από το χαρακτηριστικό σύστημα της T έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1 \\ -4x_2 \end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει ότι $x_1 = -\frac{2}{3}x_2$, άρα το X έχει τη μορφή

$$X = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Επομένως, το διάνυσμα $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A (όπως και μη μηδενικό πολλαπλάσιό του). Πολλαπλασιάζοντας με 3 προκύπτει το διάνυσμα $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Παρατηρήστε ότι όλα αυτά τα διανύσματα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = -\frac{3}{2}x$.

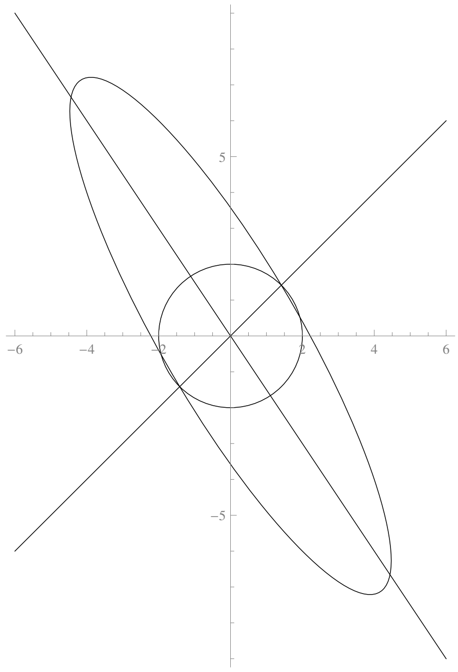
Τι συμβαίνει στο $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ όταν εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός T; Την απάντηση δίνει το χαρακτηριστικό σύστημα $T \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$, δηλαδή το διάνυσμα παραμένει πάνω στην ίδια ευθεία αλλά αλλάζει φορά και το μήκος του τετραπλασιάζεται.

Συνοψίζοντας, ο μετασχηματισμός T απεικονίζει κάθε σημείο P του επιπέδου σε ένα μοναδικό σημείο $P' = PT$. Οι ιδιοτιμές της μήτρας T είναι το 1 και το -4 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα σημεία των ευθειών $y = x$ και $y = -\frac{3}{2}x$.

Κάθε σημείο αυτών των ευθειών παραμένει πάνω στην ίδια ευθεια. Τα μεν σημεία της ευθείας $y = x$ παραμένουν στην ίδια θέση, αφού οι συντεταγμένες τους πολλαπλασιάζονται με 1, οι δε συντεταγμένες των σημείων της ευθείας $y = -\frac{3}{2}x$ πολλαπλασιάζονται με το -4, την άλλη ιδιοτιμή της T.

Όλα τα υπόλοιπα σημεία, εκτός των δύο ευθειών, περιστρέφονται γύρω από την αρχή των αξόνων και μεταβάλλεται η απόσταση τους από την αρχή των αξόνων.

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται οι ευθείες $y = x$, $y = -\frac{3}{2}x$, ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ καθώς ο μετασχηματισμός των σημείων αυτού του κύκλου, μέσω του μετασχηματισμού T, τα οποία ανήκουν, όπως αποδεικνύεται, πάνω σε μια έλλειψη. (Παρατηρήστε ότι οι ευθείες $y = x$ και $y = -\frac{3}{2}x$ δεν συμπτίπτουν με τους άξονες της έλλειψης. Μπορείτε να δώσετε μια ερμηνεία γιατί συμβαίνει αυτό;). (Απάντηση: Οι ευθείες $y = x$ και $y = -\frac{3}{2}x$ δεν είναι κάθετες.)



□

4.7 Ασκήσεις προς επίλυση

1. (Σωστό ή λάθος) Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να εξετασθεί αν είναι σωστή ή λάθος. (Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.)

   Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$.

   i) Αν $A^2 = 0$ και λ ιδιοτιμή της A, τότε $\lambda = 0$.

   ii) Αν $A^k = 0$ για κάθε $k \geqslant 2$, τότε $A = 0$.

   iii) Αν $A^k = 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$, τότε $\operatorname{tr}(A) = 0$.

   iv) Αν $A^k = 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$, τότε $|A| = 0$.

   v) Αν $\operatorname{tr}(A) = 0$, τότε $|A| = 0$.

   vi) Αν όλες οι ιδιοτιμές της A είναι μηδενικές, τότε $A = \mathbb{O}_n$.

   vii) Αν η A έχει δύο ίδιες ιδιοτιμές, τότε δεν διαγωνιοποιείται.

   viii) Αν η A είναι συμμετρική μήτρα, τότε όλες οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικές.

2. (Χαρακτηριστικά μεγέθη) Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω μητρών

   i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

   ii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

   iv) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

   v) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$

   vi) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

   vii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   viii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   ix) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

3. (Διαγωνιοποίηση μήτρας) Να διαγωνιοποιηθούν, όπου είναι δυνατόν, οι μήτρες της προηγούμενης άσκησης, στη συνέχεια να βρεθούν οι δυνάμεις των μητρών A που διαγωνιοποιούνται καθώς και να υπολογισθεί το γινόμενο $A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4. (Ιδιοτιμές μήτρας) Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες οι μήτρα $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμή ίση με 1. Το ίδιο ερώτημα για ιδιοτιμή ίση με 2.

5. (Ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές μήτρας) Να βρεθεί η 2×2 μήτρα A με ιδιοτιμές 1 και 4 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Υπόδειξη: Η A είναι διαγωνιοποίησιμη.)

6. (Τετραγωνική ρίζα μήτρας) Να βρεθεί μια μήτρα B ώστε

   $$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Είναι η απάντηση είναι μοναδική;

7. (Ιδιότητες ιδιοδιανυσμάτων) Να δειχθεί ότι αν X είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A, τότε και το διάνυσμα cX, όπου $c \neq 0$, είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A.

8. (Γραμμική ανεξάρτησία ιδιοδιανυσμάτων) Να δειχθεί ότι αν X_1, X_2 είναι ιδιοδιανύσματα της μήτρας A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 αντίστοιχα, με $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε το διάνυσμα $X_1 + X_2$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A.

9. (Στοχαστικές μήτρες)

   i) Να δειχθεί ότι κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ στην οποία το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με 1, έχει ως ιδιοτιμή το 1.

   ii) Να δειχθεί ότι κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ στη οποία το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με c, έχει ως ιδιοτιμή το c.

10. (Χαρακτηριστικό πολυώνυμο)

   i) Έστω $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ να αποδειχθεί ότι
   $$\det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det(A).$$

   ii) Έστω $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ να αποδειχθεί ότι $\det(\lambda I_3 - A)$
   $= \lambda^3 - \lambda^2(\mathrm{tr}A) + \lambda(\mathrm{tr}(\mathrm{adj}A)) - \det(A).$

11. (i) (Χαρακτηριστικό πολυώνυμο) Να δειχθεί ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(x)$ της μήτρας
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$
   είναι το $p(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$.

   (ii) Να βρεθεί μια 4×4 μήτρα A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο
   $$p(x) = -5 + 3x + 2x^2 + 6x^3 + x^4.$$

12. (Θεώρημα Cayley - Hamilton) Δίδεται η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   i) Να δειχθεί ότι $A^2 - 6A + 5I_2 = O_2$.

   ii) Να δειχθεί ότι $A^3 = 31A - 30I_2$.

   iii) Να δειχθεί ότι $A^{-1} = \frac{6}{5}I_2 - \frac{1}{5}A$.

13. (Θεώρημα Cayley - Hamilton) Δίδεται η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

   i) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A.

   ii) Να αποδειχθεί ότι
   $$A^{-1} = -\frac{1}{6}A^2 + \frac{2}{3}A - \frac{1}{6}I_3.$$

   iii) Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας της μήτρας $(A^3 - 4A^2 + A)^{2014}$.

14. (Φασματικό θεώρημα) Έστω ότι η 3×3 μήτρα A έχει ιδιοτιμές $1, 1, 2$. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς; Να δοθεί ένα αντιπαράδειγμα στην περίπτωση όπου είναι ψευδείς.

   i) Η A είναι αντιστρέψιμη.

   ii) Η A είναι διαγωνιοποίησιμη.

   iii) Η A δεν είναι διαγωνιοποίησιμη.

15. (Φασματικό θεώρημα) Μια 5×5 μήτρα A έχει ιδιοτιμές $1, 1, 2, 3, 4$.

   i) Να δειχθεί ότι η μήτρα $A - I$ δεν είναι αντιστρέψιμη.

   ii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, η ορίζουσα και το ίχνος της μήτρας $A^3 - 3A + 5I$.

   iii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, η ορίζουσα και το ίχνος της μήτρας $A^{-2} - 3A^{-1} + 5I$.

16. (Φασματικό θεώρημα) Αν μια 3×3 μήτρα A έχει ιδιοτιμές $0, 1, 2$, να βρεθούν οι ιδιοτιμές, η ορίζουσα και το ίχνος της μήτρας $A(A - I)(A - 2I)$.

17. (Ομοιες μήτρες)

   i) Να αποδειχθεί ότι η σχέση ομοιότητας είναι σχέση ισοδυναμίας.

   ii) Ποιες $n \times n$ μήτρες είναι όμοιες με την ταυτοτική μήτρα I_n;

   iii) Να δειχθεί ότι δύο όμοιες μήτρες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο (και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές).

   iv) Να δειχθεί ότι η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ δεν είναι όμοια με τη μήτρα $A + I_n$.

   v) Να δειχθεί ότι αν οι μήτρες A, B είναι όμοιες, τότε και οι μήτρες A^t, B^t είναι επίσης όμοιες, καθώς και οι μήτρες A^k, B^k για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Επίσης, να δειχθεί ότι αν A είναι αντιστρέψιμη, τότε και οι μήτρες A^{-1}, B^{-1} είναι όμοιες. Επιπρόσθετα, να δειχθεί ότι $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$.

18. (Διαγωνιοποίηση αθροίσματος)

   i) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Να δειχθεί ότι η A δεν διαγωνιοποιείται, η B διαγωνιοποιείται και η $A+B$ είναι διαγωνιοποιήσιμη.

   ii) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Να δειχθεί ότι οι A, B είναι διαγωνιοποιήσιμες ενώ η $A + B$ δεν διαγωνιοποιείται.

19. Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ μια αντιστρέψιμη μήτρα με n διακεκριμένες ιδιοτιμές. Αν για τη μήτρα $B \in \mathcal{M}_n$ ισχύει ότι $AB = BA^{-1}$, να δειχθεί ότι η B^2 είναι διαγωνιοποιήσιμη.

20. (Γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$) Στα σημεία του επίπεδου $\mathbb{R}^2$ εφαρμόζουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό T: Κάθε σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) μεταφέρεται στο σημείο με συντεταγμένες $(3x + 2y, x - y)$, δηλαδή

$$T(x, y) = (3x + 2y, x - y).$$

   i) Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός T είναι αμφιμονοσήμαντος.

   ii) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, σημεία του επιπέδου, που διατηρούνται αναλλοίωτα από τον μετασχηματισμό T.

   iii) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, ευθείες L του επιπέδου, που διατηρούνται αναλλοίωτες από τον μετασχηματισμό T, δηλαδή ευθείες L για τις οποίες ισχύει ότι αν $(x, y) \in L$ τότε και $(3x + 2y, x - y) \in L$.

21. Έστω ότι η μήτρα A είναι διαγωνιοποιήσιμη με

$$A = PDP^{-1}$$

όπου $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ είναι η διαγώνια μήτρα με στοιχεία τις ιδιοτιμές της μήτρας A.

Να δειχθεί ότι η μήτρα $q(A)$, όπου $q(\lambda)$ πολυώνυμο του λ, είναι επίσης διαγωνιοποίησιμη και επιπλέον ισχύει ότι

$$q(A) = Pq(D)P^{-1}$$

όπου $q(D) = \mathrm{diag}(\mathrm{q}(\lambda_1), \mathrm{q}(\lambda_2), \ldots, \mathrm{q}(\lambda_n))$.

22. Το φασματικό θεώρημα μας δίνει μια κατεύθυνση για το πώς μπορούμε να επεκτείνουμε τις πράξεις στις διαγωνιοποιήσιμες τετραγωνικές μήτρες ώστε να ορίσουμε για παράδειγμα την μήτρα e^A, όπου A είναι τετραγωνική μήτρα.

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Η μήτρα A έχει ιδιοτιμές 2 και 3 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Άρα, η A διαγωνιοποιείται και ισχύει ότι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Αν $q(\lambda)$ είναι πολυώνυμο του λ, σύμφωνα με το φασματικό θέωρημα η μήτρα $q(A)$ έχει ιδιοτιμές $q(2)$, $q(3)$.

Η ιδέα είναι ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή της μήτρας A, τότε η μήτρα e^A είναι “φυσικό” να έχει ως ιδιοτιμή το e^λ, δηλαδή θεωρούμε στην περίπτωση αυτή τη συνάρτηση $q(\lambda) = e^\lambda$.

Οπότε, στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^2 & e^3 - e^2 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix}.$$

   i) Να υπολογισθεί, με ανάλογο τρόπο, η μήτρα e^B για την μήτρα

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   ii) Χρησιμοποιώντας, ανάλογες ιδέες, να ορισθούν οι μήτρες $\cos(A)$ και $\cos(B)$.

23. Να βρεθεί ένας “φυσικός” τρόπος να ορισθεί η μήτρα e^A, όταν η τετραγωνική μήτρα A δεν είναι απαραίτητα διαγωνιοποιήσιμη. Στην περίπτωση όπου η μήτρα A είναι διαγωνιοποιήσιμη ο τρόπος αυτός πρέπει να δίνει τα ίδια αποτελέσματα με τον ορισμό της προηγούμενης άσκησης. (Υπόδειξη: η συνάρτηση e^λ είναι πολυώνυμο του λ αν αναπτυχθεί σε σειρά Taylor).

Μέρος II

Κεφάλαιο 5

Μεταθέσεις

5.1 Βασικοί ορισμοί και αποτελέσματα

Αν $X \neq \emptyset$ και $\sigma : X \mapsto X$ μια απεικόνιση, τότε η σ είναι **μια μετάθεση των στοιχείων του** X αν και μόνο αν η σ είναι αμφιμονοσήμαντη (ένα προς ένα και επί).

Δηλαδή, μετάθεση των στοιχείων ενός συνόλου καλούμε μια αναδιάταξη των στοιχείων ενός συνόλου.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 5 \\ 4 & \longrightarrow & 3 \\ 5 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Δηλαδή, τα στοιχεία $1, 2, 3, 4, 5$ μπορούμε να τα αναδιατάξουμε, παίρνοντας $4, 2, 5, 3, 1$.

Προφανώς, για να είναι μια απεικόνιση μετάθεση, θα πρέπει κάθε στοιχείο του συνόλου να εμφανίζεται ακριβώς μία φορά στη δεξιά στήλη.

Παράδειγμα: Η επόμενη απεικόνιση δεν είναι μετάθεση

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \\ 3 & \longrightarrow & 4 \\ 4 & \longrightarrow & 3 \\ 5 & \longrightarrow & 5 \end{array}$$

Το **σύνολο των μεταθέσεων του** X συμβολίζεται με $\mathbf{S(X)}$.

Ειδικά, **το σύνολο των μεταθέσεων του συνόλου** $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ συμβολίζεται με $\mathbf{S_n}$.

Μια μετάθεση σ στο S_n συμβολίζεται ως εξής:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τα στοιχεία του συνόλου $[n]$, ενώ η δεύτερη γραμμή γράφουμε τις εικόνες τους.

Γράφουμε την εικόνα κάθε στοιχείου του συνόλου ακριβώς κάτω από το στοιχείο αυτό.

Τα στοιχεία του $[n]$ στην πρώτη γραμμή γράφονται συνήθως σε αύξουσα σειρά. Με βάση αυτή τη σύμβαση, συχνά παραλείπουμε την πάνω γραμμή και σημειώνουμε μόνο την κάτω γραμμή χωρίς παρενθέσεις. Γράφουμε δηλαδή

$$\sigma = \sigma(1)\ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(n).$$

Παραδείγματα

1. Η $\sigma \in S_4$ με $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 1$, γράφεται
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
ή, απλούστερα $\sigma = 2431$.

2. Η $\sigma \in S_6$ με $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 4$, $\sigma(5) = 6$, $\sigma(6) = 3$, γράφεται
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$
ή, απλούστερα $\sigma = 152463$.

3. Η $\sigma = 2\ 1\ 5\ 4\ 3 \in S_5$, δηλαδή η $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ είναι η μετάθεση με $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(4) = 4$, $\sigma(5) = 3$.

4. **Προσοχή!** Η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ **δεν γράφεται** απλούστερα $\sigma = 21534$, αφού τα στοιχεία της πρώτης γραμμής της δεν είναι σε αύξουσα σειρά. Η σ γράφεται ισοδύναμα $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ οπότε, απλούστερα, $\sigma = 52134$.

Δύο μεταθέσεις σ και τ στο $S(X)$ είναι **ίσες** και γράφουμε $\sigma = \tau$, αν και μόνο αν
$$\sigma(x) = \tau(x), \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Παράδειγμα: Έστω $\sigma, \tau \in S_3$, με
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Είναι $\sigma = \tau$, διότι
$$\begin{aligned} \sigma(1) &= 3 = \tau(1) \\ \sigma(2) &= 2 = \tau(2) \\ \sigma(3) &= 1 = \tau(3) \end{aligned}$$

Πρόταση 5.1. *Το πλήθος των μεταθέσεων ενός συνόλου X με n στοιχεία, ισούται με $n!$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.*

Απόδειξη. (1ος τρόπος) Έστω $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ και $\sigma = \sigma(a_1)\sigma(a_2)\cdots\sigma(a_n) \in S(X)$. Επειδή η σ είναι αμφιμονοσήμαντη στα πρότυπα a_i, a_j με $a_i \neq a_j$ θα αντιστοιχούν διαφορετικές εικόνες $\sigma(a_i)$, $\sigma(a_j)$.

Για το $\sigma(a_1)$ υπάρχουν n επιλογές.
Για το $\sigma(a_2)$ υπάρχουν $n-1$ επιλογές.
$$\vdots$$
Για το $\sigma(a_i)$ υπάρχουν $n-i+1$ επιλογές.
$$\vdots$$
Για το $\sigma(a_{n-1})$ υπάρχουν 2 επιλογές.
Για το $\sigma(a_n)$ υπάρχει 1 επιλογή.
Άρα, συνολικά υπάρχουν $n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$ διαφορετικές μεταθέσεις $\sigma \in S(X)$.

(2ος τρόπος) Για $n = 1$ είναι προφανές. Έστω ότι ισχύει για $n = k - 1$ στοιχεία. Θα το δείξουμε για $n = k$: Έστω

$$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k\}$$

και

$$X^i = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k\},$$

για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Από την υπόθεση της επαγωγής, αφού το X^i έχει $k-1$ στοιχεία προκύπτουν $(k-1)!$ διαφορετικές μεταθέσεις των στοιχείων του.

Εξάλλου, από κάθε μετάθεση του X^i προκύπτουν k διαφορετικές μεταθέσεις του X.

Πράγματι, έστω σ μια μετάθεση του X^i, δηλαδή

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_{i+1} & \cdots & a_k \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_{i-1}) & \sigma(a_{i+1}) & \cdots & \sigma(a_k) \end{pmatrix}.$$

Τότε, προκύπτουν οι παρακάτω k (διαφορετικές μεταξύ τους) μεταθέσεις του X:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_k \\ a_i & \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_{i-2}) & \sigma(a_{i-1}) & \sigma(a_{i+1}) & \cdots & \sigma(a_k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_k \\ \sigma(a_1) & a_i & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_{i-2}) & \sigma(a_{i-1}) & \sigma(a_{i+1}) & \cdots & \sigma(a_k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_k \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & a_i & \cdots & \sigma(a_{i-2}) & \sigma(a_{i-1}) & \sigma(a_{i+1}) & \cdots & \sigma(a_k) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_k \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \sigma(a_3) & \cdots & \sigma(a_{i-1}) & \sigma(a_{i+1}) & \sigma(a_{i+2}) & \cdots & a_i \end{pmatrix}.$$

Ώστε από κάθε μια από τις $(k-1)!$ μεταθέσεις του X^i προκύπτουν k μεταθέσεις του X. Άρα, συνολικά προκύπτουν $(k-1)!k = k!$ μεταθέσεις, οι οποίες είναι όλες οι μεταθέσεις του X. □

5.2 Σύνθεση μεταθέσεων - Αντιστροφή μεταθέσεων

Ως **πολλαπλασιασμό** ή **γινόμενο** μεταθέσεων, ορίζουμε τη σύνθεση των μεταθέσεων.

Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\sigma, \tau \in S(X)$. Η σύνθεση

$$\sigma \circ \tau = \sigma(\tau(x)), \quad x \in X,$$

είναι επίσης μια απεικόνιση με σύνολο ορισμού και πεδίο τιμών το X. Είναι καλά ορισμένη, αφού το πεδίο τιμών της τ ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού της σ.

Δηλαδή, αν

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \cdots & \sigma(x_n) \end{pmatrix}$$

και

$$\tau = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \tau(x_1) & \tau(x_2) & \cdots & \tau(x_n) \end{pmatrix},$$

τότε

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \sigma(\tau(x_1)) & \sigma(\tau(x_2)) & \cdots & \sigma(\tau(x_n)) \end{pmatrix}$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι $\sigma \circ \tau \in S(X)$, αρκεί να δείξουμε ότι είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Θα δείξουμε λοιπόν ότι είναι ένα προς ένα και επί.

Ως γνωστό, μια απεικόνιση f είναι ένα προς ένα, αν και μόνο αν για κάθε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της ισχύει ότι

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Έστω λοιπόν $x_1, x_2 \in X$, τέτοια ώστε $(\sigma \circ \tau)(x_1) = (\sigma \circ \tau)(x_2)$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&(\sigma \circ \tau)(x_1) = (\sigma \circ \tau)(x_2) \Rightarrow \\
&\sigma(\tau(x_1)) = \sigma(\tau(x_2)) \Rightarrow \quad (\text{αφού η } \sigma \text{ είναι 1-1}) \\
&\tau(x_1) = \tau(x_2) \Rightarrow \qquad (\text{αφού η } \tau \text{ είναι 1-1}) \\
&x_1 = x_2
\end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι η $\sigma \circ \tau$ είναι επί, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $y \in X$, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $(\sigma \circ \tau)(x) = y$.

Έστω λοιπόν $y \in X$. Τότε, αφού η σ είναι επί, υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $\sigma(z) = y$. Επιπλέον, επειδή η τ είναι επί, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\tau(x) = z$.

Σχηματικά, έχουμε ότι

$$x \xrightarrow{\tau} z \xrightarrow{\sigma} y$$

Έτσι, έχουμε ότι

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(z) = y.$$

Παρατήρηση:
Όπως φαίνεται και στο προηγούμενο σχήμα, για να βρούμε τη σύνθεση $\sigma \circ \tau$, εφαρμόζουμε πρώτα τη δεύτερη μετάθεση, δηλαδή την τ, και έπειτα την σ.

Παράδειγμα: Έστω

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \tau)(1) &= \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 5 \\
(\sigma \circ \tau)(2) &= \sigma(\tau(2)) = \sigma(5) = 1 \\
(\sigma \circ \tau)(3) &= \sigma(\tau(3)) = \sigma(4) = 3 \\
(\sigma \circ \tau)(4) &= \sigma(\tau(4)) = \sigma(2) = 2 \\
(\sigma \circ \tau)(5) &= \sigma(\tau(5)) = \sigma(1) = 4
\end{aligned}$$

οπότε $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Πρακτικά, για να βρούμε την $\sigma \circ \tau$, γράφουμε πρώτα τις δύο γραμμές της τ και στη συνέχεια γράφουμε σε μια τρίτη γραμμή τις εικόνες των στοιχείων της δεύτερης γραμμής, όπως αυτές ορίζονται από την σ.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}$$

Ο συνδυασμός πρώτης και τρίτης γραμμής, δίνει την $\sigma \circ \tau$, δηλαδή $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Παρατήρηση: Προσοχή! Η σύνθεση απεικονίσεων δεν είναι αντιμεταθετική πράξη, γι' αυτό οι μεταθέσεις $\sigma \circ \tau$ και $\tau \circ \sigma$ δεν είναι απαραίτητα ίσες.
Παράδειγμα: Για τις προηγούμενες μεταθέσεις σ, τ είναι

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \sigma \circ \tau$$

Παρατήρηση: Η σύνθεση απεικονίσεων είναι προσεταιριστική πράξη, δηλαδή αν σ, τ, π είναι μεταθέσεις του X τότε

$$\sigma \circ (\tau \circ \pi) = (\sigma \circ \tau) \circ \pi.$$

Η μετάθεση I_X στο $S(X)$, για την οποία ισχύει $I_X(i) = i$, για κάθε $i \in X$, ονομάζεται **ταυτοτική μετάθεση**.

Δηλαδή, η I_X είναι η απεικόνιση που απεικονίζει κάθε στοιχείο του X στον εαυτό του.

Ειδικά, η ταυτοτική μετάθεση στο S_n είναι η

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε μετάθεση $\sigma \in S(X)$, ισχύει ότι

$$\sigma \circ I_X = I_X \circ \sigma = \sigma,$$

δηλαδή η I_X είναι το ουδέτερο στοιχείο του $S(X)$ ως προς την πράξη $\circ$.

Πράγματι, έχουμε ότι

$$(\sigma \circ I_X)(i) = \sigma(I_X(i)) = \sigma(i)$$

και

$$(I_X \circ \sigma)(i) = I_X(\sigma(i)) = \sigma(i),$$

για κάθε $i \in X$.

Πρόταση 5.2. *Για κάθε $\sigma \in S(X)$, υπάρχει $\tau \in S(X)$ τέτοια ώστε*

$$\tau(y) = x \Leftrightarrow \sigma(x) = y,$$

για κάθε $x, y \in X$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι η τ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το X. Για να είναι καλά ορισμένη, θα πρέπει κάθε πρότυπό της να αντιστοιχεί σε ακριβώς μία εικόνα. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή για κάποιο $y \in X$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε

$$\tau(y) = x_1 \quad \text{και} \quad \tau(y) = x_2.$$

$$\begin{cases} \tau(y) = x_1 \\ \tau(y) = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma(x_1) = y \\ \sigma(x_2) = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sigma(x_1) = \sigma(x_2) \overset{\sigma:1-1}{=} x_1 = x_2, \quad \text{άτοπο.}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή μια μετάθεση στο $S(X)$.

Έστω $y_1, y_2, x_1, x_2 \in X$ με $\tau(y_1) = x_1$ και $\tau(y_2) = x_2$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\tau(y_1) = \tau(y_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \\ &\sigma(x_1) = \sigma(x_2) \Rightarrow y_1 = y_2, \quad \text{άρα } \tau\text{: 1-1.} \end{aligned}$$

Επιπλέον, αν $x \in X$, τότε υπάρχει $y \in X$ με $\sigma(x) = y$, επομένως (από τον ορισμό) $\tau(y) = x$, δηλαδή η τ είναι επί. □

Για τις μεταθέσεις σ και τ του προηγούμενου θεωρήματος, ισχύει ότι $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = I_X$, δηλαδή η μία είναι αντίστροφη της άλλης.

Πράγματι, αν $\sigma(x) = y$ (οπότε $\tau(y) = x$) τότε είναι

$$(\tau \circ \sigma)(x) = \tau(\sigma(x)) = \tau(y) = x, \text{ για κάθε } x \in X.$$

και

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(y) = x, \text{ για κάθε } y \in X.$$

Η μετάθεση τ του προηγούμενου θεωρήματος ονομάζεται **αντίστροφη** μετάθεση της μετάθεσης $\sigma \in S(X)$ και συμβολίζεται με σ^{-1}. Ισχύει δηλαδή ότι

$$\sigma^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \sigma(x) = y, \quad \text{για κάθε } x, y, \in X.$$

Παρατήρηση: Προφανώς, για την εύρεση της σ^{-1} αρκεί να εναλλάξουμε τις δύο γραμμές της.
Παράδειγμα:

Αν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, δηλαδή (γράφοντας τα στοιχεία της πρώτης γραμμής σε αύξουσα σειρά) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Παρατήρηση: Αν σ, τ είναι μεταθέσεις του X τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$$

και

$$(\sigma \circ \tau)^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}.$$

Πρόταση 5.3. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $S(X)$ το σύνολο των μεταθέσεων του X. Η αλγεβρική δομή $(S(X), \circ)$ είναι ομάδα.*

Για κάθε $\sigma \in S(X)$ και $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τη **δύναμη** σ^n επαγωγικά ως εξής:

$$\sigma^0 = I_X \quad \text{και} \quad \sigma^n = \sigma \circ \sigma^{n-1}$$

Επιπλέον, ορίζουμε τη δύναμη σ^{-n} ως εξής:

$$\sigma^{-n} = (\sigma^{-1})^n.$$

Άμεσα προκύπτει ότι

$$(\sigma^{-1})^n = (\sigma^n)^{-1}.$$

$$\sigma^{n+m} = \sigma^n \circ \sigma^m,$$

και

$$(\sigma^n)^m = \sigma^{nm},$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$.

5.3 Τροχιές μιας μετάθεσης

Έστω η μετάθεση $\sigma \in S(X)$, για κάποιο μη κενό σύνολο X. Για κάθε $a, b \in X$, ορίζουμε τη σχέση "$\sim$" στο X ως εξής:

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{ υπάρχει } n \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιο ώστε } b = \sigma^n(a).$$

Παράδειγμα: Για τη μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$\sigma^3(1) = \sigma(\sigma(\sigma(1))) = \sigma(\sigma(3)) = \sigma(4) = 6,$$

άρα $1 \sim 6$.

Επίσης,

$$\sigma^1(2) = 2,$$

άρα $2 \sim 2$.

Επίσης,

$$\sigma^2(5) = \sigma(\sigma(5)) = \sigma(8) = 7,$$

άρα $5 \sim 7$, κ.τ.λ.

Για κάθε $a, b, c \in X$, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. *Ανακλαστική*: $a \sim a$, αφού
$$\sigma^0(a) = I_X(a) = a.$$

2. *Συμμετρική*: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, αφού
$$\begin{aligned} a \sim b &\Rightarrow b = \sigma^n(a) \\ &\Rightarrow \sigma^{-n}(b) = \sigma^{-n}(\sigma^n(a)) \\ &\Rightarrow \sigma^{-n}(b) = \sigma^0(a) \\ &\Rightarrow \sigma^{-n}(b) = a \Rightarrow b \sim a. \end{aligned}$$

3. *Μεταβατική*: $a \sim b$ και $b \sim c \Rightarrow a \sim c$, αφού θα υπάρχουν $n, m \in \mathbb{Z}$ με $b = \sigma^n(a)$ και $c = \sigma^m(b)$, οπότε
$$c = \sigma^m(b) = \sigma^m(\sigma^n(a)) = \sigma^{m+n}(a),$$
δηλαδή, $a \sim c$.

Έτσι, η σχέση "$\sim$" είναι μια σχέση ισοδυναμίας, οπότε ορίζει μια διαμέριση του X.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας που προκύπτουν ονομάζονται **τροχιές** της σ.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι τροχιές της

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ξεκινάμε με το 1 και έχουμε ότι $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 6$, $\sigma(6) = 1$, ή, σχηματικά:

$$1 \to 3 \to 6 \to 1,$$

επομένως $1 \sim 3 \sim 6$, δηλαδή το σύνολο $\{1, 3, 6\}$ είναι μια τροχιά της σ.

Συνεχίζουμε ομοίως με ένα στοιχείο που δεν έχουμε χρησιμοποιήσει, για παράδειγμα το 2. Έχουμε ότι

$$2 \to 8 \to 2,$$

οπότε μια άλλη τροχιά της σ είναι το σύνολο $\{2, 8\}$.

Τέλος, ξεκινώντας από το 4, έχουμε ότι

$$4 \to 7 \to 5,$$

οπότε μια τρίτη τροχιά της σ είναι το σύνολο $\{4, 5, 7\}$.

Έτσι, τελικά οι τροχιές της σ είναι οι

$$\{1, 3, 6\}, \quad \{2, 8\}, \quad \{4, 5, 7\}.$$

5.4 Κύκλοι

Μια μετάθεση ονομάζεται **κύκλος** αν και μόνο αν έχει το πολύ μία τροχιά με περισσότερα από ένα στοιχεία. Το **μήκος** ενός κύκλου είναι το πλήθος των στοιχείων της μεγαλύτερης τροχιάς του.

Έστω $\{a_i, \sigma(a_i), \sigma^2(a_i), \ldots, \sigma^k(a_i)\}$, $k \geqslant 2$, η τροχιά ενός κύκλου σ η οποία έχει περισσότερα από ένα στοιχεία. Για λόγους απλότητας συμβολίζουμε συνήθως τον κύκλο σ με $(a_i\ \sigma(a_i)\ \sigma^2(a_i)\ \cdots\ \sigma^k(a_i))$. Οι εξωτερικές περενθέσεις στη γραφή αυτή ενός κύκλου είναι απαραίτητες, ώστε να μην προκαλείται σύγχυση με το συμβολισμό μιας μετάθεσης με μια γραμμή (όπου, όπως ήδη σημειώσαμε, δεν μπαίνουν παρενθέσεις).

Παραδείγματα

1. Η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ έχει τροχιές

   $$\{1\}, \quad \{2, 3, 4, 6\}, \quad \{5\},$$

   άρα είναι κύκλος μήκους 4, τον οποίο συνήθως συμβολίζουμε με $(2\ 4\ 3\ 6)$. Προφανώς μπορούμε να ξεκινήσουμε από οποιοδήποτε στοιχείο $\sigma^j(a_i)$ $(j \leqslant k)$ της τροχιάς και να συνεχίσουμε διατηρώντας τη διάταξη, και μεταβαίνοντας στο a_i μετά το $\sigma^k(a_i)$. Έτσι, ο κύκλος $(2\ 4\ 3\ 6)$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα και ως $(4\ 3\ 6\ 2)$, ή $(3\ 6\ 2\ 4)$, ή $(6\ 2\ 4\ 3)$.

2. Η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ έχει τροχιές

   $$\{1\}, \quad \{2, 3\}, \quad \{4\}, \quad \{5\},$$

   άρα είναι κύκλος μήκους 2, ο $(2\ 3)$.

3. Η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ έχει τροχιά

   $$\{1, 3, 2, 7, 5, 6, 4\},$$

   άρα είναι κύκλος μήκους 7, ο $(1\ 3\ 2\ 7\ 5\ 6\ 7)$.

4. Η μετάθεση $\sigma \in S_8$ με

   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

   έχει, όπως είδαμε τρεις τροχιές, τις

   $$\{1, 3, 6\}, \quad \{2, 8\}, \quad \{4, 5, 7\},$$

   οπότε δεν είναι κύκλος. Οι τροχιές αυτές αντιστοιχούν στους ακόλουθους κύκλους του S_8:

   $$\sigma_1 = (1\ 3\ 6), \quad \sigma_2 = (2\ 8), \quad \sigma_3 = (4\ 5\ 7).$$

5. Έστω ο κύκλος $(1\,3\,5\,4) \in S_5$. Ο κύκλος αυτός είναι η μετάθεση

$$(1\,3\,5\,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήσεις:

1. Για $m \neq n$, οι κύκλοι $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k) \in S_m$ και $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k) \in S_n$ είναι διαφορετικοί, αφού παριστάνουν μεταθέσεις με διαφορετικά πεδία ορισμού.

2. Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε κύκλους με τον ίδιο τρόπο όπως τις μεταθέσεις. Συχνά, στον πολλαπλασιασμό κύκλων παραλείπουμε το σύμβολο $\circ$.

3. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο κύκλων δεν είναι απαραίτητα κύκλος.

Παράδειγμα: Για τους κύκλους $\sigma = (2\,4) \in S_6$, $\tau = (1\,5\,6) \in S_6$, δηλαδή για τις

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

η οποία δεν είναι κύκλος, αφού οι τροχιές της είναι οι

$$\{1, 5, 6\}, \quad \{2, 4\}, \quad \{3\}.$$

Δύο κύκλοι ονομάζονται **ξένοι** όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

Πρόταση 5.4. *Κάθε μετάθεση σ ενός πεπερασμένου συνόλου είναι ένα γινόμενο ξένων κύκλων.*

Παράδειγμα: Για τη μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

του παραδείγματος 4 μετά τον ορισμό του κύκλου, είναι

$$\sigma = (1\,3\,6)(2\,8)(4\,7\,5).$$

Παρατήρηση: Ο πολλαπλασιασμός ξένων κύκλων είναι αντιμεταθετικός, άρα η διάταξη του γινομένου δεν έχει σημασία. Έτσι, για παράδειγμα, για την προηγούμενη μετάθεση σ ισχύει επίσης

$$\sigma = (2\,8)(4\,7\,5)(1\,3\,6).$$

Επιπλέον, αν $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_r$ όπου σ_i, $i \in [r]$ είναι ξένοι ανά δύο κύκλοι, τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι

$$\sigma^k = \sigma_1^k \circ \sigma_2^k \circ \cdots \circ \sigma_r^k.$$

5.5 Άρτιες και περιττές μεταθέσεις

Ένας κύκλος μήκους 2 ονομάζεται **αντιμετάθεση**.

Δηλαδή, μια αντιμετάθεση αφήνει όλα τα στοιχεία αμετάβλητα, εκτός από δύο, τα οποία απεικονίζει το ένα στο άλλο (δηλαδή τα αντιμεταθέτει).

Παράδειγμα: Οι μεταθέσεις $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (2\ 5)$ και $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (5\ 6)$ είναι αντιμεταθέσεις, ενώ η $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (2\ 4)(5\ 6)$ δεν είναι.

Πρόταση 5.5. *Για κάθε αντιμετάθεση $\sigma \in S(X)$, ισχύει ότι $\sigma^2 = I(X)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\sigma(a_k) = a_k$, για κάθε $k \neq i, j$, και $\sigma(a_i) = a_j$, $\sigma(a_j) = a_i$. Τότε

$$\sigma^2(a_k) = \sigma(\sigma(a_k)) = \sigma(a_k) = a_k$$

$$\sigma^2(a_j) = \sigma(\sigma(a_j)) = \sigma(a_i) = a_j$$

$$\sigma^2(a_i) = \sigma(\sigma(a_i)) = \sigma(a_j) = a_i$$

Άρα, $\sigma^2(a_m) = a_m$, για κάθε $a_m \in X$, οπότε πράγματι είναι $\sigma^2 = I_X$. □

Πρόταση 5.6. *Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}(a_1\, a_2\ \cdots\ a_{n-1}\, a_n) &= (a_1\, a_n)(a_1\, a_{n-1})\cdots(a_1\, a_3)(a_1\, a_2)\\ &= (a_{n-1}\, a_n)(a_{n-2}\, a_n)\cdots(a_2\, a_n)(a_1\, a_n).\end{aligned}$$

Πόρισμα 5.7. *Κάθε μετάθεση ενός πεπερασμένου συνόλου που περιέχει τουλάχιστον 2 στοιχεία είναι ένα γινόμενο αντιμεταθέσεων.*

Παράδειγμα: Η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ίση με $(1\,6)(2\,5\,3)$ και άρα είναι ίση με

$$(1\,6)(2\,3)(2\,5)$$

Παρατήρηση: Η αναπαράσταση μιας μετάθεσης ως γινόμενο αντιμεταθέσεων, δεν είναι μοναδική.

Για παράδειγμα, η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ που, όπως είδαμε, γράφεται ως $(1\,6)(2\,3)(2\,5)$, μπορεί να γραφεί και ως $(1\ 6)(5\ 3)(2\ 3)$.

Το πλήθος των αντιμεταθέσεων που χρησιμοποιείται για τις αναπαραστάσεις της ίδιας μετάθεσης είναι πάντα άρτιο ή πάντα περιττό, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.8. *Καμία μετάθεση δεν μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων και ως γινόμενο περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.*

Μια μετάθεση ενός πεπερασμένου συνόλου ονομάζεται **άρτια** (αντίστοιχα **περιττή**) αν γράφεται ως γινόμενο άρτιου (αντίστοιχα περιττού) πλήθους αντιμεταθέσεων.

Γράφουμε $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ ή $\varepsilon(\sigma) = 1$ αν η σ είναι άρτια, ή $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ ή $\varepsilon(\sigma) = -1$ αν η σ είναι περιττή. Ο αριθμός $\mathrm{sgn}(\sigma)$ ονομάζεται **πρόσημο** της μετάθεσης σ.

Παρατηρήσεις:

- Αν οι σ, τ είναι άρτιες, τότε η $\sigma \circ \tau$ είναι άρτια.
- Αν οι σ, τ είναι περιττές, τότε η $\sigma \circ \tau$ είναι άρτια.
- Αν η σ είναι άρτια και η τ είναι περιττή, τότε η $\sigma \circ \tau$ είναι περιττή.
- Αν η σ είναι άρτια, τότε η σ^{-1} είναι άρτια.
- Αν η σ είναι περιττή, τότε η σ^{-1} είναι περιττή.

Έστω $\sigma \in S_n$. Το ζεύγος $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ είναι μια **παράβαση** (ή **αντιστροφή**) για τη σ, αν ισχύει ότι

$$i < j \Leftrightarrow \sigma(i) > \sigma(j).$$

Παράδειγμα: Για τη μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ υπάρχουν 5 παραβάσεις, οι $(1,3)$, $(2,3)$, $(2,5)$, $(4,5)$ και $(4,6)$, αφού

$$\begin{array}{lcl} 1 < 3 & \text{ενώ} & \sigma(1) = 2 > 1 = \sigma(3), \\ 2 < 3 & \text{ενώ} & \sigma(2) = 4 > 1 = \sigma(3), \\ 2 < 5 & \text{ενώ} & \sigma(2) = 4 > 3 = \sigma(5), \\ 4 < 5 & \text{ενώ} & \sigma(4) = 6 > 3 = \sigma(5), \\ 4 < 6 & \text{ενώ} & \sigma(4) = 6 > 5 = \sigma(6). \end{array}$$

Πρόταση 5.9. *Οι μεταθέσεις σ και σ^{-1} έχουν τον ίδιο αριθμό παραβάσεων.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν (i, j) είναι μια παράβαση της σ, τότε $(\sigma(j), \sigma(i))$ είναι μια παράβαση της σ^{-1}. Πράγματι, έστω (i, j) μια παράβαση της σ με $i < j$. Τότε $\sigma(j) < \sigma(i)$, ενώ $\sigma^{-1}(\sigma(j)) = j > i = \sigma^{-1}(\sigma(i))$. Άρα, πράγματι $(\sigma(j), \sigma(i))$ είναι μια παράβαση της σ^{-1}. □

Πρόταση 5.10. *Μια μετάθεση είναι άρτια αν και μόνο αν έχει άρτιο αριθμό παραβάσεων.*

Πρόταση 5.11. *Το πλήθος των άρτιων μεταθέσεων του S_n είναι ίσο με το πλήθος των περιττών μεταθέσεων του S_n και ίσο με $\frac{n!}{2}$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των άρτιων και των περιττών μεταθέσεων του S_n.

Πράγματι, σε κάθε μετάθεση $\sigma \in S_n$, αντιστοιχούμε τη μετάθεση $\pi \in S_n$ με $\pi(1) = \sigma(2)$, $\pi(2) = \sigma(1)$ και $\pi(k) = \sigma(k)$ για κάθε $k = 3, 4, \ldots, n$. Η απεικόνιση αυτή είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη.

Αν $\sigma(1) < \sigma(2)$ θα έχουμε $\pi(2) < \pi(1)$, (οπότε η π θα έχει μια παράβαση παραπάνω από τη σ) και αν $\sigma(1) > \sigma(2)$ τότε $\pi(2) > \pi(1)$, (οπότε η π θα έχει μια παράβαση λιγότερη από τη σ)). Άρα, αν η σ είναι άρτια (αντίστοιχα περιττή), η π θα είναι περιττή (αντίστοιχα άρτια).

Αφού τώρα το πλήθος των άρτιων είναι ίσο με το πλήθος των περιττών και το άθροισμά τους (δηλαδή, το σύνολο των μεταθέσεων του S_n) ισούται με $n!$, κάθε ένα από τα σύνολα τών άρτιων και περιττών μεταθέσεων του S_n θα έχει πλήθος ίσο με $\frac{n!}{2}$. □

5.6 Το 8–puzzle

Ένα παιχνίδι αποτελείται από 8 **αριθμημένα τετράγωνα** που βρίσκονται μέσα στο επόμενο 3×3 πλαίσιο

1	2	3
4	5	6
7	8	

στο οποίο υπάρχει **μια κενή θέση**.

Δύο τετράγωνα θεωρούνται γειτονικά αν έχουν κοινή πλευρά.

Επιτρεπτή κίνηση στο παιχνίδι είναι κατάληψη της κενής θέσης από ένα γειτονικό της τετράγωνο και μετακινησή του σ' αυτή.

Δύο τοποθετήσεις ονομάζονται **ισοδύναμες** αν υπάρχει ακολουθία επιτρεπτών κινήσεων ώστε να καταλήξουμε από την μια στην άλλη.

Σκοπός του παιχνιδιού είναι ξεκινώντας από οποιαδήποτε τοποθέτηση των τετραγώνων, χρησιμοποιώντας επιτρεπτές κινήσεις, να καταλήξουμε στην παραπάνω τοποθέτηση, η οποία ονομάζεται **τελική**.

Παράδειγμα: Με την επόμενη ακολουθία επιτρεπτών κινήσεων επιτυγχάνεται ο σκοπός του παιχνιδιού στην περίπτωση όπου ξεκινάμε από την τοποθέτηση 1.

1	3	5
4	2	
7	8	6

1

1	3	
4	2	5
7	8	6

2

1		3
4	2	5
7	8	6

3

1	2	3
4		5
7	8	6

4

1	2	3
4	5	
7	8	6

5

1	2	3
4	5	6
7	8	

6

Ένα ερώτημα που προκύπτει σ' αυτό το παιχνίδι είναι αν από όλες τις δυνατές τοποθετήσεις των 8 τετραγώνων μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία επιτρεπτών κινήσεων που καταλήγουν στην τελική τοποθέτηση.

Για παράδειγμα, υπάρχει ακολουθία επιτρεπτών κινήσεων που οδηγεί στην τελική τοποθέτηση αν ξεκινήσουμε από την επόμενη τοποθέτηση:

1	2	3
4	5	6
8	7	

Η απάντηση είναι αρνητική για τη συγκεκριμένη τοποθέτηση. Πράγματι, αν αριθμήσουμε τις 9 θέσεις του 3×3 τετραγώνου γραμμή προς γραμμή από αριστερά προς τα δεξιά, τότε σε κάθε τοποθέτηση των 8 τετραγώνων αντιστοιχεί μια μετάθεση σ του $[9]$ όπου στη κενή θέση αντιστοιχεί ο αριθμός 9.

Έτσι, στις τοποθετήσεις

1	3	5
4	2	
7	8	6

1

1	3	
4	2	5
7	8	6

2

1		3
4	2	5
7	8	6

3

1	2	3
4		5
7	8	6

4

1	2	3
4	5	
7	8	6

5

1	2	3
4	5	6
7	8	

6

αντιστοιχούν οι μεταθέσεις

$$\begin{array}{ccc} 135429786 & 139425786 & 193425786 \\ 1 & 2 & 3 \\ 123495786 & 123459786 & 123456789 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$$

ενώ, στην αρχική τοποθέτηση που εξετάζουμε αντιστοιχεί η μετάθεση 123456879.

Έστω σ η μετάθεση που αντιστοιχεί σε μια τοποθέτηση των τετραγώνων.

Κάθε επιτρεπτή κίνηση στο παιχνίδι αντιστοιχεί σε μια αντιμετάθεση του 9 στη σ με κάποιο αριθμό από 1 εως 8 (αρκεί τα αντίστοιχα τετράγωνα να είναι γειτονικά) ώστε να προκύψει μια νέα μετάθεση τ.

Έστω σ', τ' οι μεταθέσεις που προκύπτουν από τις σ, τ "σβήνοντας" το ψηφίο 9.

Όπως μπορούμε να ελέγξουμε (άσκηση) σε κάθε μία από τις επιτρεπτές κινήσεις οι αριθμοί των παραβάσεων των σ' και τ' είτε είναι ίσοι, είτε διαφέρουν κατά δύο. Επομένως, οι επιτρεπτές κινήσεις διατηρούν την αρτιότητα της σ'.

Άρα, δεν μπορούμε ξεκινώντας από μια μετάθεση σ για την οποία η σ' είναι περιττή και να καταλήξουμε σε μια μετάθεση τ για την οποία η τ' είναι άρτια.

Για τη μετάθεση $\sigma = 123456879$, η $\sigma' = 12345687$ έχει 1 παράβαση, δηλαδή είναι περιττή, ενώ για τη μετάθεση $\tau = 123456789$, η $\tau' = 12345678$ έχει 0 παραβάσεις, δηλαδή είναι άρτια. Επομένως, δεν υπάρχει τρόπος να λύσουμε το παιχνίδι ξεκινώντας από την τοποθέτηση 123456879.

Παρατήρηση: Η παραπάνω ιδέα μας λέει ότι αν οι μεταθέσεις σ' και τ' έχουν διαφορετική αρτιότητα δεν μπορούμε να καταλήξουμε από τη σ στη τ. Στην περίπτωση όμως που οι σ, τ έχουν την ίδια αρτιότητα δεν μας δίνει καμιά πληροφορία για το αν υπάρχει ή όχι λύση.

Αποδεικνύεται όμως ότι αν οι σ' και τ' έχουν την ίδια αρτιότητα, τότε υπάρχει ακολουθία επιτρεπτών κινήσεων για να καταλήξουμε στην τ από την σ.

Έτσι, υπάρχουν μόνο δύο μη ισοδύναμες τοποθετήσεις σ στο παιχνίδι: Οι τοποθετήσεις με σ' άρτια μετάθεση και οι τοποθετήσεις με σ' περιττή μετάθεση.

5.7 Τάξη μιας μετάθεσης

Πρόταση 5.12. *Έστω X ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο. Για κάθε $\sigma \in S(X)$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}^*$ ώστε*
$$\sigma^k = I_X.$$

Απόδειξη. Επειδή το σύνολο X είναι πεπερασμένο, έπεται ότι και το σύνολο $S(X)$ είναι πεπερασμένο. Επομένως, η ακολουθία
$$\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots$$
του $S(X)$ έχει πεπερασμένο πεδίο τιμών, δηλαδή περιέχει επαναλήψεις.

Άρα, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}^*$ με $m < n$ ώστε
$$\sigma^m = \sigma^n.$$

Επομένως, για $k = n - m \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι
$$\begin{aligned} \sigma^k &= \sigma^{n-m} = \sigma^n \circ \sigma^{-m} \\ &= \sigma^n \circ (\sigma^m)^{-1} = \sigma^n \circ (\sigma^n)^{-1} = I_X. \end{aligned}$$
□

Παρατήρηση: Προφανώς, ο αριθμός k της Πρότασης 5.12 δεν είναι μοναδικός, αφού και για $n = 2k$ έχουμε $\sigma^{2k} = (\sigma^k)^2 = (I_X)^2 = I_X$, ομοίως για $n = 3k$ έχουμε $\sigma^{3k} = I_X$, κ.ο.κ.

Ο ελάχιστος μη μηδενικός αριθμός k ώστε
$$\sigma^k = I_X.$$
ονομάζεται **τάξη** της μετάθεσης σ και συμβολίζεται με $\mathrm{ord}(\sigma)$.

Παράδειγμα: Για τη μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$ έχουμε ότι
$$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^3 = \sigma \circ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^4 = \sigma \circ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^5 = \sigma \circ \sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^6 = \sigma \circ \sigma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = I_6$$
άρα, η τάξη της σ ισούται με 6, δηλαδή $\mathrm{ord}(\sigma) = 6$.

Στην επόμενη πρόταση δίνονται ορισμένες βασικές ιδιότητες της τάξης μιας μετάθεσης.

Πρόταση 5.13. *Έστω X ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο και $\sigma \in S(X)$.*

(i) Αν $\mathrm{ord}(\sigma) = k$, τότε για κάθε $m, n \in [k]$ με $m \neq n$ ισχύει ότι $\sigma^m \neq \sigma^n$.

(ii) Αν $\mathrm{ord}(\sigma) = k$, τότε για κάθε $m \in [k]$ ισχύει ότι $\mathrm{ord}(\sigma^m) \mid k$.

(iii) Αν σ είναι κύκλος μήκους k, τότε $\mathrm{ord}(\sigma) = k$.

(iv) Αν σ είναι γινόμενο r ξένων κύκλων με μήκη $k_1, k_2, \ldots, k_r$ αντίστοιχα, τότε η τάξη της σ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Απόδειξη.

(i) Έστω ότι υπάρχουν $m, n \in [k]$ με $m < n$ και $\sigma^m = \sigma^n$.

Τότε, για $r = n - m$ με $0 < r < k$ έχουμε ότι

$$\sigma^r = \sigma^{n-m} = \sigma^n \circ \sigma^{-m} = \sigma^n \circ (\sigma^m)^{-1} = \sigma^n \circ (\sigma^n)^{-1} = I_X$$

το οποίο είναι άτοπο.

(ii) Έστω ότι $\mathrm{ord}(\sigma^m) = \lambda$. Αν $k = \pi\lambda + \upsilon$, όπου $\pi, \upsilon \in \mathbb{N}$ με $0 \leqslant \upsilon < \lambda$ τότε

$$(\sigma^m)^k = (\sigma^k)^m = (I_X)^m = I_X.$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}(\sigma^m)^k &= (\sigma^m)^{\pi\lambda+\upsilon} \\ &= ((\sigma^m)^\lambda)^\pi \circ (\sigma^m)^\upsilon \\ &= (I_X)^\pi \circ (\sigma^m)^\upsilon \\ &= I_X \circ (\sigma^m)^\upsilon = (\sigma^m)^\upsilon\end{aligned}$$

Επομένως,

$$(\sigma^m)^\upsilon = I_X$$

το οποίο μπορεί να συμβαίνει μόνο αν $\upsilon = 0$. Άρα $k = \pi\lambda$, δηλαδή $\lambda \mid k$, δηλαδή $\mathrm{ord}(\sigma^m) \mid k$.

(iii) Άσκηση.

(iv) Έστω $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_r$ όπου σ_1, σ_2, …, σ_r ξένοι ανά δύο κύκλοι μήκους k_1, k_2, …, k_r αντίστοιχα.

Αρχικά, θα δείξουμε ότι $\sigma^k = I_X$ όπου k οποιοδήποτε κοινό πολλαπλάσιο των $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Πράγματι, έστω $k = b_1k_1 = b_2k_2 = \cdots = b_rk_r$.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\sigma^k &= \sigma_1^k \circ \sigma_2^k \circ \cdots \circ \sigma_r^k \\ &= \sigma_1^{b_1k_1} \circ \sigma_2^{b_2k_2} \circ \cdots \circ \sigma_r^{b_rk_r} \\ &= (\sigma_1^{k_1})^{b_1} \circ (\sigma_2^{k_2})^{b_2} \circ \cdots \circ (\sigma_r^{k_r})^{b_r} \\ &= (I_X)^{b_1} \circ (I_X)^{b_2} \circ \cdots \circ (I_X)^{b_r} = I_X.\end{aligned}$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι η τάξη της σ είναι κοινό πολλαπλάσιο των k_1, k_2, …, k_r. Έστω $\mathrm{ord}(\sigma) = \lambda$ τότε θα δείξουμε ότι $k_i \mid \lambda$, για κάθε $i \in [r]$.

Πράγματι, έστω $\lambda = \pi_ik_i + \upsilon_i$, όπου $\pi_i, \upsilon_i \in \mathbb{N}$ με $0 \leqslant \upsilon_i < k_i$ για κάθε $i \in [r]$.

Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}I_X &= \sigma^\lambda \\ &= \sigma_1^\lambda \circ \sigma_2^\lambda \circ \cdots \circ \sigma_r^\lambda \\ &= \sigma_1^{\pi_1k_1+\upsilon_1} \circ \sigma_2^{\pi_2k_2+\upsilon_2} \circ \cdots \circ \sigma_r^{\pi_rk_r+\upsilon_r} \\ &= (\sigma_1^{k_1})^{\pi_1} \circ (\sigma_1)^{\upsilon_1} \circ (\sigma_2^{k_2})^{\pi_2} \circ (\sigma_2)^{\upsilon_2} \cdots (\sigma_r^{k_r})^{\pi_r} \circ (\sigma_r)^{\upsilon_r} \\ &= (I_X)^{\pi_1} \circ (\sigma_1)^{\upsilon_1} \circ (I_X)^{\pi_2} \circ (\sigma_2)^{\upsilon_2} \circ \cdots \circ (I_X)^{\pi_r} \circ (\sigma_r)^{\upsilon_r} \\ &= (\sigma_1)^{\upsilon_1} \circ (\sigma_2)^{\upsilon_2} \circ \cdots \circ (\sigma_r)^{\upsilon_r}\end{aligned}$$

Επειδή οι κύκλοι $(\sigma_i)^{\upsilon_i}$, $i \in [r]$, είναι ανά δύο ξένοι (γιατί;) έπεται ότι $(\sigma_i)^{\upsilon_i} = I_X$, για κάθε $i \in [r]$ (γιατί;), άρα $\upsilon_i = 0$ για κάθε $i \in [r]$, δηλαδή λ είναι πολλαπλάσιο των $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Άρα, $\mathrm{ord}(\sigma)$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $k_1, k_2, \ldots, k_r$. □

Παράδειγμα: Απο την προηγούμενη πρόταση προκύπτει αφού $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (156)(24)(3)$ έπεται ότι $\mathrm{ord}(\sigma) = \text{ε.κ.π.}(3, 2, 1) = 6$.

Παρατήρηση: Με τη βοήθεια της Πρότασης 5.13 μπορούν να υπολογισθούν εύκολα όλες οι δυνατές τιμές των τάξεων των μεταθέσεων του S_n.

Παράδειγμα: Κάθε $\sigma \in S_7$ γράφεται ως γινόμενο ξένων κύκλων με μήκη (σε φθίνουσα σειρά)

$$7 \qquad 6,1 \qquad 5,2 \qquad 5,1,1$$

$$4,3 \qquad 4,2,1 \qquad 4,1,1,1$$

$$3,3,1 \qquad 3,2,2 \qquad 3,2,1,1 \qquad 3,1,1,1,1$$

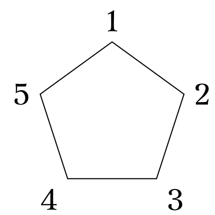
$$2,2,2,1 \qquad 2,2,1,1,1 \qquad 2,1,1,1,1,1$$

$$1,1,1,1,1,1,1$$

Επομένως, οι δυνατές τάξεις των $7! = 5040$ μεταθέσεων του S_7 είναι $12, 10, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.

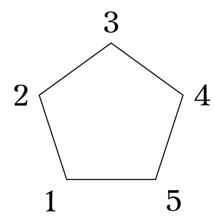
5.8 Μεταθέσεις και κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων

Έστω ένα κανονικό πεντάγωνο στο επίπεδο στις κορυφές του οποίου έχουν τοποθετηθεί ως ετικέτες οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5.



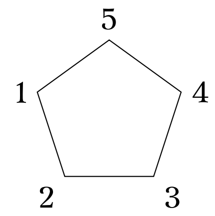
Αν περιστρέψουμε το πεντάγωνο ως προς το κέντρο του κατά ακέραιο πολλαπλάσιο της γωνίας $2\pi/5$ τότε τα σημεία των κορυφών του θα συμπίπτουν με τα σημεία των κορυφών του πριν την περιστροφή, αλλά οι ετικέτες τους μπορεί να αλλάξουν.

Για παράδειγμα, με περιστροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού κατά γωνία $6\pi/5$ το πεντάγωνο που θα προκύψει θα είναι το ακόλουθο:



Επιπλέον, αν θεωρήσουμε τις ανακλάσεις ως προς τις διχοτόμους κάθε μιας από τις 5 γωνίες, τότε τα σημεία των κορυφών του θα συμπίπτουν με τα σημεία των κορυφών του πριν την ανάκλαση, αλλά οι ετικέτες τους θα αλλάξουν.

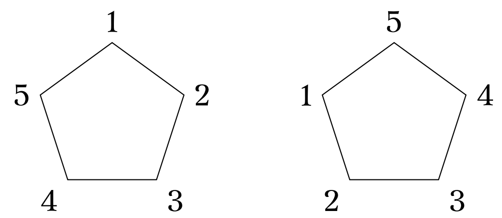
Για παράδειγμα, με ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο της γωνίας με ετικέτα 3 το πεντάγωνο που θα προκύψει θα είναι το ακόλουθο:



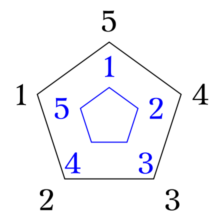
Οι παραπάνω μετασχηματισμοί μπορούν περιγραφούν από τις μεταθέσεις των ετικετών των κορυφών.

Για παράδειγμα, η ανάκλαση ως προς τη διχοτόμο της γωνίας με ετικέτα 3 αντιστοιχεί στην μετάθεση

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 54321$$



Η ετικέτα 1 μεταφέρεται στη θέση της ετικέτας 5.
Η ετικέτα 2 μεταφέρεται στη θέση της ετικέτας 4.
Η ετικέτα 3 μεταφέρεται στη θέση της ετικέτας 3.
Η ετικέτα 4 μεταφέρεται στη θέση της ετικέτας 2.
Η ετικέτα 5 μεταφέρεται στη θέση της ετικέτας 1.



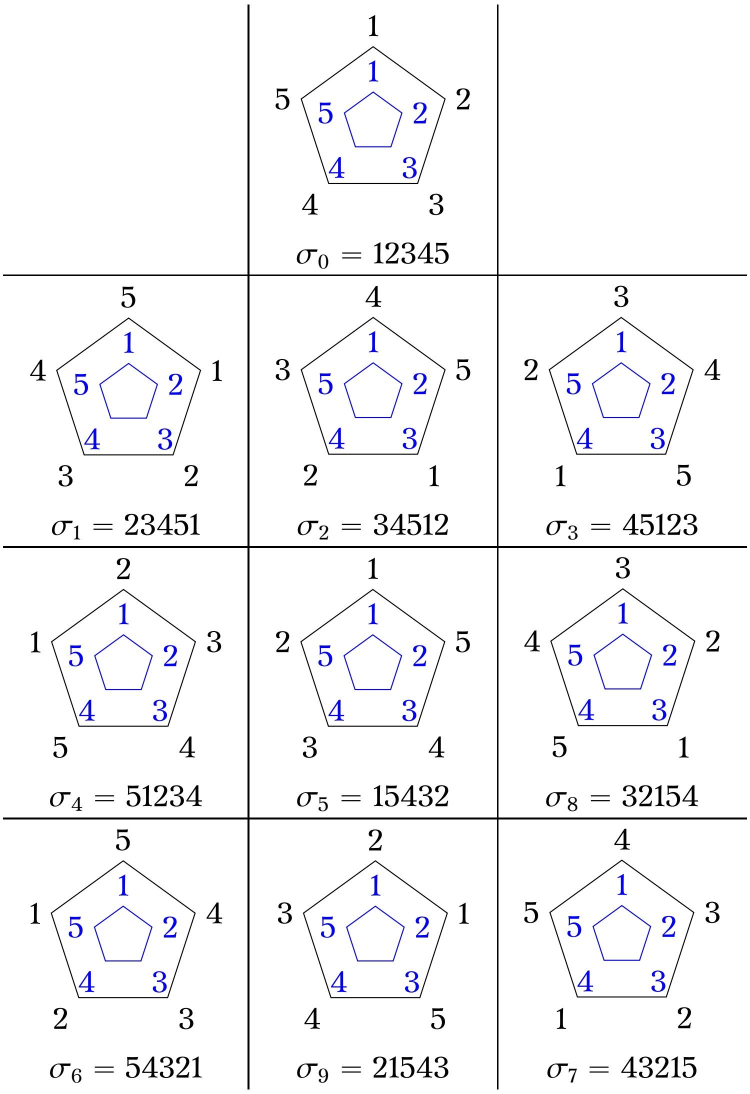
Υπάρχουν 10 διαφορετικές μεταθέσεις των ετικετών του πενταγώνου (5 με στροφή γύρω από το κέντρο του και 5 με ανάκλαση ως προς τις διχοτόμους των 5 κορυφών του).

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Οι μεταθέσεις αυτές ονομάζονται **συμμετρίες του κανονικού πενταγώνου**.

Εύκολα προκύπτει ότι η σύνθεση δύο οποιονδήποτε από τις παραπάνω 10 μεταθέσεις είναι επίσης μια από αυτές τις 10 μεταθέσεις.

Οι 10 συμμετρίες του κανονικού πενταγώνου



$\sigma_0 = 12345$

$\sigma_1 = 23451$ $\sigma_2 = 34512$ $\sigma_3 = 45123$

$\sigma_4 = 51234$ $\sigma_5 = 15432$ $\sigma_8 = 32154$

$\sigma_6 = 54321$ $\sigma_9 = 21543$ $\sigma_7 = 43215$

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι συνθέσεις των συμμετριών του πενταγώνου για κάθε ζεύγος μεταθέσεων.

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_0	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_5
σ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_0	σ_1	σ_7	σ_8	σ_9	σ_5	σ_6
σ_3	σ_3	σ_4	σ_0	σ_1	σ_2	σ_8	σ_9	σ_5	σ_6	σ_7
σ_4	σ_4	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_9	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8
σ_5	σ_5	σ_9	σ_8	σ_7	σ_6	σ_0	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1
σ_6	σ_6	σ_5	σ_9	σ_8	σ_7	σ_1	σ_0	σ_4	σ_3	σ_2
σ_7	σ_7	σ_6	σ_5	σ_9	σ_8	σ_2	σ_1	σ_0	σ_4	σ_3
σ_8	σ_8	σ_7	σ_6	σ_5	σ_9	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0	σ_4
σ_9	σ_9	σ_8	σ_7	σ_6	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0

Για παράδειγμα $\sigma_6 \circ \sigma_3 = \sigma_9$ και $\sigma_3 \circ \sigma_6 = \sigma_8$.
Πράγματι,

$$\sigma_6 \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_9$$

$$\sigma_3 \circ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \sigma_8$$

5.8.1 Ο αλγόριθμος του Verhoeff

Είναι γνωστό ότι σε κάθε βιβλίο αντιστοιχεί ένας μοναδικός κωδικός αριθμός ο οποίος ονομάζεται ISBN και αποτελείται από τα ψηφία $0, 1, 2, \ldots, 9$ καθώς και από το γράμμα X. Αντίστοιχοι κωδικοί υπάρχουν για εμπορικά προϊόντα, καθώς και σε μητρώα οργανισμών και δημόσιων υπηρεσιών όπως για παράδειγμα ο αριθμός ΑΦΜ.

Σε κάθε περίπτωση, οι κωδικοί αυτοί έχουν εκτός των άλλων και ένα ψηφίο το οποίο ονομάζεται ψηφίο ελέγχου και χρησιμοποιείται για την ανίχνευση τυχόν σφαλμάτων.

Για παράδειγμα, στα βιβλία χρησιμοποιούνται 10-ψήφιοι κωδικοί $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}$. Το ψηφίο ελέγχου είναι το a_{10} και καθορίζεται από τα υπόλοιπα 9 ώστε να ισχύει η εξίσωση

$$10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + a_{10} = 0 \pmod{11}$$

Επειδή, χρησιμοποιούμε τα υπόλοιπα της διαίρεσης με το 11 ενδέχεται το a_{10} να πρέπει να ισούται με 10. Σ' αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται το γράμμα X.

Στην περίπτωση όπου συμβεί μία ακριβώς αλλαγή σε κάποιο από τα ψηφία αυτά ή συμβεί μια ακριβώς αντιμετάθεση δύο γειτονικών ψηφίων αποδεικνύεται ότι η παραπάνω εξίσωση δεν θα επαληθεύεται και μ' αυτό τον τρόπο ανιχνεύεται η ύπαρξη σφάλματος.

Το μειονέκτημα του παραπάνω τρόπου είναι ότι ισχύει μόνο για λέξεις που έχουν μήκος 10 και επιπλέον είναι υποχρεωτικό να χρησιμοποιηθεί εκτός των 10 ψηφίων και το γράμμα X.

Το 1969 ο J. Verhoeff δημοσίευσε μια μέθοδο κατασκευής ψηφίων ελέγχου για κώδικες οσοδήποτε μήκους με την ιδιότητα να ανιχνεύουν οποιαδήποτε αλλαγή ενός ψηφίου ή οποιαδήποτε αντιμετάθεση ενός ζεύγους γειτονικών ψηφίων και επιπλέον να χρησιμοποιούν μόνο τα ψηφία $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Ο αλγόριθμός του χρησιμοποιεί τις συμμετρίες του κανονικού n-γώνου. Για κώδικες με ψηφία $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ χρησιμοποιούνται οι 10 συμμετρίες του κανονικού πενταγώνου.

Σε κάθε ένα από τα ψηφία $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ αντιστοιχούμε μια από τις 10 μεταθέσεις των συμμετριών του κανονικού πενταγώνου.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την αντιστοιχία

$0 \longrightarrow \sigma_0 \quad 1 \longrightarrow \sigma_1 \quad 2 \longrightarrow \sigma_3 \quad 3 \longrightarrow \sigma_3 \quad 4 \longrightarrow \sigma_4$

$5 \longrightarrow \sigma_5 \quad 6 \longrightarrow \sigma_6 \quad 7 \longrightarrow \sigma_7 \quad 8 \longrightarrow \sigma_8 \quad 9 \longrightarrow \sigma_9$

Χρησιμοποιώντας αυτή την αντιστοιχία μπορούμε να ταυτίζουμε τα ψηφία και τις αντίστοιχες μεταθέσεις.

Επιπλέον, η μέθοδός του χρησιμοποιεί μια ειδική μετάθεση $\sigma : \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \to \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, οι ιδιότητες της οποίας θα φανούν παρακάτω.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη μετάθεση

$$\sigma = (0, 1, 5, 8, 9, 4, 2, 7)(3, 6).$$

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε ένα ψηφίο ελέγχου για την ακολουθία $a_1a_2a_3 \cdots a_n$. Θα υπολογίσουμε το ψηφίο a_{n+1} έτσι ώστε

$$\sigma(a_1) \circ \sigma^2(a_2) \circ \sigma^3(a_3) \circ \cdots \circ \sigma^n(a_n) \circ a_{n+1} = 0 \tag{5.1}$$

όπου η πράξη της σύνθεσης αναφέρεται στη σύνθεση των μεταθέσεων των συμμετριών του κανονικού πενταγώνου.

Χρησιμοποιώντας την ταύτιση των μεταθέσεων και των αντίστοιχων ψηφίων ο πίνακας των συνθέσεων μπορεί να γραφεί ως εξής:

$\circ$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	0	6	7	8	9	5
2	2	3	4	0	1	7	8	9	5	6
3	3	4	0	1	2	8	9	5	6	7
4	4	0	1	2	3	9	5	6	7	8
5	5	9	8	7	6	0	4	3	2	1
6	6	5	9	8	7	1	0	4	3	2
7	7	6	5	9	8	2	1	0	4	3
8	8	7	6	5	9	3	2	1	0	4
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Για παράδειγμα, το ψηφίο ελέγχου a_6 που αντιστοιχεί στην ακολουθία $a_1a_2a_3a_4a_5 = 53121$ είναι το εξής

$$\begin{aligned}
\sigma(a_1)\circ\sigma^2(a_2)\circ\sigma^3(a_3)\circ\sigma^4(a_4)\circ\sigma^5(a_5)\circ a_6 &= 0 \Leftrightarrow\\
\sigma(5)\circ\sigma^2(3)\circ\sigma^3(1)\circ\sigma^4(2)\circ\sigma^5(1)\circ a_6 &= 0 \Leftrightarrow\\
8\circ 3\circ 9\circ 5\circ 2\circ a_6 &= 0 \Leftrightarrow\\
6\circ 9\circ 5\circ 2\circ a_6 &= 0 \Leftrightarrow\\
3\circ 5\circ 2\circ a_6 &= 0 \Leftrightarrow\\
7\circ 2\circ a_6 &= 0 \Leftrightarrow\\
9\circ a_6 &= 0 \Leftrightarrow\\
a_6 &= 9
\end{aligned}$$

Άρα, ο κωδικός με ψηφίο ελέγχου είναι η ακολουθία 531219.

Αν συμβεί οποιαδήποτε αλλαγή σε ένα ψηφίο της ακολουθίας ή αν γίνει οποιαδήποτε αλλαγή σε ένα ζεύγος διαδοχικών ψηφίων της, τότε δεν θα ισχύει η εξίσωση (5.1). (Άσκηση)

Στην επόμενη πρόταση δίνονται οι ιδιότητες που ικανοποιούν οι μεταθέσεις των συμμετριών του κανονικού πενταγώνου και η ειδική μετάθεση σ.

Πρόταση 5.14. *Για κάθε $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ με $a \neq b$ και για $\sigma = (0, 1, 5, 8, 9, 4, 2, 7)(3, 6)$ ισχύει ότι*

(i) $\sigma^j(a) \neq \sigma^j(b)$ *για κάθε* $j \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $a \circ \sigma(b) \neq b \circ \sigma(a)$

(iii) $\sigma^j(a) \circ \sigma^{j+1}(b) \neq \sigma^j(b) \circ \sigma^{j+1}(a)$ *για κάθε* $j \in \mathbb{N}$.

Παρατηρήσεις:

(i) Η απόδειξη της ιδιότητας (i) είναι άμεση, διότι η μετάθεση είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Η απόδειξη της ιδιότητας (ii) γίνεται με έλεγχο όλων των περιπτώσεων. Η επιλογή της σ γίνεται ώστε να έχει την ιδιότητα (ii). Η ιδιότητα (iii) είναι συνέπεια της (ii).

(ii) Από την ιδιότητα (i) προκύπτει ότι αν συμβεί ακριβώς μια αλλαγή στα ψηφία του κώδικα δεν θα επαληθεύεται η εξίσωση (5.1).

(iii) Από την ιδιότητα (iii) προκύπτει ότι αν συμβεί ακριβώς μια αντιμετάθεση δύο γειτονικών ψηφίων του κώδικα επίσης δεν θα επαληθεύεται η εξίσωση (5.1).

5.9 Συμπληρωματικές λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 5.1. *Να γραφούν ως γινόμενο ξένων κύκλων οι παρακάτω μεταθέσεις:*

i) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 8 & 5 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

ii) $\mu_2 = (1258)(6854)(358)(7185) \in S_8$

Λύση.

i) $\mu_1 = (1785)(34)(910)$

Πράγματι, υπολογίζοντας επαναληπτικά για κάθε στοιχείο του $[10]$ την εικόνα του μέσω της μ_1 προκύπτουν οι (προσανατολισμένες) τροχιές που αποτελούν τους κύκλους της μ_1

Για να ξεκινήσουμε επιλέγουμε οποιοδήποτε στοιχείο του $[10]$. Εδώ ξεκινάμε από το 1 και βρίσκουμε την τροχιά

$1 \xrightarrow{\mu_1} 7 \xrightarrow{\mu_1} 8 \xrightarrow{\mu_1} 5 \xrightarrow{\mu_1} 1$

Επειδή η τροχιά του 1 δεν περιέχει όλα τα στοιχεία του $[10]$ επιλέγουμε οποιοδήποτε στοιχείο του $[10]$ που δεν περιέχεται στην τροχιά του 1. Εδώ επιλέγουμε το 3 και βρίσκουμε την τροχιά

$3 \xrightarrow{\mu_1} 4 \xrightarrow{\mu_1} 3$

Επειδή οι τροχιές του 1 και 3 δεν περιέχουν όλα τα στοιχεία του $[10]$ επιλέγουμε κάποιο στοιχείο που δεν περιέχεται σ' αυτές. Εδώ επιλέγουμε το 10 και βρίσκουμε την τροχιά

$10 \xrightarrow{\mu_1} 9 \xrightarrow{\mu_1} 10.$

Οι τρεις παραπάνω τροχιές περιέχουν όλα τα στοιχεία του $[10]$ και η μετάθεση μ_1 γράφεται ως γινόμενο των τριών ξένων κύκλων που ορίζονται από τις τροχιές αυτές.

ii) Εδώ έχουμε μια μετάθεση του S_8 η οποία είναι γινόμενο τεσσάρων (όχι ξένων) κύκλων. Όπως και στο πρώτο ερώτημα ξεκινάμε από οποιαδήποτε στοιχείο του $[8]$. Εδώ διαλέγουμε το 1.

Το 1 μέσω του τέταρτου κύκλου απεικονίζεται στο 8, το 8 μέσω του τρίτου κύκλου απεικονίζεται στο 3, το 3 μέσω του 2 κύκλου απεικονίζεται στο 3 και το 3 μέσω του πρώτου κύκλου απεικονίζεται στο 3, άρα

$1 \xrightarrow{\mu_2} 3 \xrightarrow{\mu_2} ?.$

Συνεχίζουμε με το 3: Το 3 μέσω του τέταρτου κύκλου απεικονίζεται στο 3, το 3 μέσω του τρίτου κύκλου απεικονίζεται στο 5, το 5 μέσω του δεύτερου κύκλου απεικονίζεται στο 4, το 4 μέσω του πρώτου κύκλου απεικονίζεται στο 4, άρα

$1 \xrightarrow{\mu_2} 3 \xrightarrow{\mu_2} 4 \xrightarrow{\mu_2} ?.$

Συνεχίζουμε με το 4: Το 4 μέσω του τέταρτου κύκλου απεικονίζεται στο 4, το 4 μέσω του τρίτου κύκλου απεικονίζεται στο 4, το 4 μέσω του δεύτερου κύκλου απεικονίζεται στο 6, το 6 μέσω του πρώτου κύκλου απεικονίζεται στο 6, άρα

$1 \xrightarrow{\mu_2} 3 \xrightarrow{\mu_2} 4 \xrightarrow{\mu_2} 6 \xrightarrow{\mu_2} ?.$

Συνεχίζουμε με το 6: Το 6 μέσω του τέταρτου κύκλου απεικονίζεται στο 6, το 6 μέσω του τρίτου κύκλου απεικονίζεται στο 6, το 6 μέσω του δεύτερου κύκλου απεικονίζεται στο 8, το 8 μέσω του πρώτου κύκλου απεικονίζεται στο 1, άρα η τροχιά του 1 είναι η

$1 \xrightarrow{\mu_2} 3 \xrightarrow{\mu_2} 4 \xrightarrow{\mu_2} 6 \xrightarrow{\mu_2} 1.$

Επειδή η τροχιά του 1 δεν περιέχει όλα τα στοιχεία του [8], όπως και στο πρώτο ερώτημα, διαλέγουμε κάποιο από τα υπόλοιπα στοιχεία του [8]. Εδώ διαλέγουμε το 2: Το 2 μέσω του τέταρτου κύκλου απεικονίζεται στο 2, το 2 μέσω του τρίτου κύκλου απεικονίζεται στο 2, το 2 μέσω του δεύτερου κύκλου απεικονίζεται στο 2, το 2 μέσω του πρώτου κύκλου απεικονίζεται στο 5, άρα

$2 \xrightarrow{\mu_2} 5 \xrightarrow{\mu_2} ?.$

Συνεχίζουμε με το 5: Το 5 μέσω του τέταρτου κύκλου απεικονίζεται στο 7, το 7 μέσω του τρίτου κύκλου απεικονίζεται στο 7, το 7 μέσω του δεύτερου κύκλου απεικονίζεται στο 7, το 7 μέσω του πρώτου κύκλου απεικονίζεται στο 7, άρα

$2 \xrightarrow{\mu_2} 5 \xrightarrow{\mu_2} 7 \xrightarrow{\mu_2} ?.$

Συνεχίζουμε με το 7: Το 7 μέσω του τέταρτου κύκλου απεικονίζεται στο 1, το 1 μέσω του τρίτου κύκλου απεικονίζεται στο 1, το 1 μέσω του δεύτερου κύκλου απεικονίζεται στο 1, το 1 μέσω του πρώτου κύκλου απεικονίζεται στο 2, άρα η τροχιά του 2 είναι η

$2 \xrightarrow{\mu_2} 5 \xrightarrow{\mu_2} 7 \xrightarrow{\mu_2} 2.$

Επειδή οι τροχιές των 1 και 2 δεν περιέχουν όλα τα στοιχεία του [8], όπως και στο πρώτο ερώτημα, διαλέγουμε κάποιο από τα υπόλοιπα στοιχεία του [8]. Εδώ υποχρεωτικά διαλέγουμε το 8: Το 8 μέσω του τέταρτου κύκλου απεικονίζεται στο 5, το 5 μέσω του τρίτου κύκλου απεικονίζεται στο 8, το 8 μέσω του δεύτερου κύκλου απεικονίζεται στο 5, το 5 μέσω του πρώτου κύκλου απεικονίζεται στο 8, άρα η τροχιά του 8 είναι η

$8 \xrightarrow{\mu_2} 8.$

Οι τρεις παραπάνω τροχιές περιέχουν όλα τα στοιχεία του [8] και η μετάθεση μ_2 γράφεται ως γινόμενο των τριών ξένων κύκλων που ορίζονται από τις τροχιές αυτές:

$\mu_2 = (1346)(257)(8)$

Συνήθως παραλείπουμε τις τροχιές μήκους 1 και γράφουμε

$\mu_2 = (1346)(257).$

□

Άσκηση 5.2. *Να εκφραστούν ως γινόμενο αντιμεταθέσεων και να βρεθεί η αρτιότητα των παρακάτω μεταθέσεων:*

i) $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 8 & 5 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

ii) $\mu_2 = (1258)(6854)(358)(7185) \in S_8$

Λύση.

i) Από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι $\mu_1 = (1785)(34)(910)$, οπότε η μ_1 γράφεται ως γινόμενο των παρακάτω 5 αντιμεταθέσεων $\mu_1 = (15)(18)(17)(34)(910)$, επομένως είναι περιττή.

ii) Η $\mu_2 = (1258)(6854)(358)(7185)$ γράφεται ως γινόμενο των παρακάτω 11 αντιμεταθέσεων $\mu_2 = (18)(15)(12)(64)(65)(68)(38)(35)(75)(78)(71)$ επομένως είναι περιττή.

□

5.10 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Έστω οι μεταθέσεις του S_6:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

   (i) Να βρεθούν οι σ^{-1}, τ^{-1}, $\sigma \circ \tau$, $\rho \circ \sigma$, $\rho \circ \sigma \circ \tau$.

   (ii) Να βρεθούν τα $\sigma(5)$, $\sigma^{-1}(5)$, $\tau(5)$, $\rho(5)$, $(\rho \circ \sigma)(2)$, $(\tau^{-1} \circ \rho)(3)$

   (iii) Να γραφούν οι σ, τ, ρ, μ ως γινόμενα ξένων κύκλων.

   (iv) Να γραφούν οι σ, τ, ρ, μ ως σύνθεση αντιμεταθέσεων.

   (v) Να βρεθεί ποιες από τις σ, τ, ρ και μ είναι άρτιες και ποιες περιττές.

   (vi) Να βρεθεί ο αριθμός των παραβάσεων των σ, τ, ρ και μ^{-1}.

2. Να βρεθεί αν είναι άρτια ή περιττή η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 9 & 12 & 1 & 11 & 4 & 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Επίσης να βρεθούν οι $\sigma \circ \sigma$, σ^{-1} και το $\sigma(\sigma(\sigma(5)))$.

3. Να γραφούν οι επόμενες μεταθέσεις του S_6 ως γινόμενο ξένων κύκλων και ως σύνθεση αντιμεταθέσεων.

   (i) $(1234)(513)$.

   (ii) $(13526)(53)(46215)$.

   (iii) $(13)(12)(32)(143)$.

4. Να βρεθεί η τάξη των παρακάτω μεταθέσεων:

   (i) $\sigma_1 = (23)$.

   (ii) $\sigma_2 = (234)$.

   (iii) $\sigma_3 = (23467)$.

   (iv) $\sigma_4 = (124)(357)$.

   (v) $\sigma_5 = (124)(3567)$.

   (vi) $\sigma_6 = (124)(35)$.

   (vii) $\sigma_7 = (124)(357896)$.

   (viii) $\sigma_8 = (1235)(24567)$.

   (ix) $\sigma_9 = (345)(245)$.

   (x) $\sigma_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

   Ποιες από αυτές είναι άρτιες και ποιες περιττές; Να βρεθεί η σ_i^{100} για $i = 1, 2, \ldots, 10$.

5. Να βρεθεί η τάξη μιας μετάθεσης που είναι γινόμενο δύο ξένων κύκλων μήκους 4 και 6 αντίστοιχα.

6. Να βρεθεί η τάξη μιας μετάθεσης που είναι γινόμενο δύο ξένων κύκλων μήκους 444 και 703 αντίστοιχα.

7. Έστω $\sigma : X \to X$ με $\sigma(\sigma(x)) = x$ για κάθε $x \in X$. Να δειχθεί ότι η σ είναι μετάθεση των στοιχείων του X.

8. Έστω X πεπερασμένο σύνολο και $\sigma : X \to X$. Να δειχθεί ότι αν η σ είναι 1-1, τότε είναι και επί του X. Επίσης, να δειχθεί ότι αν η σ είναι επί του X, τότε είναι και 1-1.

9. Να βρεθεί μια αναλογία μεταξύ της σύνθεσης αρτίων-περιττών μεταθέσεων και του προσήμου μιας μετάθεσης.

10. Να βρεθεί ο αριθμός των μεταθέσεων του S_7 με τάξη 3.

11. Έστω $\sigma, \tau \in S_n$.

    (i) Να εξετασθεί αν η μετάθεση $\sigma^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$ είναι άρτια ή περιττή.

    (ii) Να δειχθεί ότι οι μεταθέσεις $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ και τ είναι ή και οι δύο άρτιες ή και οι δύο περιττές.

12. Να δειχθεί ότι μια μετάθεση περιττής τάξης είναι άρτια μετάθεση.

13. Να δοθεί ένα παράδειγμα μετάθεσης άρτιας τάξης η οποία είναι άρτια μετάθεση και ένα παράδειγμα μετάθεσης άρτιας τάξης η οποία είναι περιττή μετάθεση.

14. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές τάξης των μεταθέσεων του S_8 και S_9.

15. Δίδεται η μετάθεση $\sigma =)($

16. Να βρεθεί το ψηφίο ελέγχου για τις ακολουθίες 12345, 1221231 και 999333 χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Verhoeff.

17. Ένα αυτόματο μηχάνημα ανακατέματος των 52 φύλλων της τράπουλας εκτελεί την επόμενη διαδικασία: Αρχικά χωρίζει ("κόβει") την τράπουλα σε δύο ίσα μέρη: το πάνω και το κάτω μέρος. Στη συνέχεια ξανασχηματίζει την τράπουλα χρησιμοποιώντας εναλλάξ ένα φύλλο από το κάθε μέρος, αρχίζοντας από το κάτω μέρος. Έτσι, για παράδειγμα αν η τράπουλα είχε 10 φύλλα με τη σειρά 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Το μηχάνημα αρχικά θα δημιουργούσε δύο σωρούς 5 φύλλων: Το πάνω μέρος θα αποτελούνταν από τα φύλλα 1, 2, 3, 4, 5 και το κάτω μέρος από τα φύλλα 6, 7, 8, 9, 10. Στη συνέχεια θα ξανασχημάτιζε την τράπουλα χρησιμοποιώντας εναλλάξ ένα φύλλο από κάθε μέρος και τελικά τα φύλλα θα είχαν την εξής σειρά: 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5.

    i) Να βρεθεί πόσες φορές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω μηχάνημα για να βρεθούν και πάλι τα φύλλα στην αρχική τους σειρά[1].
    ii) Να περιγραφεί ποια διαδικασία πρέπει να ακολουθήσουμε για να αναιρέσουμε το ανακάτεμα του συγκεκριμένου μηχανήματος.

Σημείωση: Οι επόμενες ασκήσεις απαιτούν γνώσεις από το κεφάλαιο των αλγεβρικών δομών.

18. Να δειχθεί ότι το σύνολο $H = \{I_3, (12)\} \subset S_3$ είναι υποομάδα της ομάδας $(S_3, \circ)$.

19. Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της $(S_3, \circ)$.

20. Να αποδειχθεί ότι σύνολο A_n όλων των άρτιων μεταθέσεων του S_n με την πράξη της σύνθεσης είναι υποομάδα του S_n.

21. Να δοθούν δύο λόγοι που εξηγούν γιατί το σύνολο των περιττών μεταθέσεων του S_n με την πράξη της σύνθεσης δεν είναι υποομάδα του S_n.

[1] Δηλαδή στην σειρά που βρίσκονταν όταν τα πρωτοτοποθετήσαμε στο μηχάνημα

Κεφάλαιο 6

Αλγεβρικές δομές

6.1 Διμελείς πράξεις

Δίνονται τρία μη κενά σύνολα E, F, G. Κάθε απεικόνιση του συνόλου $E \times F$ στο σύνολο G ονομάζεται **διμελής πράξη** (ή απλά **πράξη**).

Αν $E = F = G$, τότε η πράξη ονομάζεται **εσωτερική πράξη** στο σύνολο E.

Αν $F = G$ (αντ. $E = G$), τότε η πράξη ονομάζεται **εξωτερική πράξη** στο G με σύνολο **τελεστών** το E (αντ. F) **προς τα αριστερά** (αντ. **δεξιά**).

Προφανώς, κάθε εσωτερική πράξη στο E μπορεί να θεωρηθεί ως εξωτερική πράξη με σύνολο τελεστών το E ως προς τα αριστερά και ως προς τα δεξιά.

Για τις πράξεις χρησιμοποιούνται συνήθως σύμβολα όπως:

$$+, \cdot, \oplus, \odot, *, \circ, \square, \triangle, T, \perp .$$

Παραδείγματα

1. Οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι εσωτερικές πράξεις στο σύνολο $\mathbb{R}$.

2. Οι πράξεις $*$ και $\circ$ με
$$x * y = 3x - 2y + 5$$
και
$$x \circ y = x^2 - y^2$$
είναι δύο εσωτερικές πράξεις στο σύνολο $\mathbb{R}$.

3. Η πράξη $*$ με $x * y = \frac{x}{y}$ είναι μια εσωτερική πράξη στο σύνολο $\mathbb{Q}^*$, ενώ δεν είναι εσωτερική στο σύνολο $\mathbb{Z}^*$.

4. Η πράξη $\square$ με $\lambda \square (a + bi) = \lambda a + \lambda bi$ είναι μια εξωτερική πράξη στο σύνολο $\mathbb{C}$, με σύνολο τελεστών το $\mathbb{R}$ προς τα αριστερά.

5. Η πράξη $\triangle$ με $x \triangle n = \sqrt[n]{x^2 + 1}$ είναι μια εξωτερική πράξη στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τελεστών το $\mathbb{N}^*$ προς τα δεξιά.

Ένα σύνολο E εφοδιασμένο με ορισμένες πράξεις $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (εσωτερικές ή εξωτερικές) ονομάζεται **αλγεβρική δομή** και σημειώνεται με $(E, T_1, T_2, \ldots, T_n)$. Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο E ονομάζεται **φορέας** της δομής.

Παράδειγμα: Η τετράδα $(\mathbb{R}, \circ, *, \triangle)$, όπου $\circ, *, \triangle$ είναι οι πράξεις των προηγούμενων παραδειγμάτων 2 και 5, είναι μια αλγεβρική δομή.

Έστω E, A μη κενά σύνολα, $A \subseteq E$ και $*$ είναι μια εσωτερική πράξη (αντ. εξωτερική πράξη με σύνολο τελεστών το F προς τα αριστερά) στο E. Το A είναι **κλειστό** ως προς την πράξη $*$ αν και μόνο αν $x * y \in A$, για κάθε $x, y \in A$ (αντ. $\lambda * x \in A$, για κάθε $x \in A$ και $\lambda \in F$).
Παρατήρηση: Αν ένα σύνολο A είναι κλειστό ως προς όλες τις πράξεις μιας δομής με φορέα το σύνολο E, τότε ορίζεται μια καινούργια δομή με φορέα το A και τις ίδιες πράξεις. Συγκεκριμένα, αν $*$ είναι μια εσωτερική πράξη (αντ. εξωτερική πράξη με σύνολο τελεστών το F προς τα αριστερά) της αρχικής δομής, τότε ο περιορισμός της στο σύνολο $A \times A$ (αντ. $F \times A$) θα είναι μία από τις πράξεις της καινούργιας δομής.

Πίνακες Cayley

Μια εσωτερική πράξη $*$ ορισμένη σε ένα πεπερασμένο σύνολο

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

μπορεί να αποδοθεί με ένα $n \times n$ πίνακα, ο οποίος περιέχει όλα τα αποτελέσματα της πράξης και ονομάζεται **πίνακας Cayley**. Συγκεκριμένα, το στοιχείο $x_i * x_j$ είναι το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης του πίνακα Cayley.

$*$	x_1	x_2	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
x_1						
x_2						
$\vdots$						
x_i				$x_i * x_j$		
$\vdots$						
x_n						

Παράδειγμα: Ο πίνακας Cayley της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο $E = \{1, -1, i, -i\}$ είναι

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Παρατήρηση: Αν $|E| = n$, αποδεικνύεται ότι υπάρχουν n^{n^2} διαφορετικοί πίνακες Cayley, δηλαδή υπάρχουν n^{n^2} διαφορετικές διμελείς εσωτερικές πράξεις στο E.

Ιδιότητες εσωτερικών πράξεων

Έστω η εσωτερική πράξη $*$ στο σύνολο E.

1. Η πράξη είναι **αντιμεταθετική** αν

$$x * y = y * x, \quad \text{για κάθε } x, y \in E.$$

2. Η πράξη είναι **προσεταιριστική** αν

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \quad \text{για κάθε } x, y, z \in E.$$

3. Η πράξη είναι **επιμεριστική** ως προς μια άλλη πράξη $\circ$ στο E αν

$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z) \quad \text{και} \quad (y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x),$$

για κάθε $x, y, z \in E$.

4. Η πράξη έχει **ουδέτερο στοιχείο** το $e \in E$ αν

$$e * x = x * e = x, \quad \text{για κάθε } x \in E.$$

Αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο μιας πράξης, τότε αυτό είναι μοναδικό.
Αν η πράξη $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο το e και για $x \in E$ υπάρχει $y \in E$, τέτοιο ώστε

$$x * y = y * x = e,$$

τότε το y ονομάζεται **συμμετρικό** στοιχείο του x και σημειώνεται με x'.

Αποδεικνύεται ότι αν μια πράξη έχει ουδέτερο στοιχείο και είναι προσεταιριστική, τότε το συμμετρικό κάθε στοιχείου, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι αν δύο στοιχεία x, y έχουν συμμετρικά, τότε θα έχει συμμετρικό και το στοιχείο $x * y$ και είναι

$$(x * y)' = y' * x'. \tag{6.1}$$

Παρατήρηση: Προφανώς, οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών είναι αντιμεταθετικές, προσεταιριστικές και έχουν ουδέτερα στοιχεία τα 0 και 1 αντίστοιχα. Επιπλέον, κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αντ. $x \in \mathbb{R}^*$) έχει συμμετρικό ως προς την πράξη της πρόσθεσης (αντ. πολλαπλασιασμού) το αντίθετό του (αντ. αντίστροφό του).

Κατόπιν τούτων, αν μια πράξη σε ένα σύνολο E συμβολίζεται με $+$ (αντ. $\cdot$), τότε συνήθως ονομάζεται πρόσθεση (αντ. πολλαπλασιασμός), το ουδέτερο στοιχείο της συμβολίζεται με 0 (αντ. 1) και ονομάζεται **μηδενικό** (αντ. **μοναδιαίο**) στοιχείο, και το συμμετρικό ενός στοιχείου x συμβολίζεται με $-x$ (αντ. x^{-1}) και ονομάζεται **αντίθετο** (αντ. **αντίστροφο**) του x. Στην περίπτωση αυτή, η σχέση (6.1) γράφεται

$$-(x + y) = (-y) + (-x) \quad \text{και} \quad (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}.$$

Η πρόσθεση των x και $-y$, συμβολίζεται με $x - y$, για λόγους απλότητας, δηλαδή

$$x - y = x + (-y).$$

Παραδείγματα

1. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:

$$x * y = x + y + 2.$$

Η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική, διότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι

$$x * y = x + y + 2 = y + x + 2 = y * x.$$

Είναι προσεταιριστική, διότι για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z + 2) \\ &= x + (y + z + 2) + 2 \\ &= (x + y + 2) + z + 2 \\ &= (x * y) + z + 2 = (x * y) * z \end{aligned}$$

Προκειμένου να εξετασθεί η ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου, θεωρείται η εξίσωση[1] $x * e = x$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$x * e = x \Leftrightarrow x + e + 2 = x \Leftrightarrow e = -2.$$

Κατόπιν τούτου, και επειδή η πράξη είναι αντιμεταθετική, ισχύει ότι

$$x * (-2) = (-2) * x = x,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το ουδέτερο στοιχείο είναι το $e = -2$.

Τέλος, προκειμένου να ευρεθούν τα στοιχεία που έχουν συμμετρικό, θεωρείται η εξίσωση $x * x' = -2$. Πράγματι, είναι

$$x * x' = -2 \Leftrightarrow x + x' + 2 = -2 \Leftrightarrow x' = -x - 4.$$

Κατόπιν τούτου, και επειδή η πράξη είναι αντιμεταθετική, ισχύει ότι

$$x * (-x - 4) = (-x - 4) * x = -2,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το συμμετρικό του $x \in \mathbb{R}$ ως προς την πράξη $*$ είναι το $-x - 4$.

2. Στο διάστημα $[0, +\infty)$ ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική, διότι για κάθε $x, y \in [0, +\infty)$ είναι

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x,$$

και προσεταιριστική, διότι για κάθε $x, y, z \in [0, +\infty)$ είναι

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * \sqrt{y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2})^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} * z = (x * y) * z. \end{aligned}$$

Προκειμένου να εξετασθεί η ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου, θεωρείται η εξίσωση $x * e = x$. Πράγματι, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι

$$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + e^2} = x \Leftrightarrow x^2 + e^2 = x^2 \Leftrightarrow e = 0.$$

Κατόπιν τούτου, και επειδή η πράξη είναι αντιμεταθετική, ισχύει ότι

$$x * 0 = 0 * x = x,$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$, και επιπλέον $e \in [0, +\infty)$, οπότε το ουδέτερο στοιχείο είναι το $e = 0$.

Προκειμένου να ευρεθούν τα στοιχεία που έχουν συμμετρικό, θεωρείται η εξίσωση $x * x' = 0$. Πράγματι, είναι

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (x')^2} = 0 \Leftrightarrow x = x' = 0.$$

[1] Γενικά, για να υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, πρέπει η λύση της εξίσωσης να μην εξαρτάται από το x.

Άρα, το μοναδικό στοιχείο που έχει συμμετρικό είναι το 0.

Τέλος, θα εξετασθεί η επιμεριστικότητα του συνήθους πολλαπλασιασμού ως προς την πράξη $*$. Για κάθε $x, y, z \in [0, +\infty)$ είναι

$$x(y * z) = x\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{(xy)^2 + (xz)^2} = (xy) * (xz).$$

Άρα, ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη επιμεριστική ως προς την πράξη $*$.

3. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:

$$x * y = ixy.$$

Η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική, διότι για κάθε $x, y \in \mathbb{C}$ είναι

$$x * y = ixy = iyx = y * x$$

και προσεταιριστική, αφού για κάθε $x, y, z \in \mathbb{C}$ είναι

$$x * (y * z) = x * (iyz) = ix(iyz) = -xyz$$

και

$$(x * y) * z = (ixy) * z = i(ixy)z = -xyz$$

και επομένως $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Προκειμένου να εξετασθεί η ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου, θεωρούμε την εξίσωση

$$x * e = x \Leftrightarrow ixe = x,$$

η οποία, για $x \neq 0$, δίνει $e = -i$. Άρα, το ουδέτερο στοιχείο της πράξης αυτής είναι το $e = -i$.

Τέλος, προκειμένου να ευρεθούν τα στοιχεία $x \in \mathbb{C}$ που έχουν συμμετρικό, θεωρούμε την εξίσωση

$$x * x' = e \Leftrightarrow ixx' = -i \Leftrightarrow xx' = -1,$$

η οποία δίνει ότι $x' = -\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x \in \mathbb{C}^*$. Άρα, κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{C}^*$ έχει συμμετρικό στοιχείο το $-\dfrac{1}{x}$.

6.2 Ομάδες

Μια δομή $(G, *)$ ονομάζεται **ομάδα** αν η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική, υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο του G ως προς την πράξη $*$ και κάθε στοιχείο του G έχει συμμετρικό ως προς την πράξη αυτή. Δηλαδή, η δομή $(G, *)$ είναι ομάδα αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις:

1. $(x * y) * z = x * (y * z)$, για κάθε $x, y, z, \in G$.

2. Υπάρχει $e \in G$, τέτοιο ώστε $e * x = x * e = x$, για κάθε $x \in G$.

3. Για κάθε $x \in G$, υπάρχει $x' \in G$, τέτοιο ώστε $x' * x = x * x' = e$.

Αν επιπλέον η πράξη $*$ ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα, τότε η ομάδα ονομάζεται **αντιμεταθετική** ή **αβελιανή**.

Παραδείγματα

1. Οι δομές $(\mathbb{R}, +)$ και $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι αβελιανές ομάδες.

2. Η δομή $(\mathbb{Z},+)$ είναι αβελιανή ομάδα, ενώ η δομή $(\mathbb{N},+)$ δεν είναι ομάδα, αφού κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{N}$ δεν έχει συμμετρικό (αντίθετο) στοιχείο στο $\mathbb{N}$.

3. Η δομή $(\mathbb{R}^A,+)$, όπου $\mathbb{R}^A$ είναι το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ και $+$ η πράξη της πρόσθεσης συναρτήσεων, είναι αβελιανή ομάδα. Η πράξη αυτή ορίζεται ως γνωστόν από τη σχέση
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \quad \text{για κάθε } x \in A,$$
όπου $f, g \in \mathbb{R}^A$.

4. Για $n \in \mathbb{N}^*$, θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\mod n$ στο $\mathbb{Z}$, με
$$x \equiv y \pmod n \Leftrightarrow \text{ υπάρχει } k \in \mathbb{Z}, \text{ με } y - x = kn.$$
Στο σύνολο πηλίκο $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ της ισοδυναμίας αυτής, ορίζουμε την πράξη $\oplus$ ως εξής:
$$\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x+y}.$$
Η πράξη είναι καλά ορισμένη στο $\mathbb{Z}_n$, αφού η ισοδυναμία αυτή είναι συμβιβαστή με την πρόσθεση των ακεραίων, δηλαδή ισχύει
$$\begin{cases} x_1 \equiv x_2 \pmod n \\ y_1 \equiv y_2 \pmod n \end{cases} \Rightarrow x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod n$$
Θα αποδειχθεί ότι η δομή $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

   Επειδή, για κάθε $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$, είναι
$$\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x+y} = \overline{y+x} = \overline{y} \oplus \overline{x},$$
η πράξη $\oplus$ είναι αντιμεταθετική.

   Επειδή, για κάθε $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$, είναι
$$\overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z}) = \overline{x} \oplus \overline{y+z} = \overline{x+y+z} = \overline{x+y} \oplus \overline{z} = (\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z},$$
η πράξη $\oplus$ είναι προσεταιριστική.

   Για κάθε $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$, είναι
$$\overline{x} \oplus \overline{0} = \overline{x+0} = \overline{x},$$
οπότε η πράξη $\oplus$ έχει ουδέτερο (μηδενικό) στοιχείο το $\overline{0}$.

   Τέλος, για κάθε $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$, είναι
$$\overline{x} \oplus \overline{n-x} = \overline{x+n-x} = \overline{n} = \overline{0},$$
οπότε το συμμετρικό του $\overline{x}$ είναι το $\overline{n-x}$.

   Κατόπιν τούτων, η δομή $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

5. Η δομή $(A, \circ)$, όπου A είναι το σύνολο των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων από ένα σύνολο Q στον εαυτό του, και $\circ$ η πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων, είναι μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική συνάρτηση. Η ομάδα αυτή δεν είναι αβελιανή.

Νόμος διαγραφής

Σε κάθε ομάδα $(G, *)$ ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$$x * y = x * z \Rightarrow y = z$$

και

$$y * x = z * x \Rightarrow y = z.$$

Πράγματι, για την απόδειξη της πρώτης συνεπαγωγής, υποτίθεται ότι $x * y = x * z$, έστω ότι e είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας και x' το συμμετρικό του x. Τότε, είναι

$$\begin{aligned} y &= e * y \\ &= (x' * x) * y \\ &= x' * (x * y) \\ &= x' * (x * z) \\ &= (x' * x) * z \\ &= e * z \\ &= z \end{aligned}$$

Ανάλογα, αποδεικνύεται και η δεύτερη συνεπαγωγή.

Δυνάμεις

Αν για την πράξη της ομάδας χρησιμοποιείται το σύμβολο $\cdot$, τότε η ομάδα ονομάζεται **πολλαπλασιαστική**. Όπως έχει ήδη λεχθεί, στην περίπτωση αυτή, το ουδέτερο στοιχείο παριστάνεται με 1 και ονομάζεται μοναδιαίο, ενώ το συμμετρικό του x παριστάνεται με x^{-1} και ονομάζεται αντίστροφο.

Σε μια πολλαπλασιαστική ομάδα $(G, \cdot)$, ορίζονται οι δυνάμεις x^k, $k \in \mathbb{Z}$, ως εξής:

$$x^0 = 1, \quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ φορές}}, \quad x^{-n} = (x^{-1})^n, \quad \text{όπου } n \in \mathbb{N}^*.$$

Εύκολα αποδεικνύονται οι ιδιότητες των δυνάμεων

$$x^k \cdot x^m = x^{k+m} \qquad \text{και} \qquad (x^k)^m = x^{km},$$

για κάθε $k, m \in \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση: Ανάλογα, στην προσθετική ομάδα $(G, +)$ ορίζονται τα πολλαπλάσια kx, $k \in \mathbb{Z}$, του στοιχείου x, δηλαδή

$$0x = 0, \quad nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ φορές}}, \quad (-n)x = n(-x),$$

όπου $n \in \mathbb{N}^*$, τα οποία ικανοποιούν τις ιδιότητες

$$kx + mx = (k+m)x \qquad \text{και} \qquad m(kx) = (mk)x = mkx.$$

Ισοδύναμος ορισμός ομάδας

Αποδεικνύεται ότι η ομάδα μπορεί να ορισθεί με φαινομενικά ασθενέστερες συνθήκες. Συγκεκριμένα, ισχύει:

Η δομή $(G, *)$ είναι ομάδα αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι ιδιότητες:

1. (Προσεταιριστικότητα.)

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \qquad \text{για κάθε } x, y, z, \in G.$$

2. (Ύπαρξη αριστερού ουδέτερου στοιχείου.) Υπάρχει $e \in G$, τέτοιο ώστε

$$e * x = x, \qquad \text{για κάθε } x \in G.$$

3. (Ύπαρξη αριστερού συμμετρικού στοιχείου.) Για κάθε $x \in G$, υπάρχει $x' \in G$, τέτοιο ώστε

$$x' * x = e.$$

Υποομάδες

Αν $(G, *)$ είναι μια ομάδα και H είναι ένα μη κενό υποσύνολο του G, κλειστό ως προς την πράξη $*$, τότε ο περιορισμός της πράξης $*$ στο H είναι μια πράξη στο H, η οποία ονομάζεται **επαγόμενη πράξη** στο H από το G και, χάριν απλότητας, συμβολίζεται επίσης με $*$. Αν επιπλέον η δομή $(H, *)$ είναι ομάδα, τότε ονομάζεται **υποομάδα** της $(G, *)$.

Κάθε ομάδα $(G, *)$ μπορεί να θεωρηθεί ως υποομάδα του εαυτού της. Κάθε άλλη ομάδα ονομάζεται **γνήσια** υποομάδα.

Αν e είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $(G, *)$, τότε προφανώς η δομή $(\{e\}, *)$ είναι υποομάδα της $(G, *)$ και ονομάζεται **τετριμμένη** υποομάδα της $(G, *)$.

Εύκολα προκύπτει ότι, αν e είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $(G, *)$, τότε το e είναι το ουδέτερο στοιχείο σε κάθε υποομάδα της. Δηλαδή, κάθε υποομάδα έχει ως ουδέτερο στοιχείο, το ουδέτερο στοιχείο της αρχικής ομάδας. Βάσει αυτού, ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει και για το συμμετρικό ενός στοιχείου υποομάδας.

Παραδείγματα

1. Η δομή $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ είναι μια γνήσια υποομάδα της ομάδας $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

2. Αν $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ και E, F είναι τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ που αποτελούνται από τις συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις αντίστοιχα, τότε η δομή $(E, +)$ είναι υποομάδα της ομάδας $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ και η δομή $(F, +)$ είναι υποομάδα της ομάδας $(E, +)$ (και προφανώς και της $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$), όπου η πράξη $+$ είναι η πρόσθεση συναρτήσεων.

3. Έστω η ομάδα $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$. Ζητείται να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι γνήσιες, μη τετριμμένες υποομάδες της.

   Λύση. Έστω $(H, \oplus)$ είναι μια μη τετριμμένη υποομάδα της, τότε πρέπει $\overline{0} \in H$ και ($\overline{1} \in H$ ή $\overline{2} \in H$ ή $\overline{3} \in H$). Αν $\overline{1} \in H$, τότε $\overline{2} = \overline{1} \oplus \overline{1} \in H$ οπότε και $\overline{3} = \overline{1} \oplus \overline{2} \in H$, οπότε $H = G$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $\overline{1} \notin H$.

   Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\overline{3} \notin H$.

   Επειδή η δομή $(\{\overline{0}, \overline{2}\}, \oplus)$ είναι προφανώς ομάδα, θα είναι και η μοναδική γνήσια μη τετριμμένη υποομάδα της $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$. □

Στα επόμενα, για λόγους απλότητας, θα ταυτίζουμε τον φορέα μιας υποομάδας με την υποομάδα, θα γράφουμε δηλαδή H υποομάδα της $(G, *)$ αντί H φορέας υποομάδας της $(G, *)$.

Ισοδύναμοι ορισμοί υποομάδας

Είναι προφανές ότι αν $(G, *)$ είναι μια ομάδα και $\varnothing \neq H \subseteq G$, τότε το H είναι υποομάδα της $(G, *)$ αν και μόνο αν ισχύουν οι ιδιότητες:

i) Το H είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$.

ii) $e \in H$.

iii) $x \in H \Rightarrow x' \in H$.

Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα (ii) μπορεί να παραλειφθεί, διότι προκύπτει από τις (i) και (iii), αφού $H \neq \varnothing$ άρα υπάρχει $x \in H$, οπότε $e = x * x' \in H$.

Επιπλέον, οι ιδιότητες (i) και (iii) μπορούν να αντικατασταθούν από την ιδιότητα

(iv) Για κάθε $x, y \in H$, έπεται ότι $x * y' \in H$.

Πράγματι, αν ισχύουν οι (i) και (iii) και $x, y \in H$, τότε από την (iii) έπεται ότι $y' \in H$, οπότε από την (i) έπεται ότι $x * y' \in H$.

Αντίστροφα, αν ισχύει η (iv) και $x \in H$, τότε επειδή $x' = e * x'$, από την ιδιότητα (iv) προκύπτει ότι $x' \in H$, δηλαδή ισχύει η (iii). Επιπλέον, αν $x, y \in H$, τότε, επειδή $x * y = x * (y')'$, από τις ιδιότητες (iii) και (iv), προκύπτει ότι $x * y \in H$, δηλαδή ισχύει η (i).

Κατόπιν τούτων, ισχύει η πρόταση

Πρόταση 6.1. *Αν $(G, *)$ είναι μια ομάδα και H μη κενό υποσύνολο του G, τότε H υποομάδα της $(G, *)$ αν και μόνο αν ισχύει ότι*

$$x * y' \in H, \qquad \text{για κάθε } x, y \in H.$$

6.3 Δακτύλιοι

Η αλγεβρική δομή $(A, *, \circ)$, όπου $A \neq \varnothing$ και $*$, $\circ$ είναι δύο εσωτερικές πράξεις στο A, ονομάζεται **δακτύλιος** αν ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) Η δομή $(A, *)$ είναι αβελιανή ομάδα.

(ii) Η πράξη $\circ$ είναι προσεταιριστική.

(iii) Η πράξη $\circ$ είναι επιμεριστική ως προς την $*$.

Στους δακτυλίους, όπως συνηθίζεται, χρησιμοποιούνται τα σύμβολα $+$ (της πρόσθεσης) και $\cdot$ (του πολλαπλασιασμού) αντί των συμβόλων $*$ και $\circ$ αντίστοιχα. Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το 0 (μηδενικό στοιχείο) και του πολλαπλασιασμού, εφόσον υπάρχει, είναι το 1 (μοναδιαίο στοιχείο).

Στην περίπτωση που η πράξη $\cdot$ είναι αντιμεταθετική (αντ. έχει μοναδιαίο στοιχείο), ο δακτύλιος ονομάζεται **αντιμεταθετικός δακτύλιος** (αντ. **δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο**).

Ο δακτύλιος $(\{0\}, +, \cdot)$ ονομάζεται **μηδενικός δακτύλιος**.

Παραδείγματα

(1) Οι αλγεβρικές δομές $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι αντιμεταθετικοί δακτύλιοι με μοναδιαίο στοιχείο.

(2) Η δομή $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο το S.

(3) Η δομή $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$, $n \geqslant 2$, με $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ και

$$\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x+y} \qquad \text{και} \qquad \overline{x} \odot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο το $\overline{1}$, διότι η δομή $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα και ισχύουν:

$$\overline{x} \odot (\overline{y} \odot \overline{z}) = \overline{x} \odot \overline{yz} = \overline{x(yz)} = \overline{(xy)z} = \overline{xy} \odot \overline{z} = (\overline{x} \odot \overline{y}) \odot \overline{z}$$

και

$$\begin{aligned} \overline{x} \odot (\overline{y} \oplus \overline{z}) &= \overline{x} \odot \overline{y+z} = \overline{x(y+z)} = \overline{xy+yz} = \overline{xy} \oplus \overline{yz} \\ &= (\overline{x} \odot \overline{y}) \oplus (\overline{x} \odot \overline{z}). \end{aligned}$$

Ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ ονομάζεται **δακτύλιος κλάσεων υπολοίπων modulo** n.

(4) Στο σύνολο $\mathcal{M}_2$ όλων των 2×2 μητρών $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{bmatrix}$$

Θα αποδειχθεί ότι η δομή $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ είναι ένας μη αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

Επειδή

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ c_2+c_1 & d_2+d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix},$$

η πράξη $+$ είναι αντιμεταθετική.

Επειδή

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ c_2+c_3 & d_2+d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & d_1+d_2+d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

η πράξη $+$ είναι προσεταιριστική.

Επειδή

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

προκύπτει ότι η πράξη $+$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Επειδή

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

προκύπτει ότι κάθε στοιχείο του $\mathcal{M}_2$ έχει συμμετρικό ως προς την πράξη $+$.

Άρα, η δομή $(\mathcal{M}_2, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Επειδή

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2a_3 + b_2c_3 & a_2b_3 + b_2d_3 \\ c_2a_3 + d_2c_3 & c_2b_3 + d_2d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 + a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + b_1d_2c_3 & a_1a_2b_3 + a_1b_2d_3 + b_1c_2b_3 + b_1d_2d_3 \\ c_1a_2a_3 + c_1b_2c_3 + d_1c_2a_3 + d_1d_2c_3 & c_1a_2b_3 + c_1b_2d_3 + d_1c_2b_3 + d_1d_2d_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 + a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + b_1d_2c_3 & a_1a_2b_3 + a_1b_2d_3 + b_1c_2b_3 + b_1d_2d_3 \\ c_1a_2a_3 + c_1b_2c_3 + d_1c_2a_3 + d_1d_2c_3 & c_1a_2b_3 + c_1b_2d_3 + d_1c_2b_3 + d_1d_2d_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

η πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική.

Επειδή

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 \\ c_2 + c_3 & d_2 + d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2 + a_1a_3 + b_1c_2 + b_1c_3 & a_1b_2 + a_1b_3 + b_1d_2 + b_1d_3 \\ c_1a_2 + c_1a_3 + d_1c_2 + d_1c_3 & c_1b_2 + c_1b_3 + d_1d_2 + d_1d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1a_3 + b_1c_3 & a_1b_3 + b_1d_3 \\ c_1a_3 + d_1c_3 & c_1b_3 + d_1d_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

έπεται ότι η πράξη $\cdot$ είναι επιμεριστική ως προς την πράξη $+$.

Άρα, η δομή $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ είναι δακτύλιος.

Επιπλέον το μοναδιαίο στοιχείο είναι η μήτρα $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, αφού

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 + b0 & a0 + b1 \\ c1 + d0 & c0 + d1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a + 0c & 1b + 0d \\ 0a + 1c & 0b + 1d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Τέλος, ο δακτύλιος δεν είναι αντιμεταθετικός, αφού η πράξη $\cdot$ δεν είναι αντιμεταθετική, όπως φαίνεται και από το επόμενο παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Μηδενοδιαιρέτες

Αν για έναν δακτύλιο $(A, +, \cdot)$ υπάρχουν στοιχεία $x, y \in A^* = A \setminus \{0\}$, με $x \cdot y = 0$, τότε τα στοιχεία x, y ονομάζονται **μηδενοδιαιρέτες** ή **διαιρέτες του μηδενός**.

Παραδείγματα

1. Στον δακτύλιο $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 6, τα στοιχεία $\overline{2}, \overline{3}$ είναι μηδενοδιαιρέτες, αφού
$$\overline{2} \odot \overline{3} = \overline{6} = \overline{0}$$
2. Στον δακτύλιο $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ των 2×2 μητρών, τα στοιχεία $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μηδενοδιαιρέτες, αφού
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.4 Ακέραιες περιοχές

Ένας μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος
$(A, +, \cdot)$ με μοναδιαίο στοιχείο ονομάζεται **ακέραια περιοχή** αν και μόνο αν δεν έχει μηδενοδιαιρέτες, δηλαδή
$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } y = 0, \qquad \text{για κάθε } x, y \in A.$$

Παραδείγματα

1. Οι δομές $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι ακέραιες περιοχές.
2. Η δομή $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ είναι ακέραια περιοχή αν και μόνο αν ο αριθμός n είναι πρώτος.[2]

   Πράγματι, αν n είναι πρώτος και $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$, με $\overline{x} \odot \overline{y} = \overline{0}$, θα αποδειχθεί ότι $\overline{x} = \overline{0}$ ή $\overline{y} = \overline{0}$. Είναι
$$\begin{aligned} \overline{x} \odot \overline{y} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{xy} = \overline{0} &\Leftrightarrow xy \equiv 0 \pmod{n} \\ &\overset{3}{\Leftrightarrow} (n \text{ διαιρεί τον } x \text{ ή } n \text{ διαιρεί τον } y) \\ &\Leftrightarrow \left(\overline{x} = \overline{0} \text{ ή } \overline{y} = \overline{0}\right). \end{aligned}$$

   Αντίστροφα, αν $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ είναι ακέραια περιοχή και n δεν είναι πρώτος, θα υπάρχουν $m, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ με $n = mk$. Τότε, είναι
$$\overline{0} = \overline{n} = \overline{mk} = \overline{m} \odot \overline{k} \Rightarrow (\overline{m} = \overline{0} \text{ ή } \overline{k} = \overline{0}),$$
   το οποίο είναι άτοπο, αφού $m, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Άρα, ο n είναι πρώτος αριθμός.

6.5 Σώματα

Ένας μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος $(F, +, \cdot)$ με μοναδιαίο στοιχείο ονομάζεται **σώμα** αν και μόνο αν κάθε στοιχείο $x \in F^* = F \setminus \{0\}$ έχει συμμετρικό (αντίστροφο) ως προς την πράξη $\cdot$.

Με άλλα λόγια, η δομή $(F, +, \cdot)$ είναι σώμα αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω:

[2] Ένας φυσικός $n > 1$ λέγεται πρώτος όταν οι μόνοι διαιρέτες του είναι ο εαυτός του και το 1.

[3] Ισχύει, διότι ο n είναι πρώτος.

1. Η δομή $(F, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

2. Η δομή $(F^*, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα.

3. Η πράξη $\cdot$ είναι επιμεριστική ως προς την πράξη $+$.

Παρατήρηση: Ορισμένοι συγγραφείς δεν απαιτούν στον ορισμό του σώματος την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού. Στη δική τους προσέγγιση, αν επιπλέον η πράξη $\cdot$ είναι αντιμεταθετική, τότε ονομάζουν το σώμα αντιμεταθετικό ή αβελιανό.
Παραδείγματα

1. Οι δομές $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι σώματα.

2. Η δομή $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ είναι ακέραια περιοχή αλλά όχι σώμα, αφού η δομή $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ δεν είναι ομάδα.

Τα σώματα και οι ακέραιες περιοχές είναι στενά συνδεδεμένα, όπως προκύπτει και από τις επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 6.2. *Κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή.*

Το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει πάντα. ένα αντιπαράδειγμα αποτελεί η ακέραια περιοχή $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Εντούτοις, για πεπερασμένες ακέραιες περιοχές, ισχύει ότι

Πρόταση 6.3. *Κάθε πεπερασμένη ακέραια περιοχή είναι σώμα.*

6.6 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 6.1. *Στο σύνολο των θετικών αριθμών, ορίζεται η εσωτερική πράξη $*$ ως εξής:*

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Να αποδειχθεί ότι το ανοικτό διάστημα $(0,1)$ είναι κλειστό σύνολο ως προς την πράξη αυτή.

Λύση. Αρκεί να δειχθεί ότι $x * y \in (0,1)$, για κάθε $x, y \in (0,1)$.

Επειδή $x, y > 0$, έπεται ότι $x * y > 0$. Επιπλέον, είναι

$$\frac{x+y}{1+xy} < 1 \Leftrightarrow x+y < 1+xy \Leftrightarrow 1+xy-x-y > 0 \Leftrightarrow 1-y-x(1-y) > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1-y) > 0.$$

Οπότε, επειδή $x, y \in (0,1)$, έπεται ότι $(1-x)(1-y) > 0$ και συνεπώς $\frac{x+y}{1+xy} < 1$. Άρα, $x * y \in (0,1)$ για κάθε $x, y \in (0,1)$ και επομένως το διάστημα $(0,1)$ είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$. □

Άσκηση 6.2. *Στο σύνολο $\mathbb{R}$, ορίζεται η εσωτερική πράξη $*$ ως εξής:*

$$x * y = \frac{x+y}{2}.$$

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$$

είναι κλειστό ως προς την πράξη αυτή.

Λύση. Για $x, y \in A$, είναι

$$\begin{aligned}(x*y)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} &\leqslant \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{4} \leqslant \frac{x^2+y^2+2xy+x^2+y^2-2xy}{4} \\ &\leqslant \frac{2x^2+2y^2}{4} = \frac{x^2+y^2}{2} < \frac{5+5}{2} = 5.\end{aligned}$$

Άρα $x * y \in A$ και επομένως το σύνολο A είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$. □

Άσκηση 6.3. *Να αποδειχθεί ότι αν $|E| = n$, τότε υπάρχουν n^{n^2} διαφορετικοί πίνακες Cayley.*

Λύση. Κάθε πίνακας Cayley περιέχει n^2 το πλήθος στοιχεία. Επειδή κάθε στοιχείο του πίνακα Cayley ανήκει στο E, μπορεί να επιλεγεί κατά n τρόπους, οπότε ο πίνακας Cayley μπορεί να επιλεγεί κατά

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n^2 \text{ φορές}} = n^{n^2}$$

τρόπους. □

Άσκηση 6.4. *Να αποδειχθεί ότι αν μια πράξη $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Λύση. Αν υπάρχουν δύο ουδέτερα στοιχεία, τα e_1, e_2, τότε θα ισχύει ότι

$$e_2 = e_1 * e_2 \quad (\text{θεωρώντας το } e_1 \text{ ως ουδέτερο στοιχείο})$$

και

$$e_1 = e_1 * e_2 \quad (\text{θεωρώντας το } e_2 \text{ ως ουδέτερο στοιχείο})$$

οπότε $e_1 = e_2$. □

Άσκηση 6.5. *Να αποδειχθεί ότι αν μια πράξη $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο και είναι προσεταιριστική, τότε το συμμετρικό κάθε στοιχείου (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.*

Λύση. Έστω το στοιχείο x και έστω ότι τα y, z είναι συμμετρικά στοιχεία του x, δηλαδή

$$x * y = y * x = e \quad \text{και} \quad x * z = z * x = e,$$

όπου e το ουδέτερο στοιχείο της πράξης. Οπότε, με τη βοήθεια της προσεταιριστικής ιδιότητας της πράξης, προκύπτει ότι

$$y = y * e = y * (x * z) = (y * x) * z = e * z = z,$$

δηλαδή $y = z$. □

Άσκηση 6.6. *Έστω μια πράξη $*$ στο σύνολο E, η οποία έχει ουδέτερο στοιχείο και είναι προσεταιριστική. Να αποδειχθεί ότι αν τα στοιχεία $x, y \in E$ έχουν συμμετρικά στοιχεία τα x', y' αντίστοιχα, τότε και το στοιχείο $x * y$ έχει συμμετρικό και ισχύει*

$$(x * y)' = y' * x'.$$

Λύση. Αρκεί να δειχθεί ότι

$$(x * y) * (y' * x') = (y' * x') * (x * y) = e,$$

όπου e το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$.

Πράγματι, λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας της πράξης, προκύπτει ότι

$$(x * y) * (y' * x') = x * (y * (y' * x')) = x * ((y * y') * x') = x * (e * x') = x * x' = e.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και ότι $(y' * x') * (x * y) = e$, οπότε τελικά είναι $(x * y)' = y' * x'$. □

Άσκηση 6.7. *Στο σύνολο $\mathbb{R}$, ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:*

$$x * y = x + y - 3xy.$$

Να αποδειχθεί ότι η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική, προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο στο $\mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{3}\}$ έχει συμμετρικό.

Λύση. Επειδή, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$x * y = x + y - 3xy = y + x - 3yx = y * x,$$

η πράξη είναι αντιμεταθετική.

Επιπλέον, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z - 3yz) = x + (y + z - 3yz) - 3x(y + z - 3yz) \\ &= x + y + z - 3xy - 3yz - 3xz + 9xyz \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y - 3xy) * z = (x + y - 3xy) + z - 3(x + y - 3xy)z \\ &= x + y + z - 3xy - 3yz - 3xz + 9xyz, \end{aligned}$$

οπότε $x * (y * z) = (x * y) * z$, και επομένως η πράξη είναι προσεταιριστική.

Στη συνέχεια, θεωρούμε την εξίσωση

$$x * e = x \Leftrightarrow x + e - 3xe = x \Leftrightarrow (3x - 1)e = 0.$$

Προκειμένου να ισχύει η παραπάνω σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει να είναι $e = 0$. Επιπλέον, επειδή ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, θα ισχύει επίσης ότι $0 * x = x$, και επομένως το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$.

Τέλος, αν $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, τότε

$$x * x' = 0 \Leftrightarrow x + x' - 3xx' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{x}{3x - 1}.$$

Άρα, κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ έχει συμμετρικό στοιχείο ως προς την πράξη $*$ το $\frac{x}{3x-1}$. □

Άσκηση 6.8. *Έστω η αλγεβρική δομή* $(\mathbb{R}, *)$, *με*

$$x * y = axy + b(x + y) + c,$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}^*$ *και* $c \in \mathbb{R}$.

(i) *Να αποδειχθεί ότι η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.*

(ii) *Να αποδειχθεί ότι η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική αν και μόνο αν έχει ουδέτερο στοιχείο.*

(iii) *Αν η πράξη $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο, να βρεθούν τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ που έχουν συμμετρικό ως προς την πράξη αυτή.*

Λύση. (i) Επειδή για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$x * y = axy + b(x + y) + c = ayx + b(y + x) + c = y * x,$$

η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.

(ii) Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (ayz + b(y + z) + c) \\ &= ax(ayz + b(y + z) + c) + b(x + (ayz + b(y + z) + c)) + c \\ &= a^2xyz + ab(xy + xz + yz) + b^2(y + z) + (ac + b)x + bc + c \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (axy+b(x+y)+c)*z \\ &= a(axy+b(x+y)+c)z+b(axy+b(x+y)+c+z)+c \\ &= a^2xyz+ab(xy+xz+yz)+b^2(x+y)+(ac+b)z+bc+c.\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$x*(y*z)=(x*y)*z \Leftrightarrow b^2z+(ac+b)x=b^2x+(ac+b)z \Leftrightarrow (x-z)(b^2-ac-b)=0.$$

Οπότε, η πράξη είναι προσεταιριστική αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$b^2=ac+b \tag{6.2}$$

Από την άλλη, επειδή η πράξη είναι αντιμεταθετική, έχει ουδέτερο στοιχείο το $e\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν ισχύει ότι $x*e=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή

$$x*e=x \Leftrightarrow axe+b(x+e)+c=x \Leftrightarrow (ae+b-1)x+be+c=0,$$

προκύπτει ότι η πράξη έχει ουδέτερο στοιχείο το e αν και μόνο αν ισχύει ότι

$$(ae+b-1)x+be+c=0,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ή ισοδύναμα όταν

$$ae+b-1=0 \qquad be+c=0. \tag{6.3}$$

Από τις τελευταίες 2 ισότητες, προκύπτει ότι $e=-\frac{c}{b}=\frac{1-b}{a}$ και τελικά ότι $b^2=ac+b$.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι αν η πράξη $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο, τότε πρέπει να ισχύει η σχέση (6.2). Από την άλλη, αν ισχύει η σχέση (6.2), τότε θέτοντας $e=-\frac{c}{b}$, ικανοποιούνται οι ισότητες της σχέσης (6.3), οπότε η πράξη έχει ουδέτερο στοιχείο το $-\frac{c}{b}$.

Από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική αν και μόνο αν ισχύει η σχέση (6.2) αν και μόνο αν έχει ουδέτερο στοιχείο.

(iii) Υποτίθεται ότι υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο e της πράξης $*$. Τότε, σύμφωνα με το (ii), ισχύει η σχέση (6.2) και είναι $e=-\frac{c}{b}$.

Προκειμένου να υπάρχει το συμμετρικό x' ενός στοιχείου $x\in\mathbb{R}$, πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{aligned}x*x'=-\frac{c}{b} &\Leftrightarrow axx'+b(x+x')+c=-\frac{c}{b} \\ &\Leftrightarrow (ax+b)x'=-\frac{b^2x+bc+c}{b}\end{aligned} \tag{6.4}$$

Αν $ax+b=0$, δηλαδή αν $x=-\frac{b}{a}$, τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.2) προκύπτει ότι

$$-\frac{b^2x+bc+c}{b}=-\frac{b^2\left(-\frac{b}{a}\right)+(b+1)\frac{b^2-b}{a}}{b}=-\frac{-b^2+(b+1)(b-1)}{a}=\frac{1}{a}\neq 0.$$

Οπότε, η σχέση (6.4) δεν ισχύει για $x=-\frac{b}{a}$.

Αντίθετα, για $x\neq-\frac{b}{a}$, η σχέση (6.4) δίνει

$$x'=-\frac{b^2x+bc+c}{b(ax+b)},$$

οπότε κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{b}{a}\}$ έχει συμμετρικό στοιχείο. □

Άσκηση 6.9. *Έστω η αλγεβρική δομή* $((0,+\infty), *, \circ)$, *με*

$$x * y = x + 3y \qquad \text{και} \qquad x \circ y = 3xy.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι η πράξη $\circ$ *είναι αντιμεταθετική, προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο του* $(0,+\infty)$ *έχει συμμετρικό ως προς την πράξη* $\circ$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η πράξη $*$ *δεν είναι αντιμεταθετική ούτε προσεταιριστική.*

(iii) Να εξετασθεί η επιμεριστικότητα κάθε πράξης ως προς την άλλη.

Λύση. (i) Επειδή για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$ ισχύει ότι

$$x \circ y = 3xy = 3yx = y \circ x,$$

η πράξη $\circ$ είναι αντιμεταθετική.

Επειδή για κάθε $x, y, z \in (0,+\infty)$ ισχύει ότι

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (3yz) = 3x(3yz) = 3(3xy)z = (3xy) \circ z = (x \circ y) \circ z,$$

η πράξη $\circ$ είναι προσεταιριστική.

Επιπλέον, για $x \in (0,+\infty)$, είναι

$$x \circ e = x \Leftrightarrow 3xe = x \Leftrightarrow e = \frac{1}{3}.$$

Επομένως, δεδομένου ότι η πράξη $\circ$ είναι αντιμεταθετική, το $\frac{1}{3}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της.

Τέλος, για $x \in (0,+\infty)$, είναι

$$x \circ x' = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3xx' = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x' = \frac{1}{9x}.$$

Επομένως, κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχει συμμετρικό το $\frac{1}{9x}$ ως προς την πράξη $\circ$.

(ii) Επειδή

$$x * y = y * x \Leftrightarrow x + 3y = y + 3x \Leftrightarrow x = y,$$

αν ληφθούν $x, y \in (0,+\infty)$, με $x \neq y$, τότε είναι $x * y \neq y * x$, και επομένως η πράξη $*$ δεν είναι αντιμεταθετική.

Επειδή

$$x * (y * z) = x * (y + 3z) = x + 3(y + 3z) = x + 3y + 9z$$

και

$$(x * y) * z = (x + 3y) * z = x + 3y + 3z,$$

προκύπτει ότι $x * (y * z) \neq (x * y) * z$, για κάθε $x, y, z \in (0,+\infty)$, και επομένως η πράξη $*$ δεν είναι προσεταιριστική.

(iii) Επειδή

$$x * (y \circ z) = x * (3yz) = x + 3(3yz) = x + 9yz$$

και

$$(x * y) \circ (x * z) = (x + 3y) \circ (x + 3z) = 3(x + 3y)(x + 3z) = 3x^2 + 9xy + 9xz + 27yz,$$

έπεται ότι η πράξη $*$ δεν είναι επιμεριστική ως προς την πράξη $\circ$.

Από την άλλη, επειδή

$$x \circ (y * z) = x \circ (y + 3z) = 3x(y + 3z) = 3xy + 9xz$$

και

$$(x \circ y) * (x \circ z) = (3xy) * (3xz) = 3xy + 9xz,$$

προκύπτει ότι

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z),$$

για κάθε $x, y, z \in (0, +\infty)$. Επιπλέον, επειδή η πράξη $\circ$ είναι αντιμεταθετική, από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x),$$

για κάθε $x, y, z \in (0, +\infty)$, και επομένως η πράξη $\circ$ είναι επιμεριστική ως προς την πράξη $*$. □

Άσκηση 6.10. *Να αποδειχθεί ότι η αλγεβρική δομή $((2, +\infty), *)$, με*

$$x * y = xy - 2(x + y) + 6,$$

είναι αβελιανή ομάδα.

Λύση. Επειδή, για κάθε $x, y \in (2, +\infty)$, ισχύει ότι

$$x * y = xy - 2(x + y) + 6, = yx - 2(y + x) + 6 = y * x,$$

έπεται ότι η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.

Για κάθε $x, y, z \in (2, +\infty)$, είναι

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (yz - 2(y + z) + 6) \\ &= x(yz - 2(y + z) + 6) - 2(x + (yz - 2(y + z) + 6)) + 6 \\ &= xyz - 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) - 6 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (xy - 2(x + y) + 6) * z \\ &= (xy - 2(x + y) + 6)z - 2((xy - 2(x + y) + 6) + z) + 6 \\ &= xyz - 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) - 6, \end{aligned}$$

οπότε

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

για κάθε $x, y, z \in (2, +\infty)$ και επομένως η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική.

Για $x \in (2, +\infty)$, είναι

$$\begin{aligned} x * e = x &\Leftrightarrow xe - 2(x + e) + 6 = x \\ &\Leftrightarrow xe - 3x - 2e + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(e - 3) - 2(e - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)(e - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow e = 3. \end{aligned}$$

Οπότε, το 3 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$.

Τέλος, για $x \in (2, +\infty)$, είναι

$$\begin{aligned} x * x' = 3 &\Leftrightarrow xx' - 2(x + x') + 6 = 3 \\ &\Leftrightarrow x'(x-2) = 2x - 3 \\ &\Leftrightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2}. \end{aligned}$$

Επειδή $x > 2$, έπεται ότι

$$x' = \frac{2x-3}{x-2} > \frac{2x-4}{x-2} = 2,$$

οπότε $x' \in (2, +\infty)$ και επομένως κάθε στοιχείο $x \in (2, +\infty)$ έχει συμμετρικό το $\frac{2x-3}{x-2}$.

Άρα, η δομή $((2, +\infty), *)$ είναι αβελιανή ομάδα. □

Άσκηση 6.11. *Έστω $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η αλγεβρική δομή $(E, \circ)$, με*

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_1 + y_2)$$

είναι ομάδα. Είναι αβελιανή ομάδα;

Λύση. Για $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E$, είναι

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_1 + y_2)$$

και

$$(y_1, y_2) \circ (x_1, x_2) = (y_1 x_1, y_2 x_1 + x_2)$$

τα οποία δεν είναι εν γένει ίσα. Για παράδειγμα,

$$(1, 2) \circ (2, 1) = (2, 5) \neq (2, 3) = (2, 1) \circ (1, 2).$$

Άρα η πράξη δεν είναι αντιμεταθετική και επομένως η δομή $(E, \circ)$ δεν είναι αβελιανή ομάδα.

Για $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in E$, είναι

$$(x_1, x_2) \circ ((y_1, y_2) \circ (z_1, z_2)) = (x_1, x_2) \circ (y_1 z_1, y_2 z_1 + z_2) = (x_1 y_1 z_1, x_2 y_1 z_1 + y_2 z_1 + z_2)$$

και

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2) \circ (y_1, y_2)) \circ (z_1, z_2) &= (x_1 y_1, x_2 y_1 + y_2) \circ (z_1, z_2) = (x_1 y_1 z_1, (x_2 y_1 + y_2) z_1 + z_2) \\ &= (x_1 y_1 z_1, x_2 y_1 z_1 + y_2 z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Άρα, $(x_1, x_2) \circ ((y_1, y_2) \circ (z_1, z_2)) = ((x_1, x_2) \circ (y_1, y_2)) \circ (z_1, z_2)$, και επομένως η πράξη είναι προσεταιριστική.

Για να υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e = (e_1, e_2) \in E$ για την πράξη $\circ$, πρέπει για κάθε $(x_1, x_2) \in E$ να ισχύει

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \circ (e_1, e_2) = (e_1, e_2) \circ (x_1, x_2) = (x_1, x_2) &\Leftrightarrow (x_1 e_1, x_2 e_1 + e_2) = (e_1 x_1, e_2 x_1 + x_2) = (x_1, x_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 e_1 = e_1 x_1 = x_1 \text{ και} \\ x_2 e_1 + e_2 = e_2 x_1 + x_2 = x_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \text{ και} \\ x_2 + e_2 = e_2 x_1 + x_2 = x_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \text{ και} \\ e_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (e_1, e_2) = (1, 0). \end{aligned}$$

Άρα, το E έχει ουδέτερο στοιχείο το $(1, 0)$ για την πράξη $\circ$.

Στη συνέχεια, εξετάζεται, για κάθε $(x_1, x_2) \in E$, η ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου $(x_1', x_2') \in E$. Είναι

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \circ (x_1', x_2') = (x_1', x_2') \circ (x_1, x_2) = (1, 0) &\Leftrightarrow (x_1 x_1', x_2 x_1' + x_2') = (x_1' x_1, x_2' x_1 + x_2) = (1, 0) \\ &\Leftrightarrow (x_1', x_2') = (\frac{1}{x_1}, -\frac{x_2}{x_1}).\end{aligned}$$

Άρα, κάθε $(x_1, x_2) \in E$ έχει συμμετρικό στοιχείο το $(\frac{1}{x_1}, -\frac{x_2}{x_1}) \in E$.

Κατόπιν τούτων, η δομή $(E, \circ)$ είναι ομάδα. □

Άσκηση 6.12. *Έστω η ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $H = \{4^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Να αποδειχθεί ότι το H είναι φορέας υποομάδας της $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.*

Λύση. Βάσει του ισοδύναμου ορισμού υποομάδας (Πρόταση 6.1), αρκεί να αποδειχθεί ότι $xy^{-1} \in H$, για κάθε $x, y \in H$.

Αν $x, y \in H$, τότε $x = 4^k$, $y = 4^\lambda$, με $k, \lambda \in \mathbb{Z}$, οπότε

$$xy^{-1} = 4^k (4^\lambda)^{-1} = 4^k 4^{-\lambda} = 4^{k-\lambda} \in H,$$

αφού $k - \lambda \in \mathbb{Z}$. Επομένως, το σύνολο H είναι φορέας υποομάδας της $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. □

Άσκηση 6.13. *Αν $(G, *)$ είναι ομάδα και H, K υποομάδες της, να αποδειχθεί ότι*

(i) το $H \cap K$ είναι υποομάδα της $(G, *)$.

(ii) Αν το $H \cup K$ είναι υποομάδα της $(G, *)$, τότε $H \subseteq K$ ή $K \subseteq H$.

Λύση. (i) Το σύνολο $H \cap K$ είναι μη κενό. Πράγματι, αν e είναι το ουδέτερο στοιχείο της $(G, *)$, τότε επειδή H, K είναι υποομάδες της $(G, *)$, έπεται ότι $e \in H$ και $e \in K$, άρα $e \in H \cap K$. Επομένως, βάσει του ισοδύναμου ορισμού υποομάδας (Πρόταση 6.1), αρκεί να αποδειχθεί ότι $x * y' \in H \cap K$, για κάθε $x, y \in H \cap K$.

Πράγματι, αν $x, y \in H \cap K$, τότε $x, y \in H$ και $x, y \in K$ και επειδή H, K είναι υποομάδες της $(G, *)$, έπεται ότι $x * y' \in H$ και $x * y' \in K$, άρα $x * y' \in H \cap K$.

(ii) Αρκεί να αποδειχθεί ότι αν $K \nsubseteq H$, τότε $H \subseteq K$. Έστω $K \nsubseteq H$, τότε υπάρχει $y \in K \backslash H$. Αν $x \in H$, θα δειχθεί ότι $x \in K$.

Επειδή $x, y \in H \cup K$ και $H \cup K$ υποομάδα της $(G, *)$, έπεται ότι $x * y \in H \cup K$. Αν $x * y \in H$, τότε επειδή

$$y = e * y = (x' * x) * y = x' * (x * y),$$

και H υποομάδα της $(G, *)$ (οπότε $x' \in H$), έπεται ότι $y \in H$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $x * y \in K$. Τότε, επειδή

$$x = x * e = x * (y * y') = (x * y) * y'$$

και K υποομάδα της $(G, *)$ (οπότε $y' \in K$), έπεται ότι $x \in K$. □

Άσκηση 6.14. *Να αποδειχθεί ότι η δομή $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, με*

$$x \oplus y = x + y + 1 \qquad \textit{και} \qquad x \odot y = xy + x + y$$

είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Είναι ακέραια περιοχή;

Λύση. Αρχικά, θα αποδειχθεί ότι η δομή $(\mathbb{Z}, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Επειδή, για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$, ισχύει ότι

$$x \oplus y = x + y + 1 = y + x + 1 = y \oplus x,$$

έπεται ότι η πράξη $\oplus$ είναι αντιμεταθετική.

Επειδή, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ισχύει ότι

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y + z + 1) = x + (y + z + 1) + 1 = x + y + z + 2$$

και

$$(x \oplus y) \oplus z = (x + y + 1) \oplus z = (x + y + 1) + z + 1 = x + y + z + 2,$$

έπεται ότι $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, οπότε η πράξη $\oplus$ είναι προσεταιριστική.

Στη συνέχεια, εξετάζεται η ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου του $\mathbb{Z}$ ως προς την πράξη $\oplus$. Είναι

$$x \oplus y = x \Leftrightarrow x + y + 1 = x \Leftrightarrow y = -1,$$

επομένως το $-1 \in Z$ είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη $\oplus$.

Στη συνέχεια, εξετάζεται η ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου ως προς την πράξη $\oplus$, για κάθε $x \in \mathbb{Z}$. Επειδή,

$$x * y = -1 \Leftrightarrow x + y + 1 = -1 \Leftrightarrow y = -x - 2,$$

έπεται ότι το στοιχείο $-x - 2 \in \mathbb{Z}$ είναι το συμμετρικό του x, για κάθε $x \in \mathbb{Z}$.

Άρα, η δομή $(\mathbb{Z}, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Κατόπιν, εξετάζονται οι ιδιότητες της πράξης $\odot$.

Επειδή, για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$, ισχύει ότι

$$x \odot y = xy + x + y = yx + y + x = y \odot x,$$

έπεται ότι η πράξη $\odot$ είναι αντιμεταθετική.

Επειδή, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x \odot (y \odot z) &= x \odot (yz + y + z) \\ &= x(yz + y + z) + x + (yz + y + z) \\ &= x + y + z + xy + yz + zx + xyz \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (x \odot y) \odot z &= (xy + x + y) \odot z \\ &= (xy + x + y)z + (xy + x + y) + z \\ &= x + y + z + xy + yz + zx + xyz, \end{aligned}$$

έπεται ότι $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$, οπότε η πράξη $\odot$ είναι προσεταιριστική.

Επειδή, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x \odot (y \oplus z) &= x \odot (y + z + 1) \\ &= x(y + z + 1) + x + (y + z + 1) \\ &= 2x + y + z + xy + xz + 1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(x \odot y) \oplus (x \odot z) &= (xy + x + y) \oplus (xz + x + z)\\ &= (xy + x + y) + (xz + x + z) + 1\\ &= 2x + y + z + xy + xz + 1,\end{aligned}$$

έπεται ότι $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$, οπότε η πράξη $\odot$ είναι επιμεριστική ως προς την πράξη $\oplus$.

Τέλος, εξετάζεται η ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου ως προς την πράξη $\odot$. Είναι

$$x \odot y = x \Leftrightarrow xy + x + y = x \Leftrightarrow (x+1)y = 0.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ αν και μόνο αν $y = 0$, επομένως το $0 \in \mathbb{Z}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $\odot$.

Άρα η δομή $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

Δεδομένου ότι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $\oplus$ είναι το -1, η δομή $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ είναι ακέραια περιοχή αν και μόνο αν ισχύει

$$x \odot y = -1 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } y = -1, \qquad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Όμως

$$x \odot y = -1 \Rightarrow xy + x + y = -1 \Rightarrow (x+1)(y+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } y = -1,$$

επομένως, η δομή είναι ακέραια περιοχή. □

Άσκηση 6.15. *Να αποδειχθεί ότι κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή.*

Λύση. Έστω σώμα $(F, +, \cdot)$ και $x, y \in F$, με $xy = 0$. Αρκεί να δειχθεί ότι αν $x \neq 0$, τότε $y = 0$.

Επειδή $x \neq 0$, υπάρχει το αντίστροφό του, έστω το x^{-1}, οπότε

$$y = 1y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0.$$ □

Άσκηση 6.16. *Να αποδειχθεί ότι κάθε πεπερασμένη ακέραια περιοχή είναι σώμα.*

Λύση. Έστω ακέραια περιοχή $(A, +, \cdot)$. Αρκεί να δειχθεί ότι κάθε στοιχείο $a \in A^*$ έχει αντίστροφο.

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : A \to A$, με $f(x) = ax$. Η απεικόνιση αυτή είναι ένα προς ένα. Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in A$, με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε

$$\begin{aligned}f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow ax_1 = ax_2\\ &\Rightarrow ax_1 + (-ax_2) = 0 \text{ (Προσθέτοντας κατά μέλη το } -ax_2.\text{)}\\ &\Rightarrow ax_1 + a(-x_2) = 0 \text{ (βλ. Παρατήρηση σελ. 157.)}\\ &\Rightarrow a(x_1 + (-x_2)) = 0 \text{ (Επιμεριστική ιδιότητα.)}\\ &\Rightarrow x_1 + (-x_2) = 0 \text{ (Διότι } a \neq 0 \text{ και } A \text{ ακέραια περιοχή.)}\\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \text{ (Προσθέτοντας κατά μέλη το } x_2.\text{)}\end{aligned}$$

Επομένως, τα σύνολα A, $f(A)$ είναι ισοδύναμα και επειδή $A \subseteq f(A)$ και το A είναι πεπερασμένο, προκύπτει ότι $f(A) = A$. Κατόπιν τούτων, αφού $1 \in A$, θα είναι $1 \in f(A)$, οπότε υπάρχει $x \in A$ με $1 = f(x) = ax$. Το στοιχείο x είναι το αντίστροφο του a. □

Άσκηση 6.17. *Έστω η δομή* $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, *με*

$$x \oplus y = x + y - 4 \quad \textit{και} \quad x \odot y = xy - 4(x+y) + 20,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. *Να αποδειχθεί ότι η δομή αυτή είναι σώμα.*

Λύση. Επειδή, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, είναι

$$x \oplus y = x + y - 4 = y + x - 4 = y \oplus x,$$

η πράξη $\oplus$ είναι αντιμεταθετική.

Επειδή, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, είναι

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y + z - 4) = x + (y + z - 4) - 4 = x + y + z - 8$$

και

$$(x \oplus y) \oplus z = (x + y - 4) \oplus z = (x + y - 4) + z - 4 = x + y + z - 8,$$

έπεται ότι $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, οπότε η πράξη $\oplus$ είναι προσεταιριστική.

Η πράξη $\oplus$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $4 \in \mathbb{R}$, διότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$4 \oplus x = x \oplus 4 = x + 4 - 4 = x.$$

Για το συμμετρικό στοιχείο x' του $x \in \mathbb{R}$ ως προς την πράξη $\oplus$, είναι

$$x \oplus x' = 4 \Leftrightarrow x + x' - 4 = 4 \Leftrightarrow x' = 8 - x.$$

Άρα η δομή $(\mathbb{R}, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Επειδή, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, είναι

$$x \odot y = xy - 4(x+y) + 20 = yx - 4(y+x) + 20 = y \odot x,$$

η πράξη $\odot$ είναι αντιμεταθετική.

Επειδή, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R} \backslash \{4\}$, είναι

$$\begin{aligned} x \odot (y \odot z) &= x \odot (yz - 4(y+z) + 20) \\ &= x(yz - 4(y+z) + 20) - 4(x + (yz - 4(y+z) + 20)) + 20 \\ &= xyz - 4(xy + yz + zx) + 16(x+y+z) - 60 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (x \odot y) \odot z &= (xy - 4(x+y) + 20) \odot z \\ &= (xy - 4(x+y) + 20)z - 4((xy - 4(x+y) + 20) + z) + 20 \\ &= xyz - 4(xy + yz + zx) + 16(x+y+z) - 60, \end{aligned}$$

έπεται ότι $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$, οπότε η πράξη $\odot$ είναι προσεταιριστική.

Η πράξη $\odot$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $5 \in \mathbb{R}$, διότι, για κάθε $x \in \mathbb{R} \backslash \{4\}$, είναι

$$x \odot y = x \Leftrightarrow xy - 4(x+y) + 20 = x \Leftrightarrow (x-4)y = 5(x-4),$$

και για να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε $x \in \mathbb{R} \backslash \{4\}$, πρέπει να είναι $y = 5$.

Για το συμμετρικό στοιχείο του $x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$ ως προς την πράξη $\odot$, είναι

$$\begin{aligned} x \odot y = 5 &\Leftrightarrow xy - 4(x+y) + 20 = 5 \\ &\Leftrightarrow (x-4)y = 4x - 15 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{4x-15}{x-4}, \end{aligned}$$

οπότε το $\frac{4x-15}{x-4}$ είναι το συμμετρικό του $x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$, ως προς την πράξη $\odot$.

Άρα η δομή $(\mathbb{R}\backslash\{4\}, \odot)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Τέλος,επειδή

$$\begin{aligned} x \odot (y \oplus z) &= x \odot (y + z - 4) \\ &= x(y+z-4) - 4(x+y+z-4) + 20 \\ &= xy + xz - 8x - 4(y+z) + 36 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (x \odot y) \oplus (x \odot z) &= (xy - 4(x+y) + 20) \oplus (xz - 4(x+z) + 20) \\ &= (xy - 4(x+y) + 20) + (xz - 4(x+z) + 20) - 4 \\ &= xy + xz - 8x - 4(y+z) + 36, \end{aligned}$$

έπεται ότι $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$, οπότε η πράξη $\odot$ είναι επιμεριστική ως προς την πράξη $\oplus$.

Κατόπιν τούτων, η δομή $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ είναι σώμα. □

6.7 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι κλειστά ως προς την πράξη της πρόσθεσης και ποιά ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών.

   i) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$.

   ii) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$.

   iii) $\Gamma = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζεται εσωτερικά η πράξη $*$ ως εξής:

$$x * y = xy - \frac{x+y}{2}.$$

   Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι κλειστό ως προς την πράξη αυτή, ενώ το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι.

3. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζεται η εξωτερική πράξη $*$, με σύνολο τελεστών προς τα αριστερά το $\mathbb{N}$, από την ισότητα:

$$\lambda * y = \lambda x.$$

   Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι κλειστό ως προς την πράξη αυτή, ενώ το σύνολο των περιττών αριθμών δεν είναι.

4. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζεται η εσωτερική πράξη $*$ ως εξής:

$$x * y = 3x + 3y - xy - 6.$$

   Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ είναι κλειστό ως προς την πράξη αυτή.

5. Ποιές από τις παρακάτω ισότητες ορίζουν εσωτερικές πράξεις στο σύνολο των ακεραίων; Ποιές από αυτές είναι προσεταιριστικές, ποιές είναι αντιμεταθετικές και ποιές έχουν ουδέτερο στοιχείο;

   i) $x * y = xy + 1$

   ii) $x * y = \frac{x+y}{3}$

   iii) $x * y = y$

   iv) $x * y = xy^2$

   v) $x * y = x^2 + y^2$

   vi) $x * y = 2^{xy}$

6. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:

$$x * y = x + y + xy.$$

   Να αποδειχθεί ότι η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική, προσεταιριστική, υπάρχει ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο του $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ έχει συμμετρικό.

7. Έστω η αλγεβρική δομή $(\mathbb{R}, *, \circ)$, όπου

$$x * y = \frac{x+y}{2} \qquad \text{και} \qquad x \circ y = 2y - x.$$

   i) Να εξετασθεί αν οι πράξεις αυτές είναι αντιμεταθετικές, προσεταιριστικές και αν έχουν ουδέτερο στοιχείο.

   ii) Να εξετασθεί αν κάθε μια από τις παραπάνω πράξεις είναι επιμεριστική ως προς την άλλη.

8. Έστω η αλγεβρική δομή $(\mathbb{R}, *)$, με

$$x * y = ax + by + xy + c,$$

   όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα a, b, c, ώστε το ουδέτερο στοιχείο του $\mathbb{R}$ ως προς την πράξη $*$ να είναι το 3. Στη συνέχεια, να βρεθούν τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ που έχουν συμμετρικό ως προς την πράξη $*$.

9. Έστω η αλγεβρική δομή $(\mathbb{R}, *)$, με

$$x * y = x^2 y + xy^2 + xy + x + y.$$

   i) Να αποδειχθεί ότι η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.

   ii) Να αποδειχθεί ότι το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη αυτή.

   iii) Να βρεθεί το σύνολο των στοιχείων του $\mathbb{R}$ που έχουν συμμετρικό ως προς την πράξη $*$.

   iv) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{R}$ που έχουν δύο συμμετρικά και στοιχεία του $\mathbb{R}$ που έχουν ένα συμμετρικό.

10. Έστω η αλγεβρική δομή $([0, +\infty), *)$, με

$$x * y = \max\{x, y\}.$$

i) Να αποδειχθεί ότι η πράξη αυτή είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

ii) Να βρεθεί, αν υπάρχει, το ουδέτερο στοιχείο του $\mathbb{R}$ ως προς την πράξη $*$.

iii) Να εξετασθεί αν υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{R}$ που έχουν συμμετρικό ως προς την πράξη $*$.

11. Να συμπληρωθεί ο ακόλουθος πίνακας Cayley, έτσι ώστε η πράξη $*$ να είναι αντιμεταθετική, να έχει ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο να έχει συμμετρικό.

$*$	w	x	y	z
w	y			x
x	z	w		
y				
z				w

12. Να αποδειχθεί ότι η διμελής σχέση $x * y = x - 3xy + y$ ορίζει μια πράξη στο $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι η δομή $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, *\right)$ είναι αβελιανή ομάδα.

13. Να αποδειχθεί ότι η δομή $(\mathrm{E}, *)$, με $E = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{R}\}$ και

$$(a + b\sqrt{2}) * (c + d\sqrt{2}) = ac + bd\sqrt{2}$$

είναι αβελιανή ομάδα.

14. Αν $(G, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το e και $H = \left\{x \in G : x^k = e\right\}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, να αποδειχθεί ότι το H είναι υποομάδα της $(G, \cdot)$.

15. Αν $(G, *)$ είναι μια ομάδα και H,K υποομάδες της, να αποδειχθεί οτι

$$\Delta = \{x \in G : x = a * b, a \in H, b \in K\}$$

είναι υποομάδα της G.

16. Έστω η ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$και $H = \left\{\frac{2k+1}{3-2\lambda} : k, \lambda \in \mathbb{Z}\right\}$. Να αποδειχθεί ότι το H είναι η υποομάδα της $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

17. Έστω $(G, \cdot)$ μια πεπερασμένη ομάδα και H ένα υποσύνολο κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$. Να αποδειχθεί[4] ότι η H είναι υποομάδα της G.

[4] Αρχικά να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in H$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, με $x^k = e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας.

18. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a + \sqrt[3]{2}b + \sqrt[3]{4}c : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$.

i) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο A είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών.

ii) Να αποδειχθεί ότι η δομή $(A, +, \cdot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

19. Να αποδειχθεί ότι η δομή $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, με

$$x \oplus y = x + y + 2 \qquad \text{και} \qquad x \odot y = xy + 2(x + y) + 2$$

είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Είναι ακέραια περιοχή;

20. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε δακτύλιο $(A, +, \cdot)$ ισχύουν οι ιδιότητες:

i) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

ii) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(xy)$.

21. Θεωρούμε το σύνολο $F = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Αφού πρώτα αποδειχθεί ότι το F είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης $+$ και του πολλαπλασιασμού $\cdot$ στο $\mathbb{R}$, στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι η δομή $(F, +, \cdot)$ είναι σώμα.

22. Να αποδειχθεί ότι η δομή $(\mathbb{Q}^2, \oplus, \odot)$, με

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

και

$$(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) = (x_1y_1 + 2x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

είναι σώμα.

23. Αν $(A, +, \cdot)$ είναι ένας μη μηδενικός, αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο το 1, για τον οποίο ισχύει ότι, για κάθε $a \in A \setminus \{1\}$, η εξίσωση

$$a + x = a \cdot x$$

έχει λύση στο A, να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος αυτός είναι σώμα.

Κεφάλαιο 7

Διανυσματικοί χώροι

7.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Θεωρούμε ένα σώμα $(F, \oplus, \odot)$, με μοναδιαίο στοιχείο το 1 και ένα μη κενό σύνολο V εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη $+$ και μια εξωτερική πράξη $\cdot$ με σύνολο τελεστών το F προς τα αριστερά.

Η αλγεβρική δομή $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ ονομάζεται προς τα αριστερά **διανυσματικός χώρος** (ή **γραμμικός χώρος**) **επί του σώματος** $(F, \oplus, \odot)$ αν και μόνο αν

1. Η δομή $(V, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.
2. Για κάθε $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ισχύουν:
   (i) $\lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}$.
   (ii) $(\lambda \oplus \mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}$.
   (iii) $(\lambda \odot \mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{x})$.
   (iv) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Παρατηρήσεις:

1. Τα στοιχεία του συνόλου F ονομάζονται **τελεστές** και σημειώνονται με ελληνικά γράμματα (συνήθως τα $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu$), ενώ τα στοιχεία του V ονομάζονται **διανύσματα** και σημειώνονται με λατινικά γράμματα (συνήθως τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$). Για να μην υπάρχει σύγχυση, τα διανύσματα θα δίδονται με έντονη γραφή (όπως φαίνεται και στον ορισμό του διανυσματικού χώρου).
2. Οι εσωτερικές πράξεις $\oplus$, $\odot$ του σώματος, για απλότητα θα συμβολίζονται με $+$ και $\cdot$ αντίστοιχα.
3. Η εξωτερική πράξη του συνόλου των διανυσμάτων ονομάζεται **βαθμωτός** (ή αριθμητικός) πολλαπλασιασμός. Στα επόμενα, θα παραλείπεται το σύμβολο $\cdot$ του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, δηλαδή για $\lambda \in F$ και $\mathbf{x} \in V$, θα γράφουμε $\lambda\mathbf{x}$ αντί $\lambda \cdot \mathbf{x}$.
4. Αν η εξωτερική πράξη $\cdot$ με σύνολο τελεστών προς τα αριστερά αντικατασταθεί στον παραπάνω ορισμό από εξωτερική πράξη $\cdot$ με σύνολο τελεστών προς τα δεξιά, και επομένως κάθε όρος της μορφής $\lambda \cdot \mathbf{x}$ στην ιδιότητα 2 αντικατασταθεί από $\mathbf{x} \cdot \lambda$, τότε προκύπτει ο ορισμός του προς τα δεξιά διανυσματικού χώρου.

   Επειδή υπάρχει πλήρης αναλογία μεταξύ των δύο αυτών εννοιών, όπως και των αποτελεσμάτων που τις διέπουν, θα περιοριστούμε στη μελέτη των προς τα αριστερά διανυσματικών χώρων, τους οποίους θα ονομάζουμε απλά **διανυσματικούς χώρους** (ή **γραμμικούς χώρους**).

Κάθε διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (αντ. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$) ονομάζεται **πραγματικός** (αντ. **μιγαδικός**) **διανυσματικός χώρος**.

Ο διανυσματικός χώρος του οποίου ο φορέας περιέχει ένα μόνο στοιχείο (το $\mathbf{0}$) ονομάζεται **μηδενικός διανυσματικός χώρος**.

Παραδείγματα

1. Η δομή $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ με τελεστές από το σώμα $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, όπου για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

και

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

2. Γενικά, για κάθε σώμα $(F, +, \cdot)$, η δομή $(F^n, +, \cdot)$, $n \geqslant 2$, όπου για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ και για κάθε $\lambda \in F$ ορίζουμε

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

και

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ με μηδενικό στοιχείο το $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Πράγματι, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{F}^n$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ και $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n) = \mathbf{y} + \mathbf{x} \text{ (Αντιμετάθεση)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + \mathbf{z} \\
&= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} \text{ (Προσεταίριση)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} + \mathbf{0} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0) \\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x} \text{ (Ουδέτερο στοιχείο)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \ldots, x_n - x_n) \\
&= (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0} \text{ (Συμμετρικό στοιχείο)}
\end{aligned}$$

Οπότε, το $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ είναι το αντίθετο του $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Άρα η δομή $(F^n, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Επιπλέον, αν $\lambda, \mu \in F$, είναι

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \ldots, \lambda(x_n + y_n)) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n) \\
&= \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\mathbf{x} &= ((\lambda+\mu)x_1, (\lambda+\mu)x_2, \ldots, (\lambda+\mu)x_n) = (\lambda x_1+\mu x_1, \lambda x_2+\mu x_2, \ldots, \lambda x_n+\mu x_n) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n) \\
&= \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda\mu)\mathbf{x} &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, \ldots, (\lambda\mu)x_n) = (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \ldots, \lambda(\mu x_n)) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n) \\
&= \lambda(\mu\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

$$1\mathbf{x} = (1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$$

Άρα, η δομή $(F^n, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$.

Παρατήρηση: Γενικότερα, αν

$$(V_1, +, \cdot), (V_2, +, \cdot), \ldots, (V_n, +, \cdot), \quad n \geqslant 2,$$

είναι διανυσματικοί χώροι επί του σώματος
$(F, +, \cdot)$, τότε στο σύνολο $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$, ορίζονται οι πράξεις

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) + (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n) = (\mathbf{x}_1+\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2+\mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{x}_n+\mathbf{y}_n)$$

και

$$\lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = (\lambda\mathbf{x}_1, \lambda\mathbf{x}_2, \ldots, \lambda\mathbf{x}_n),$$

όπου $\lambda \in F$ και $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in V_i$, για κάθε $i \in [n]$.

Αποδεικνύεται ανάλογα ότι η δομή $(V, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, ο οποίος ονομάζεται **διανυσματικός χώρος γινόμενο** των διανυσματικών χώρων $(V_i, +, \cdot)$, $i \in [n]$.

3. Κάθε σώμα $(F, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του εαυτού του (όπου η πράξη $\cdot$ του σώματος θεωρείται και ως βαθμωτός πολλαπλασιασμός).

4. Έστω P_n το σύνολο των πολυωνύμων, με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού μικρότερου ή ίσου με n. Το σύνολο P_n, εφοδιασμένο με τις ακόλουθες πράξεις ορίζει πραγματικό διανυσματικό χώρο: Έστω $p(x), q(x) \in P_n$, με

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

και

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Τότε, οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις

$$(p+q)(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + a_0 + b_0$$

$$(\lambda p)(x) = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 x + \lambda a_0, \lambda \in \mathbb{R}$$

5. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ ορίζει πραγματικό διανυσματικό χώρο. Οι πράξεις ορίζονται ως εξής: Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{x} = \alpha + i\beta$, $\mathbf{y} = \gamma + i\delta$. Τότε

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \alpha + i\beta + \gamma + i\delta = \alpha + \gamma + i(\beta + \delta) \in \mathbb{C},$$

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha + i\beta) = \lambda\alpha + i\lambda\beta \in \mathbb{C},$$

6. Στο σύνολο $\mathcal{M}_2$ όλων των 2×2 μητρών με στοιχεία στο $\mathbb{R}$, δηλαδή της μορφής $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, ορίζονται οι παρακάτω δύο πράξεις

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix}$$

και

$$\lambda \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{bmatrix}.$$

Θα αποδειχθεί ότι η δομή $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Πράγματι, για την πράξη $+$ του $\mathcal{M}_2$ είναι

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \alpha_1 & \beta_2 + \beta_1 \\ \gamma_2 + \gamma_1 & \delta_2 + \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix},$$

οπότε η πράξη είναι αντιμεταθετική.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 & \beta_2 + \beta_3 \\ \gamma_2 + \gamma_3 & \delta_2 + \delta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 & \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

οπότε η πράξη $+$ είναι προσεταιριστική.

Επιπλέον,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

οπότε η μήτρα $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{M}_2$ ως προς την πράξη $+$.

Τέλος, επειδή

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \alpha' & \beta + \beta' \\ \gamma + \gamma' & \delta + \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \delta + \delta' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = -\alpha \\ \beta' = -\beta \\ \gamma' = -\gamma \\ \delta' = -\delta \end{cases}$$

έπεται ότι κάθε $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ έχει αντίθετο στοιχείο το $\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{bmatrix}$.

Άρα, η δομή $(\mathcal{M}_2, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Επιπλέον, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\lambda\left(\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{bmatrix}\right) &= \lambda\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \beta_1+\beta_2\\ \gamma_1+\gamma_2 & \delta_1+\delta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda(\alpha_1+\alpha_2) & \lambda(\beta_1+\beta_2)\\ \lambda(\gamma_1+\gamma_2) & \lambda(\delta_1+\delta_2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2 & \lambda\beta_1+\lambda\beta_2\\ \lambda\gamma_1+\lambda\gamma_2 & \lambda\delta_1+\lambda\delta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1\\ \lambda\gamma_1 & \lambda\delta_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda\alpha_2 & \lambda\beta_2\\ \lambda\gamma_2 & \lambda\delta_2\end{bmatrix}\\ &= \lambda\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}(\lambda+\mu)\alpha & (\lambda+\mu)\beta\\ (\lambda+\mu)\gamma & (\lambda+\mu)\delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\alpha+\mu\alpha & \lambda\beta+\mu\beta\\ \lambda\gamma+\mu\gamma & \lambda\delta+\mu\delta\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\lambda\alpha & \lambda\beta\\ \lambda\gamma & \lambda\delta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mu\alpha & \mu\beta\\ \mu\gamma & \mu\delta\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\lambda\left(\mu\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix}\mu\alpha & \mu\beta\\ \mu\gamma & \mu\delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda(\mu\alpha) & \lambda(\mu\beta)\\ \lambda(\mu\gamma) & \lambda(\mu\delta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\lambda\mu)\alpha & (\lambda\mu)\beta\\ (\lambda\mu)\gamma & (\lambda\mu)\delta\end{bmatrix} = (\lambda\mu)\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

και

$$1\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\alpha & 1\beta\\ 1\gamma & 1\delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}.$$

Άρα, η δομή $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Παρατήρηση: Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι το σύνολο όλων των $n \times m$ μητρών, $n, m \in \mathbb{N}^*$, από στοιχεία ενός σώματος $(F, +, \cdot)$, εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού μητρών, είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$.

7.2 Ιδιότητες διανυσματικών χώρων

Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$. Τότε, για κάθε $\lambda, \mu \in F$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό στοιχείο της ομάδας $(V, +)$.
2. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, όπου 0 είναι το μηδενικό στοιχείο της ομάδας $(F, +)$.
3. Αν $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε $\lambda = 0$ ή $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
4. $\lambda(-\mathbf{x}) = -(\lambda\mathbf{x})$.
5. $(-\lambda)\mathbf{x} = -(\lambda\mathbf{x})$.
6. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.
7. $(-\lambda)(-\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.
8. Αν $\lambda \in F^*$, τότε $\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$. (Νόμος διαγραφής για τους τελεστές.)
9. Αν $\mathbf{x} \in V^*$, τότε $\lambda\mathbf{x} = \mu\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \mu$. (Νόμος διαγραφής για τα διανύσματα.)
10. $\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$.
11. $(\lambda - \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} - \mu\mathbf{x}$.

7.3 Διανυσματικοί υπόχωροι

Αν $(V, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και W ένα μη κενό υποσύνολο του V, κλειστό ως προς τις πράξεις $+$ και $\cdot$ του V, τότε οι περιορισμοί των πράξεων αυτών στο σύνολο $W \times W$ και $F \times W$ αντίστοιχα ονομάζονται **επαγόμενες πράξεις στο W από το V** και, χάριν απλότητας, συμβολίζονται επίσης με $+$ και $\cdot$ αντίστοιχα.

Αν επιπλέον η δομή $(W, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος, τότε ονομάζεται **διανυσματικός** (ή **γραμμικός**) **υπόχωρος** (ή απλά **υπόχωρος**) του $(V, +, \cdot)$.

Κάθε διανυσματικός χώρος μπορεί να θεωρηθεί ως υπόχωρος του εαυτού του. Αν $\mathbf{0}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $(V, +)$, τότε η δομή $(\{\mathbf{0}\}, +, \cdot)$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ και ονομάζεται **μηδενικός υπόχωρος**.

Κάθε φορέας υποχώρου $(W, +, \cdot)$ περιέχει το $\mathbf{0}$, αφού για $\mathbf{x} \in W$ είναι $\mathbf{0} = 0\mathbf{x}$ και W κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$.

Στα επόμενα, για λόγους απλότητας, θα ταυτίζουμε τον φορέα ενός υπόχωρου με τον υπόχωρο, δηλαδή θα γράφουμε W υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ αντί W φορέας υποχώρου του $(V, +, \cdot)$.

Πρόταση 7.1. *Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και W ένα μη κενό υποσύνολο του V. Τότε, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *το W είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$.*

(ii) *$\lambda\mathbf{x} \in W$, και $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$, για κάθε $\lambda \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$.*

(iii) *$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in W$, για κάθε $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$.*

(iv) *$\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$, για κάθε $\lambda \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$.*

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ (δηλαδή τον τρισδιάστατο χώρο) και τα διανύσματα $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Τότε, τα σύνολα

$$W_1 = \{\alpha\mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

και

$$W_2 = \{\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

ορίζουν διανυσματικούς υποχώρους του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Πράγματι για κάθε $a_1\mathbf{v}, a_2\mathbf{v} \in W_1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\alpha_1\mathbf{v} + \alpha_2\mathbf{v} = (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{v} \in W_1,$$

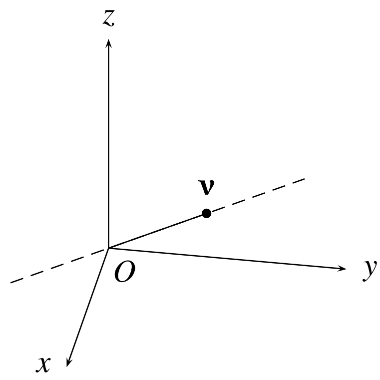
$$\lambda(\alpha\mathbf{v}) = (\lambda\alpha)\mathbf{v} \in W_1$$

Επίσης, για κάθε $a_1\mathbf{v} + b_1\mathbf{w}, a_2\mathbf{v} + b_2\mathbf{w} \in W_2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

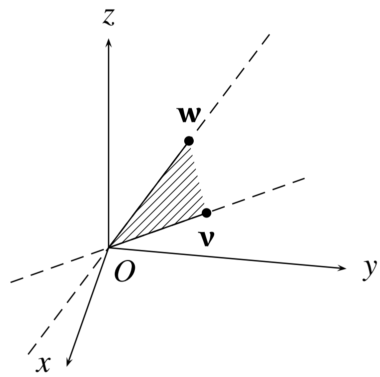
$$(\alpha_1\mathbf{v} + \beta_1\mathbf{w}) + (\alpha_2\mathbf{v} + \beta_2\mathbf{w}) = (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{v} + (\beta_1 + \beta_2)\mathbf{w} \in W_2,$$

$$\lambda(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = (\lambda\alpha)\mathbf{v} + (\lambda\beta)\mathbf{w} \in W_2.$$

Γεωμετρικά, ο υπόχωρος W_1, όταν $\mathbf{v} \neq (0, 0, 0)$, παριστάνει την ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και περιέχει το διάνυσμα $\mathbf{v}$.



Αν επιπλέον τα διανύσματα $\mathbf{w}, \mathbf{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, (δηλαδή ισχύει ότι $\mathbf{w} \neq \lambda\mathbf{v}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$) τότε ο υπόχωρος W_2 παριστάνει το επίπεδο που περιέχει την αρχή των αξόνων και τα διανύσματα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$.



2. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και τα σύνολα

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5\}$$

και

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0\}.$$

Θα μελετήσουμε ποιά από τα παραπάνω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το μηδενικό στοιχείο $(0, 0, 0)$ της ομάδας $(\mathbb{R}^3, +)$ δεν ανήκει στο W_1, αφού $2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \neq 5$, οπότε το W_1 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Αντίθετα, $(0, 0, 0) \in W_2$, οπότε $W_2 \neq \varnothing$. Επιπλέον, αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_2$, με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, τότε

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \qquad \text{και} \qquad 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω δύο ισότητες με λ και μ αντίστοιχα και προσθέτοντας τις ισότητες που προκύπτουν, έπεται ότι

$$\lambda(3x_1 + 2x_2 - 4x_3) + \mu(3y_1 + 2y_2 - 4y_3) = 0,$$

οπότε

$$3(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) - 4(\lambda x_3 + \mu y_3) = 0$$

και επομένως,

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \in W_2,$$

άρα, βάσει της Πρότασης 7.1, το W_2 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

3. Έστω $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των 2×2 μητρών με πραγματικά στοιχεία και

$$W_1 = \{\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ 2\gamma & 1 \end{bmatrix}\}, \quad W_2 = \{\begin{bmatrix} 4\alpha & 3\beta \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}\}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Θα μελετήσουμε ποιά από τα παραπάνω σύνολα είναι υπόχωροι του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$.

Παρατηρούμε ότι το μηδενικό στοιχείο $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν ανήκει στο W_1, οπότε το W_1 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$.

Αντίθετα, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_2$, οπότε $W_2 \neq \varnothing$.

Επιπλέον, αν $\begin{bmatrix} 4\alpha_1 & 3\beta_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\alpha_2 & 3\beta_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \in W_2$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε είναι

$$\lambda \begin{bmatrix} 4\alpha_1 & 3\beta_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 4\alpha_2 & 3\beta_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\lambda\alpha_1 & 3\lambda\beta_1 \\ -\lambda\gamma_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\mu\alpha_2 & 3\mu\beta_2 \\ -\mu\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2) & 3(\lambda\beta_1 + \mu\beta_2) \\ -(\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) & 0 \end{bmatrix} \in W_2.$$

Άρα, βάσει της Πρότασης 7.1, το W_2 είναι υπόχωρος του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$.

7.4 Τομή διανυσματικών υποχώρων

Η τομή δύο ή περισσότερων υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου είναι υπόχωρος. Συγκεκριμένα, αν V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $(V, +, \cdot)$, τότε $V_1 \cap V_2$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$.

Πράγματι, επειδή $\mathbf{0} \in V_1$ και $\mathbf{0} \in V_2$, έπεται ότι $\mathbf{0} \in V_1 \cap V_2$, οπότε $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$.

Αν $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \cap V_2$, τότε επειδή τα V_1, V_2 είναι υπόχωροι και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_2$, έπεται ότι

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in V_1 \quad \text{και} \quad \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in V_2.$$

Οπότε, $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in V_1 \cap V_2$ και σύμφωνα με την Πρόταση 7.1, έπεται ότι $V_1 \cap V_2$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$.

7.5 Ένωση διανυσματικών υποχώρων

Η ένωση δύο ή περισσότερων υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι εν γένει υπόχωρος. Συγκεκριμένα, αν V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $(V, +, \cdot)$, τότε $V_1 \cup V_2$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ αν και μόνο αν $V_1 \subseteq V_2$ ή $V_2 \subseteq V_1$.

Πράγματι, αν $V_1 \cup V_2$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ και $V_1 \nsubseteq V_2$, θα αποδειχθεί ότι $V_2 \subseteq V_1$. Έστω, $\mathbf{x} \in V_2$. Επειδή $V_1 \nsubseteq V_2$, θα υπάρχει $\mathbf{y} \in V_1$, με $\mathbf{y} \notin V_2$. Επειδή $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \cup V_2$, έπεται ότι $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1 \cup V_2$, οπότε $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$ ή $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_2$. Αν $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_2$, τότε επειδή $-\mathbf{x} \in V_2$ (αφού $\mathbf{x} \in V_2$), έπεται ότι $\mathbf{y} = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in V_2$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \notin V_2$, οπότε $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V_1$ και επειδή $-\mathbf{y} \in V_1$ (αφού $\mathbf{y} \in V_1$), έπεται ότι $\mathbf{x} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + (-\mathbf{y}) \in V_1$. Άρα, $V_2 \subseteq V_1$.

7.6 Άθροισμα διανυσματικών υποχώρων

Το άθροισμα δύο ή περισσότερων υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου είναι υπόχωρος. Συγκεκριμένα, αν V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $(V, +, \cdot)$, τότε το σύνολο

$$V_1 + V_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_1 \in V_1, \mathbf{x}_2 \in V_2\}$$

ονομάζεται **άθροισμα** των υποχώρων V_1, V_2 και είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$.

Πράγματι, επειδή $\mathbf{0} \in V_1$ και $\mathbf{0} \in V_2$, έπεται ότι $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in V_1 + V_2$, οπότε $V_1 + V_2 \neq \emptyset$. Επιπλέον, αν $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 + V_2$, τότε $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ και $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, όπου $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in V_1$ και $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in V_2$. Επειδή οι V_1, V_2 είναι υπόχωροι, έπεται ότι

$$\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{y}_1 \in V_1 \qquad \text{και} \qquad \lambda \mathbf{x}_2 + \mu \mathbf{y}_2 \in V_2.$$

Τότε όμως, επειδή

$$\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mu(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{y}_1) + (\lambda \mathbf{x}_2 + \mu \mathbf{y}_2) \in V_1 + V_2$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 7.1, έπεται ότι $V_1 + V_2$ είναι υπόχωρος.

Σημειώνουμε ότι $V_1 \cup V_2 \subseteq V_1 + V_2$. Πράγματι, επειδή για κάθε $\mathbf{x} \in V_1$ ισχύει ότι $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} \in V_1 + V_2$, έπεται ότι $V_1 \subseteq V_1 + V_2$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $V_2 \subseteq V_1 + V_2$, οπότε τελικά $V_1 \cup V_2 \subseteq V_1 + V_2$.

7.7 Γραμμικός συνδυασμός

Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V.$$

Τότε, κάθε στοιχείο $\mathbf{x} \in V$ που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.
Οι τελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ονομάζονται **συντελεστές** του γραμμικού συνδυασμού. Προφανώς, κάθε γραμμικός συνδυασμός είναι στοιχείο του V.
Παράδειγμα: Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Να εξετασθεί αν το διάνυσμα $\mathbf{x} = (10, -5, 5) \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\mathbf{x}_1 = (3, -1, 2), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0, 4), \quad \mathbf{x}_3 = (-1, 1, 1).$$

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, με $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$. Είναι

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 &\Leftrightarrow (10, -5, 5) = \lambda_1(3, -1, 2) + \lambda_2(1, 0, 4) + \lambda_3(-1, 1, 1) \\
&\Leftrightarrow (10, -5, 5) = (3\lambda_1, -\lambda_1, 2\lambda_1) + (\lambda_2, 0, 4\lambda_2) + (-\lambda_3, \lambda_3, \lambda_3) \\
&\Leftrightarrow (10, -5, 5) = (3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 10 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = -5 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, προκύπτει ότι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = -3$, οπότε

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_3$$

και επομένως το $\mathbf{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

7.8 Γραμμική θήκη συνόλου

Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και έστω $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ ονομάζεται **γραμμική θήκη** (ή απλά **θήκη**) του S και συμβολίζεται με $< S >$ ή $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n >$, δηλαδή

$$< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n >= \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n : \lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F\}.$$

Αν $U =< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n >$, τότε λέγεται ότι το σύνολο U **παράγεται** ή **γεννάται** από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ (ή από το σύνολο S). Μια άλλη ισοδύναμη έκφραση είναι ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ (ή το σύνολο S) **παράγουν** ή **γεννούν** το σύνολο U.

Το σύνολο $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n >$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$, αφού για $\lambda, \mu \in F$ και

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n,$$
$$\mathbf{y} = \mu_1\mathbf{x}_1 + \mu_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_n\mathbf{x}_n,$$

το στοιχείο

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = (\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)\mathbf{x}_1 + (\lambda\lambda_2 + \mu\mu_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (\lambda\lambda_n + \mu\mu_n)\mathbf{x}_n$$

ανήκει στο $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n >$.

Επιπλέον $\mathbf{x}_i \in< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n >$, για κάθε $i \in [n]$, αφού

$$\mathbf{x}_i = 0\mathbf{x}_1 + \cdots + 0\mathbf{x}_{i-1} + 1\mathbf{x}_i + 0\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n.$$

Τέλος, αν W υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$, με $\mathbf{x}_i \in W$, για κάθε $i \in [n]$, τότε $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n >\subseteq W$, αφού κάθε γραμμικός συνδυασμός από στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου (του W) είναι στοιχείο του.

Από τα προηγούμενα προκύπτει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7.2. *Η γραμμική θήκη $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n >$ είναι ο μικρότερος διανυσματικός χώρος που περιέχει τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$.*

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι αν τα διανύσματα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, τότε ισχύει ότι

$$< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n >=< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n > .$$

Παράδειγμα: Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ αν

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0), \qquad i \in [n],$$

τότε κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, αφού, αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, τότε

$$\mathbf{x} = x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, \dots, 0, 1) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Άρα, ισχύει ότι $\mathbb{R}^n =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n >$. Εξάλλου, από την προηγούμενη παρατήρηση, προκύπτει ότι

$$\mathbb{R}^n =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n >=< \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n >=< \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n >,$$

δηλαδή για έναν διανυσματικό χώρο μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα σύνολα, με το ίδιο πλήθος στοιχείων, που τον παράγουν.

7.9 Γραμμική ανεξαρτησία

Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$. Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** όταν υπάρχουν

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F,$$

όχι όλα ίσα με το μηδενικό στοιχείο του F, τέτοια ώστε

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα**.

Ισοδύναμα, τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$, ισχύει

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Ένα σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ονομάζεται **ελεύθερο**.

Παραδείγματα

1. Τα διανύσματα
$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0), \qquad i \in [n],$$
του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, είναι
$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + \lambda_n(0, \ldots, 0, 1) = (0, 0, \ldots, 0) \\ &\Leftrightarrow (\lambda_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, \lambda_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0) \\ &\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0) \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

2. Τα διανύσματα
$$\mathbf{x}_1 = (2, -1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (-5, 2, 2), \quad \mathbf{x}_3 = (-1, 0, 2)$$
του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αφού ισχύει ότι
$$-2\mathbf{x}_1 - 1\mathbf{x}_2 + 1\mathbf{x}_3 = 0$$

3. Τα διανύσματα
$$\mathbf{x}_1 = (2, -1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 3, 1), \quad \mathbf{x}_3 = (-1, 0, 2)$$
του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι
$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(2, -1, 0) + \lambda_2(1, 3, 1) + \lambda_3(-1, 0, 2) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (2\lambda_1, -\lambda_1, 0) + (\lambda_2, 3\lambda_2, \lambda_2) + (-\lambda_3, 0, 2\lambda_3) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

4. Τα διανύσματα
$$\mathbf{x}_1 = (2, 4, -1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 1, 1) \quad \mathbf{x}_3 = (6, 12, -3)$$
του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αφού ισχύει ότι
$$-3\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + 1\mathbf{x}_3 = 0$$

Παρατηρήσεις:

1. Στον ορισμό της γραμμικής εξάρτησης, το σώμα παίζει σημαντικό ρόλο. Για παράδειγμα, αν $V = \mathbb{C}$, με τις συνήθεις πράξεις των μιγαδικών αριθμών και $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = i$, τότε αν $F = \mathbb{R}$, τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ είναι

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 i = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

ενώ αν $F = \mathbb{C}$, τότε για $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = i \in \mathbb{C}^*$, ισχύει

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

2. Αν κάποιο από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι ίσο με $\mathbf{0}$, τότε αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα, διότι αν για παράδειγμα $\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$, τότε είναι

$$0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \cdots + 1\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

και επειδή υπάρχει μη μηδενικός συντελεστής (στην περίπτωση αυτή, το 1) κάποιου από τα $\mathbf{x}_i$ (στην περίπτωση αυτή, του $\mathbf{x}_n$), προκύπτει ότι τα
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

3. Αν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε οποιαδήποτε m (με $m \leqslant n$) από αυτά θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in F$ είναι

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m + 0\mathbf{x}_{m+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n = \mathbf{0}\\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0.\end{aligned}$$

4. Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα τουλάχιστον από αυτά ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα υπόλοιπα. Πράγματι, αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, θα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$, όχι όλοι 0, ώστε

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Αν για παράδειγμα $\lambda_i \neq 0$, όπου $i \in [n]$, τότε ισχύουν οι ισοδύναμες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\lambda_i\mathbf{x}_i &= -\lambda_1\mathbf{x}_1 - \lambda_2\mathbf{x}_2 - \cdots - \lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} - \lambda_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} - \cdots - \lambda_n\mathbf{x}_n\mathbf{x}_i\\ &= (-\lambda_i^{-1}\lambda_1)\mathbf{x}_1 + (-\lambda_i^{-1}\lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots (-\lambda_i^{-1}\lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1} + (-\lambda_i^{-1}\lambda_{i+1})\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + (-\lambda_i^{-1}\lambda_n)\mathbf{x}_n\end{aligned}$$

Οπότε $\mathbf{x}_i \in <\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n>$.

Αντίστροφα, αν

$$\mathbf{x}_i \in <\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n>,$$

για κάποιο $i \in [n]$, τότε υπάρχουν

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n \in F,$$

με

$$\mathbf{x}_i = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n,$$

οπότε

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + (-1)\mathbf{x}_i + \lambda_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Από την προηγούμενη ισότητα, αφού οι συντελεστές των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ δεν είναι όλοι ίσοι με $\mathbf{0}$, προκύπτει ότι τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

7.10 Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$. Ένα υποσύνολο

$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\},$$

του V ονομάζεται **βάση** του V αν και μόνο αν

1. το S παράγει τον V, δηλαδή
$$V =< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n >$$
και

2. τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παραδείγματα

1. Το σύνολο $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ με
$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0), \qquad i \in [n],$$
είναι μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Η βάση αυτή ονομάζεται **κανονική βάση** του $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

2. Το σύνολο $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ είναι μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(P_n, +, \cdot)$ όλων των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του n με πραγματικούς συντελεστές.

3. Το σύνολο
$$S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$
είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$, όλων των 2×2 μητρών με πραγματικά στοιχεία.

Δεχόμαστε ότι ο μηδενικός χώρος, δηλαδή ο χώρος με φορέα το $V = \{\mathbf{0}\}$ έχει ως βάση το κενό σύνολο.

Παρατηρήσεις:

1. Ένας διανυσματικός χώρος που έχει μια βάση S, θα έχει και άλλες βάσεις. Για παράδειγμα, αν $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ και $\lambda \in F \backslash \{0, 1\}$, τότε το σύνολο $S_1 = \{\lambda\mathbf{x}_1, \lambda\mathbf{x}_2, \ldots, \lambda\mathbf{x}_n\}$ θα είναι μια άλλη βάση του διανυσματικού χώρου.

2. Αν $(V, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ μια βάση του V, τότε κάθε διάνυσμα $x \in V$ γράφεται **κατά μοναδικό τρόπο** ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_n$, αφού αν
$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mu_1\mathbf{x}_1 + \mu_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_n\mathbf{x}_n,$$
τότε
$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{x}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{x}_n = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_i - \mu_i = 0, \qquad \text{για κάθε } i \in [n] \\ &\Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i, \qquad \text{για κάθε } i \in [n].\end{aligned}$$
Κατόπιν τούτων, αν $\mathbf{x} \in V$ με $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n$, οι τελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ ονομάζονται συντελεστές του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση S.

Πρόταση 7.3. *Έστω $(V, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$. Αν για τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in V$ ισχύει ότι*

$$V = < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m >,$$

τότε υπάρχει μια βάση του χώρου αυτού, η οποία αποτελείται από κάποια από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Ένας διανυσματικός χώρος $(V, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ ονομάζεται **πεπερασμένης διάστασης**, όταν παράγεται από πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων.

Προφανώς, από την προηγούμενη πρόταση, προκύπτει ότι κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης έχει μια τουλάχιστον βάση.

Επιπλέον, ισχύουν οι επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 7.4. *Αν $(V, +, \cdot)$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε υπάρχει βάση του V που περιέχει τα διανύσματα αυτά.*

Πρόταση 7.5. *Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, ο οποίος έχει μια βάση με n στοιχεία. Αν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε $m \leqslant n$.*

Από την προηγούμενη πρόταση, προκύπτει ότι δύο βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Πράγματι, αν $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ και $S_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ δύο βάσεις του διανυσματικού χώρου, τότε θεωρώντας το S ως βάση (με n στοιχεία) και επειδή τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ως στοιχεία της βάσης S_1), προκύπτει ότι $m \leqslant n$. Από την άλλη, θεωρώντας το S_1 ως βάση (με m στοιχεία) και επειδή τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (ως στοιχεία της βάσης S), προκύπτει ότι $n \leqslant m$. Οπότε τελικά $m = n$.

Το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης ενός πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου $(V, +, \cdot)$ ονομάζεται **διάσταση** του διανυσματικού χώρου και συμβολίζεται με $\dim V$. Προφανώς είναι $\dim V = 0$ αν και μόνο αν $V = \{\mathbf{0}\}$ (μηδενικός διανυσματικός χώρος).

Από τις προηγούμενες Προτάσεις, προκύπτουν οι επόμενες παρατηρήσεις:

Παρατηρήσεις:

1. Για έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο $(V, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

   i) $\dim V = n$.

   ii) Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του V είναι n.

   iii) Το ελάχιστο πλήθος διανυσμάτων που παράγουν το V είναι n.

2. Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, με $\dim V = n$. Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, τότε το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια βάση του $(V, +, \cdot)$.

3. Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας μη μηδενικός διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, με $\dim V = n$. Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ παράγουν τον $(V, +, \cdot)$, τότε το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια βάση του $(V, +, \cdot)$.

Παραδείγματα

1. Για τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ισχύει ότι $\dim \mathbb{R}^n = n$, αφού η κανονική του βάση έχει n στοιχεία.

2. Για τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(P_n, +, \cdot)$, όλων των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n, ισχύει ότι $\dim P_n = n + 1$, αφού το σύνολο
$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$
είναι μια βάση του.

3. Για τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ισχύει ότι $\dim \mathbb{C} = 2$, αφού το σύνολο $\{1, i\}$ είναι μια βάση του.

4. Για τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$, όλων των 2×2 μητρών, ισχύει ότι $\dim \mathcal{M}_2 = 4$, αφού το σύνολο
$$S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$
είναι μια βάση του.

5. Για τον διανυσματικό χώρο γινόμενο $(V \times W, +, \cdot)$ δύο πεπερασμένης διάστασης διανυσματικών χώρων $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, ισχύει ο τύπος
$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$
Πράγματι, αν
$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \text{ και } \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$$
είναι βάσεις των χώρων $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ αντίστοιχα, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο
$$S = \{(\mathbf{x}_1, 0), (\mathbf{x}_2, 0), \ldots, (\mathbf{x}_n, 0), (0, \mathbf{y}_1), (0, \mathbf{y}_2), \ldots, (0, \mathbf{y}_m)\}$$
είναι βάση του $(V \times W, +, \cdot)$, οπότε
$$\dim(V \times W) = |S| = n + m = \dim V + \dim W.$$
Γενικότερα, αποδεικνύεται επαγωγικά ο τύπος
$$\dim(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n) = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_n.$$

Εφαρμογές:

Εφαρμογή 7.1. *Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα*

$$\mathbf{x} = (2, 1, -3), \quad \mathbf{y} = (3, 2, -3), \quad \mathbf{z} = (1, -1, 1)$$

αποτελούν βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Λύση. Επειδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, αρκεί να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{z} = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1(2, 1, -3) + \lambda_2(3, 2, -3) + \lambda_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0) \\
&\Rightarrow (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν βάση του χώρου. □

Εφαρμογή 7.2. *Να βρεθεί μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *που περιέχει τα διανύσματα*

$$\mathbf{x} = (-1, 1, 0, 0), \qquad \mathbf{y} = (0, 0, 2, 1).$$

Λύση. Επειδή $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, αρκεί να βρεθούν δύο διανύσματα $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$, τέτοια ώστε το σύνολο $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}\}$ να είναι βάση του χώρου. Τα διανύσματα $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ θα αναζητηθούν μεταξύ των στοιχείων της κανονικής βάσης.

Αρχικά, ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1$. Είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1(-1, 1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 2, 1) + \lambda_3(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \\
&\Rightarrow (-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1, 2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Στη συνέχεια, ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{e}_1 + \lambda_4\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1(-1, 1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 2, 1) + \lambda_3(1, 0, 0, 0) + \lambda_4(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \\
&\Rightarrow (-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_4, 2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_1, \lambda_4 = -\lambda_1, \lambda_2 = 0.
\end{aligned}$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει άπειρες μη μηδενικές λύσεις, προκύπτει ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Κατόπιν τούτου, ελέγχεται η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$. Είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} + \lambda_3\mathbf{e}_1 + \lambda_4\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(0,0,2,1) + \lambda_3(1,0,0,0) + \lambda_4(0,0,1,0) = (0,0,0,0) \\ &\Rightarrow (-\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1, 2\lambda_2 + \lambda_4, \lambda_2) = (0,0,0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του χώρου. □

Στην επόμενη πρόταση, δίδονται οι κυριότερες ιδιότητες της διάστασης των διανυσματικών υποχώρων.

Πρόταση 7.6. *Αν $(V, +, \cdot)$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης μη μηδενικός διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και V_1, V_2 δύο υπόχωροί του, τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \dim V_1 \leqslant \dim V_2$.

Επιπλέον, αν $V_1 \subseteq V_2$, τότε $\dim V_1 = \dim V_2$ αν και μόνο αν $V_1 = V_2$.

(ii) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

Εφαρμογή 7.3. *Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι V_1, V_2 του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, με*

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \\ V_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}. \end{aligned}$$

Να βρεθούν οι διαστάσεις των υποχώρων

$$V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$$

και να αποδειχθεί ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$.

Λύση. Αν $\mathbf{v} = (x,y,z) \in V_1$, τότε είναι

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z,$$

οπότε

$$\mathbf{v} = (-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1).$$

Άρα, $V_1 =< (-1,1,0), (-1,0,1) >$.

Επιπλέον, τα $(-1,1,0), (-1,0,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι

$$\lambda(-1,1,0) + \mu(-1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (-\lambda - \mu, \lambda, \mu) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Άρα το σύνολο $\{(-1,1,0), (-1,0,-1)\}$ αποτελεί μια βάση του V_1 και συνεπώς $\dim V_1 = 2$.

Για τον υπόχωρο V_2 έχουμε

$$\mathbf{v} = (x, y, z) \in V_2 \Leftrightarrow \mathbf{v} = (x, x, z) \Leftrightarrow \mathbf{v} = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Άρα, $V_2 =< (1, 1, 0), (0, 0, 1) >$.

Επιπλέον, τα $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι

$$\lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda, \lambda, \mu) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Άρα το σύνολο $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ αποτελεί μια βάση του V_2 και συνεπώς $\dim V_2 = 2$.

Για τον υπόχωρο $V_1 \cap V_2$, αν $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ισχύει ότι

$$\mathbf{v} \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) \in V_1 \\ (x, y, z) \in V_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{v} = (y, y, -2y) \Leftrightarrow \mathbf{v} = y(1, 1, -2)$$

Άρα, $V_1 \cap V_2 =< (1, 1, -2) >$ και επομένως το σύνολο $\{(1, 1, -2)\}$ αποτελεί μια βάση του $V_1 \cap V_2$. Άρα, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

Επιπλέον, από την Πρόταση 7.6.*ii*), προκύπτει ότι

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Τέλος, επειδή ο $V_1 + V_2$ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim \mathbb{R}^3 = 3,$$

από την Πρόταση 7.6.*i*), προκύπτει ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. □

7.11 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 7.1. *Στο σύνολο $V = F^2$, όπου $(F, +, \cdot)$ είναι ένα σώμα, ορίζονται τρεις πράξεις: Οι εσωτερικές $\boxplus$ και $\oplus$, με*

$$(x_1, x_2) \boxplus (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

και

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

καθώς και η εξωτερική πράξη $\cdot$, με

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2),$$

όπου $\lambda \in F$. Να εξεταστεί ποιες από τις δομές $(V, \boxplus, \cdot)$, $(V, \oplus, \cdot)$ είναι διανυσματικοί χώροι επί του σώματος $(F, +, \cdot)$.

Λύση. Για τη δομή $(V, \boxplus, \cdot)$ έχουμε ότι

$$(x_1, x_2) \boxplus (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2) = (y_1 x_1, y_2 x_2) = (y_1, y_2) \boxplus (x_1, x_2),$$

για κάθε $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$, άρα η πράξη $\boxplus$ είναι αντιμεταθετική.

Επίσης, για κάθε $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in V$, είναι

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \boxplus ((y_1, y_2) \boxplus (z_1, z_2)) &= (x_1, x_2) \boxplus (y_1 z_1, y_2 z_2) = (x_1(y_1 z_1), x_2(y_2 z_2)) \\ &= ((x_1 y_1) z_1, (x_2 y_2) z_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2) \boxplus (z_1, z_2) = ((x_1, x_2) \boxplus (y_1, y_2)) \boxplus (z_1, z_2),\end{aligned}$$

άρα η πράξη $\boxplus$ είναι προσεταιριστική.

Το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $\boxplus$ είναι το $(1, 1)$ (όπου 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του σώματος), διότι για κάθε $(x_1, x_2) \in V$, είναι

$$(x_1, x_2) \boxplus (1, 1) = (1, 1) \boxplus (x_1, x_2) = (1x_1, 1x_2) = (x_1, x_2).$$

Κατόπιν τούτων, το στοιχείο $(0, 0) \in V$ (όπου 0 είναι το μηδενικό στοιχείο του σώματος) δεν έχει συμμετρικό, αφού για κάθε $(x_1, x_2) \in V$ είναι

$$(0, 0) \boxplus (x_1, x_2) = (0x_1, 0x_2) = (0, 0) \neq (1, 1),$$

επομένως η δομή $(V, \boxplus)$ δεν είναι ομάδα και συνεπώς η δομή $(V, \boxplus, \cdot)$ δεν είναι διανυσματικός χώρος.

Για τη δομή $(V, \oplus, \cdot)$, θα αποδειχθεί ότι δεν ισχύει πάντα η ιδιότητα

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \oplus \mu\mathbf{x}, \qquad \lambda, \mu \in F, \mathbf{x} \in V,$$

του ορισμού του διανυσματικού χώρου. Πραγματικά, για $\lambda, \mu \in F$, και $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in V$, είναι

$$(\lambda + \mu)(x_1, x_2) = ((\lambda + \mu)x_1, x_2) = (\lambda x_1 + \mu x_1, x_2)$$

και

$$\lambda(x_1, x_2) \oplus \mu(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2) \oplus (\mu x_1, x_2) = (\lambda x_1 + \mu x_1, x_2 + x_2),$$

οπότε

$$(\lambda + \mu)(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2) \oplus \mu(x_1, x_2) \Leftrightarrow x_2 = x_2 + x_2 \Leftrightarrow x_2 = 0,$$

δηλαδή η ιδιότητα δεν ισχύει για κάθε $\mathbf{x} \in V$, οπότε η δομή $(V, \oplus, \cdot)$ δεν είναι διανυσματικός χώρος. □

Άσκηση 7.2. *Να αποδειχθεί ότι η αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης + ενός διανυσματικού χώρου $(V, +, \cdot)$ μπορεί να προκύψει από τις υπόλοιπες συνθήκες του ορισμού του διανυσματικού χώρου.*

Λύση. Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες 2i) και 2ii) του ορισμού του διανυσματικού χώρου, είναι

$$(1+1)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (1+1)\mathbf{x} + (1+1)\mathbf{y} = \mathbf{x}+\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{y}$$

και

$$(1+1)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 1(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + 1(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{x}+\mathbf{y}.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{x}+\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{y}.$$

Επειδή η δομή $(V, +)$ είναι ομάδα, ισχύει ο νόμος της διαγραφής, οπότε εφαρμόζοντάς τον δύο φορές, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $\mathbf{y}+\mathbf{x} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$, και επομένως η πράξη + είναι αντιμεταθετική. □

Άσκηση 7.3. *Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των διανυσματικών χώρων:*

(i) $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, *(iii)* $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$ *ή* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
(ii) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *(iv)* $\lambda(-\mathbf{x}) = -(\lambda\mathbf{x})$,

για κάθε $\lambda \in F$, $\mathbf{x} \in V$, *όπου* $(V, +, \cdot)$ *διανυσματικός χώρος επί του σώματος* $(F, +, \cdot)$.

Λύση. (i) Για $\lambda \in F$, $\mathbf{x} \in V$, είναι

$$\lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{x},$$

οπότε, από τον νόμο διαγραφής της ομάδας $(V, +)$, προκύπτει ότι $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(ii) Για $\lambda \in F$, $\mathbf{x} \in V$, είναι

$$\lambda\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (\lambda+0)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

οπότε, από τον νόμο διαγραφής της ομάδας $(V, +)$, προκύπτει ότι $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(iii) Αν $\lambda \neq 0$, θα δειχθεί ότι $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Πράγματι, τότε θα υπάρχει το αντίστροφο $\lambda^{-1} \in F$ και

$$\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{x} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(iv) Επειδή $\lambda(-\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{x} = \lambda(-\mathbf{x}+\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, έπεται ότι το $\lambda(-\mathbf{x})$ είναι το αντίθετο του $\lambda\mathbf{x}$, δηλαδή $\lambda(-\mathbf{x}) = -(\lambda\mathbf{x})$. □

Άσκηση 7.4 (βλ. Πρόταση 7.1). *Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και W ένα μη κενό υποσύνολο του V. Να αποδειχθεί ότι το W είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ αν και μόνο αν*

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in W, \text{ για κάθε } \lambda, \mu \in F \text{ και } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W. \tag{7.1}$$

Λύση. Αρχικά, υποτίθεται ότι το W είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ και θα δειχθεί ότι ισχύει η συνθήκη 7.1. Αν $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, τότε, επειδή το W είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$, έπεται ότι $\lambda\mathbf{x}, \mu\mathbf{y} \in W$, οπότε, επειδή το W είναι κλειστό ως προς την πράξη +, έπεται ότι $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in W$.

Αντίστροφα, υποτίθεται ότι ισχύει η συνθήκη (7.1) και θα δειχθεί ότι το W είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$. Αρκεί να δειχθεί ότι το σύνολο W είναι μη κενό, κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$ και ότι η δομή $(W, +)$ είναι υποομάδα της $(V, +)$. (Η συνθήκη 2 του ορισμού του διανυσματικού χώρου, προφανώς ισχύει και για τα στοιχεία του W, αφού $W \subseteq V$.)

Έτσι, αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, τότε, εφαρμόζοντας τη συνθήκη (7.1) για $\lambda = \mu = 0$, έπεται ότι

$$0\mathbf{x} + 0\mathbf{y} \in W \Rightarrow \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W \Rightarrow \mathbf{0} \in W,$$

άρα το W είναι μη κενό και μάλιστα περιέχει το μηδενικό στοιχείο της ομάδας $(V, +)$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας τη συνθήκη (7.1) για $\mu = \mathbf{0}$, έπεται ότι

$$\lambda\mathbf{x} + 0\mathbf{y} \in W \Rightarrow \lambda\mathbf{x} + \mathbf{0} \in W \Rightarrow \lambda\mathbf{x} \in W,$$

άρα το W είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$.

Τέλος, για να είναι η δομή $(W, +)$ υποομάδα της $(V, +)$, αρκεί να ισχύει

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in W,$$

το οποίο όμως προκύπτει άμεσα, εφαρμόζοντας τη συνθήκη (7.1) για $\lambda = 1$ και $\mu = -1$.

Επομένως, η δομή $(W, +)$ είναι αβελιανή ομάδα και άρα η δομή $(W, +, \cdot)$ είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$. □

Άσκηση 7.5. *Να εξεταστεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*:*

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1\}$$
$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Λύση. Το μηδενικό στοιχείο $(0, 0, 0)$ του $\mathbb{R}^3$ ανήκει στα W_1, W_2, αφού

$$0^2 + 0^2 + 0^2 \leqslant 1 \quad \text{και} \quad 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0,$$

άρα τα σύνολα W_1, W_2 είναι μη κενά.

Παρατηρούμε ότι $(0, 0, 1) \in W_1$, αφού $0^2 + 0^2 + 1^2 \leqslant 1$, ενώ $2(0, 0, 1) = (0, 0, 2) \notin W_1$, διότι $0^2 + 0^2 + 2^2 = 4 > 1$. Άρα, το σύνολο W_1 δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$ και επομένως δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^3$ και $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in W_2$. Τότε, είναι

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{και} \quad 4y_1 - 2y_2 + y_3 = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο αυτές ισότητες με λ και μ αντίστοιχα, και προσθέτοντας τις ισότητες που προκύπτουν, έπεται ότι

$$\lambda(4x_1 - 2x_2 + x_3) + \mu(4y_1 - 2y_2 + y_3) = 0,$$

οπότε

$$4(\lambda x_1 + \mu y_1) - 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3) = 0,$$

και επομένως

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \in W_2.$$

Άρα, βάσει της Πρότασης 7.1, το W_2 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. □

Άσκηση 7.6. *Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$, όπου $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ και οι πράξεις $+, \cdot$ ορίζονται ως εξής:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \textit{και} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

για κάθε $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Να εξεταστεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \textit{ παραγωγίσιμη}, \} \\ W_2 &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \textit{ περιττή}\}, \\ W_3 &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(1) + 2f(2) + \cdots + 9f(9) = 10\}. \end{aligned}$$

Λύση. Επειδή, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ισχύει

$$f, g \text{ παραγωγίσιμες (αντ. περιττές)} \Rightarrow \lambda f + \mu g \text{ παραγωγίσιμη (αντ. περιττή)},$$

έπεται ότι τα σύνολα W_1, W_2 είναι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$.

Αντίθετα, το W_3 δεν είναι υπόχωρος, διότι η μηδενική συνάρτηση δεν ανήκει σε αυτό. □

Άσκηση 7.7. *Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, και τα διανύσματά του*

$$\mathbf{x}_1 = (1, 2, -1, 0), \mathbf{x}_2 = (1, 0, -1, 3), \mathbf{x}_3 = (0, -1, 1, 1)$$

και $\mathbf{x} = (-1, 0, 5, a)$. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$, ώστε το $\mathbf{x}$ να είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 &\Leftrightarrow (-1, 0, 5, a) = \lambda_1(1, 2, -1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1, 3) + \lambda_3(0, -1, 1, 1) \\ &\Leftrightarrow (-1, 0, 5, a) = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_2 + \lambda_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = a \end{cases} \end{aligned}$$

Επιλύοντας το σύστημα των τριών πρώτων από τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει ότι

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 4.$$

Οπότε είναι $a = 3\lambda_2 + \lambda_3 = -5$. □

Άσκηση 7.8. *Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, να εξεταστεί αν τα διανύσματα του $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, όταν:*

(i) $\mathbf{x}_1 = (0, 1, -3), \quad \mathbf{x}_2 = (-2, 1, 2), \quad \mathbf{x}_3 = (4, 1, 0)$.

(ii) $\mathbf{x}_1 = (2, 1, -1), \quad \mathbf{x}_2 = (-1, 2, 3), \quad \mathbf{x}_3 = (4, 7, 3)$.

Λύση. (i) Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(0,1,-3) + \lambda_2(-2,1,2) + \lambda_3(4,1,0) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (0,\lambda_1,-3\lambda_1) + (-2\lambda_2,\lambda_2,2\lambda_2) + (4\lambda_3,\lambda_3,0) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (-2\lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, -3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(ii) Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(2,1,-1) + \lambda_2(-1,2,3) + \lambda_3(4,7,3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (2\lambda_1,\lambda_1,-\lambda_1) + (-\lambda_2,2\lambda_2,3\lambda_2) + (4\lambda_3,7\lambda_3,3\lambda_3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3, -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Αν τεθεί, $\lambda_3 = 1$, τότε $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, οπότε ισχύει ότι

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}.$$

Επειδή οι συντελεστές των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ δεν είναι όλοι 0, προκύπτει ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. □

Άσκηση 7.9. *Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$, όλων των 2×2 μητρών, να εξεταστεί αν οι μήτρες A, B, Γ, Δ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, όταν:*

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$

Λύση.

(i) Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 \Gamma + \lambda_4 \Delta = \mathbb{O} &\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 & 4\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 0 \\ 2\lambda_2 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda_4 \\ \lambda_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 & 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, οι A, B, Γ, Δ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

(ii) Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 \Gamma + \lambda_4 \Delta = \mathbb{O} &\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \mathbb{O} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & -2\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\lambda_3 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7\lambda_4 & 2\lambda_4 \\ 4\lambda_4 & 3\lambda_4 \end{bmatrix} = \mathbb{O} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 - 7\lambda_4 & \lambda_2 + 2\lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_4 & -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 - 7\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_4 \\ \lambda_1 = -\lambda_4 \\ \lambda_3 = -3\lambda_4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Αν τεθεί $\lambda_4 = 1$, προκύπτει ότι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ και ισχύει ότι

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 \Gamma + \lambda_4 \Delta = \mathbb{O}.$$

Άρα, οι A, B, Γ, Δ είναι γραμμικώς εξαρτημένες. □

Άσκηση 7.10. *Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα*

$$\mathbf{x} = (1, -2, 0), \quad \mathbf{y} = (0, 1, 2), \quad \mathbf{z} = (-1, -1, 3).$$

αποτελούν βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, *και να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος* $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ *ως προς τη βάση αυτή.*

Λύση. Επειδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, αρκεί να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Είναι

$$\begin{aligned}
\kappa \mathbf{x} + \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{z} = \mathbf{0} &\Rightarrow \kappa(1, -2, 0) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(-1, -1, 3) = (0, 0, 0) \\
&\Rightarrow (\kappa - \mu, -2\kappa + \lambda - \mu, 2\lambda + 3\mu) = (0, 0, 0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \kappa - \mu = 0 \\ -2\kappa + \lambda - \mu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \kappa = \lambda = \mu = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Αν $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ ως προς τη βάση $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, τότε είναι

$$\begin{aligned}
\kappa \mathbf{x} + \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{z} = \mathbf{v} &\Rightarrow \kappa(1, -2, 0) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(-1, -1, 3) = (3, -1, 4) \\
&\Rightarrow (\kappa - \mu, -2\kappa + \lambda - \mu, 2\lambda + 3\mu) = (3, -1, 4) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \kappa - \mu = 3 \\ -2\kappa + \lambda - \mu = -1 \\ 2\lambda + 3\mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{7}{3} \\ \lambda = 3 \\ \mu = -\frac{2}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 7.11. *Να βρεθεί μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(P_3, +, \cdot)$, των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό μικρότερο ή ίσο του 3, που να περιέχει τα πολυώνυμα*

$$p_1(x) = 2x^2 + 5x + 6, \qquad p_2(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 4.$$

Λύση. Τα p_1, p_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού

$$\begin{aligned} \kappa p_1(x) + \lambda p_2(x) = 0 &\Rightarrow \kappa(2x^2 + 5x + 6) + \lambda(x^3 - 4x^2 + 3x + 4) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda x^3 + (2\kappa - 4\lambda)x^2 + (5\kappa + 3\lambda)x + 6\kappa + 4\lambda = 0 \\ &\Rightarrow \kappa = \lambda = 0. \end{aligned}$$

Επιπλέον, είναι $\dim P_3 = 4$, οπότε αρκεί να βρεθούν 2 πολυώνυμα p_3, p_4 του P_3, τέτοια ώστε τα p_1, p_2, p_3, p_4 να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Τα πολυώνυμα p_3, p_4 θα αναζητηθούν μεταξύ των στοιχείων της βάσης $S = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Αν τεθούν $p_3(x) = 1$ και $p_4(x) = x$, τότε, για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) = 0 &\Rightarrow \lambda_1(2x^2 + 5x + 6) + \lambda_2(x^3 - 4x^2 + 3x + 4) + \lambda_3 + \lambda_4 x = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_2 x^3 + (2\lambda_1 - 4\lambda_2)x^2 + (5\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4)x + 6\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, τα πολυώνυμα p_1, p_2, p_3, p_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως το σύνολο $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ είναι μια βάση του $(P_3, +, \cdot)$. □

Άσκηση 7.12. *Θεωρούμε την ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των παραγοντικών πολυωνύμων, τα οποία ορίζονται ως εξής: $F_0(x) = 1$ και*

$$F_n(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1), n \in \mathbb{N}^*.$$

Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $B_n = \{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$ αποτελεί μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(P_n, +, \cdot)$, των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό μικρότερο ή ίσο του n.

Λύση. Επειδή $\dim P_n = n + 1 = |B_n|$, αρκεί να δειχθεί ότι

$$P_n =< F_0, F_1, \ldots, F_n >,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή.

Για $n = 0$, ο ισχυρισμός ισχύει, αφού $P_0 =< 1 >=< F_0 >$.

Ας υποτεθεί ότι $P_k =< F_0, F_1, \ldots, F_k >$. Θα αποδειχθεί ότι

$$P_{k+1} =< F_0, F_1, \ldots, F_{k+1} > .$$

Επειδή $F_{k+1}(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)(x-k)$, εύκολα προκύπτει ότι υπάρχει πολυώνυμο $q(x) \in P_k$, τέτοιο ώστε $F_{k+1}(x) = x^{k+1} + q(x)$. Τότε όμως, κάθε πολυώνυμο $p(x) \in P_{k+1}$ γράφεται ως εξής:

$$p(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 = a_{k+1}(F_{k+1}(x) - q(x)) + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$$

Θέτοντας $s(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$, προκύπτει ότι

$$p(x) = a_{k+1}F_{k+1}(x) + s(x) - a_{k+1}q(x).$$

Όμως $s(x), q(x) \in P_k$, άρα και το πολυώνυμο $s(x) - a_{k+1}q(x)$ είναι στοιχείο του P_k, και σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, θα είναι γραμμικός συνδυασμός των $F_0, F_1, \ldots, F_k$, έστω

$$s(x) - a_{k+1}q(x) = b_k F_k(x) + \cdots + b_1 F_1(x) + b_0 F_0(x).$$

Επομένως, είναι

$$p(x) = a_{k+1}F_{k+1}(x) + b_k F_k(x) + \cdots + b_1 F_1(x) + b_0 F_0(x),$$

δηλαδή το $p(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $F_0, F_1, \ldots, F_{k+1}$, και επομένως

$$P_{k+1} =< F_0, F_1, \ldots, F_{k+1} > .$$ □

Άσκηση 7.13. *Έστω $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ και $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, με*

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos^3 x, \quad f_3(x) = \cos 3x.$$

Να βρεθεί η διάσταση του υποχώρου $< f_1, f_2, f_3 >$ που παράγεται από τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3.

Λύση. Χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό τύπο

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

προκύπτει ότι

$$< f_1, f_2, f_3 >=< f_1, f_2, -3f_1 + 4f_2 >=< f_1, f_2 > .$$

Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι οι f_1, f_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Πράγματι, αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos^3 x = 0,$$

τότε, επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{3}$, προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda_1 \cos 0 + \lambda_2 \cos^3 0 = 0 \\ \lambda_1 \cos \frac{\pi}{3} + \lambda_2 \cos^3 \frac{\pi}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

οπότε οι f_1, f_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, και επομένως

$$\dim < f_1, f_2, f_3 >= \dim < f_1, f_2 >= 2.$$ □

Άσκηση 7.14. *Έστω $(V, +, \cdot)$ ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των πραγματικών ακολουθιών με τις συνήθεις πράξεις των ακολουθιών. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο*

$$W = \{(a_n) \in V : a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$ και να βρεθεί μια βάση του.

Λύση. Προφανώς, $W \neq \varnothing$, αφού περιέχει την ακολουθία (a_n), με $a_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Επειδή, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $(a_n), (b_n) \in W$, για την ακολουθία $(c_n) = (\lambda a_n + \mu b_n)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \lambda a_{n+2} + \mu b_{n+2} \\ &= \lambda(a_{n+1} + 2a_n) + \mu(b_{n+1} + 2b_n) \\ &= \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1} + 2(\lambda a_n + \mu b_n) \\ &= c_{n+1} + 2c_n, \end{aligned}$$

προκύπτει ότι $(c_n) \in W$, και επομένως το W είναι υπόχωρος του $(V, +, \cdot)$.

Για να βρεθεί μια βάση του W, αναζητούνται $\lambda \in \mathbb{R}^*$, για τα οποία η ακολουθία (λ^n) ανήκει στο W. Είναι

$$\begin{aligned} (\lambda^n) \in W &\Leftrightarrow \lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + 2\lambda^n \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 = \lambda + 2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2. \end{aligned}$$

Άρα οι ακολουθίες $((-1)^n), (2^n)$ ανήκουν στο W.

Θα αποδειχθεί ότι $W =< ((-1)^n), (2^n) >$. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να δειχθεί ότι, για κάθε ακολουθία $(a_n) \in W$, υπάρχουν $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$a_n = \mu(-1)^n + \nu 2^n,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $n = 1$ και $n = 2$, προκύπτει ότι

$$\begin{cases} -\mu + 2\nu = a_1 \\ \mu + 4\nu = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{a_2 - 2a_1}{3} \\ \nu = \frac{a_1 + a_2}{6} \end{cases}$$

Άρα

$$a_n = \frac{a_2 - 2a_1}{3}(-1)^n + \frac{a_1 + a_2}{6}2^n, \tag{7.2}$$

για $n = 1$ και $n = 2$.

Θα αποδειχθεί επαγωγικά ότι η σχέση (7.2) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι, αν ισχύει για $n = k$ και $n = k + 1$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$, τότε θα ισχύει και για $n = k + 2$, αφού είναι

$$\begin{aligned} a_{k+2} = a_{k+1} + 2a_k &= \tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^{k+1} + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^{k+1} \\ &\quad + 2\left(\tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^k + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^k\right) \\ &= \tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^k(-1+2) + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^{k+1}(1+1) \\ &= \tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^k + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^{k+2} \\ &= \tfrac{a_2-2a_1}{3}(-1)^{k+2} + \tfrac{a_1+a_2}{6}2^{k+2}. \end{aligned}$$

Άρα, η σχέση (7.2) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, και επομένως οι ακολουθίες $((-1)^n), (2^n)$ παράγουν τον υπόχωρο W.

Επιπλέον, οι ακολουθίες $((-1)^n), (2^n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Πράγματι, αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lambda_1(-1)^n + \lambda_2 2^n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

τότε, εφαρμόζοντας την τελευταία ισότητα για $n = 1$ και $n = 2$, προκύπτει ότι

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Επομένως, οι ακολουθίες $((-1)^n), (2^n)$ αποτελούν μια βάση του W, οπότε $\dim W = 2$. □

Άσκηση 7.15. *Δίνονται οι υπόχωροι V_1, V_2 του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, με*

$$
\begin{aligned}
V_1 =&\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\},\\
V_2 =&\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}.
\end{aligned}
$$

Να βρεθούν οι διαστάσεις των υποχώρων

$$V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$$

και να αποδειχθεί ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$.

Λύση. Για τον υπόχωρο V_1 είναι

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_1 \Leftrightarrow& \mathbf{v} = (-x_2 + x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4)\\
\Leftrightarrow& \mathbf{v} = (-x_2, x_2, 0, 0) + (x_3, 0, x_3, 0) + (x_4, 0, 0, x_4)\\
\Leftrightarrow& \mathbf{v} = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(1, 0, 0, 1)\\
\Leftrightarrow& \mathbf{v} \in < (-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) > .
\end{aligned}
$$

Άρα, $V_1 =< (-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) >$.

Θα δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πράγματι, για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda_1(-1, 1, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 1, 0) + \lambda_3(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

οπότε τα διανύσματα $(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$ αποτελούν μια βάση του V_1, άρα $\dim V_1 = 3$.

Για τον υπόχωρο V_2 είναι

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_2 \Leftrightarrow& \mathbf{v} = (2x_2 - x_4, x_2, x_3, x_4)\\
\Leftrightarrow& \mathbf{v} = (2x_2, x_2, 0, 0) + (0, 0, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4)\\
\Leftrightarrow& \mathbf{v} = x_2(2, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1)\\
\Leftrightarrow& \mathbf{v} \in < (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) > .
\end{aligned}
$$

Άρα, $V_2 =< (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) >$.

Θα δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πράγματι, για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda_1(2, 1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 1, 0) + \lambda_3(-1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$(2\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

οπότε τα διανύσματα $(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)$ αποτελούν μια βάση του V_2, άρα $\dim V_2 = 3$.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε μια βάση για τον υπόχωρο $V_1 \cap V_2$. Αν $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_1 \cap V_2$, τότε είναι

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \in V_1 \cap V_2 &\Leftrightarrow \mathbf{v} \in V_1 \text{ και } \mathbf{v} \in V_2 \\
&\Leftrightarrow x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 \text{ και } x_1 = 2x_2 - x_4 \\
&\Leftrightarrow x_3 = 3x_2 - 2x_4 \text{ και } x_1 = 2x_2 - x_4 \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} = (2x_2 - x_4, x_2, 3x_2 - 2x_4, x_4) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} = x_2(2, 1, 3, 0) + x_4(-1, 0, -2, 1) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v} \in < (2, 1, 3, 0), (-1, 0, -2, 1) > .
\end{aligned}$$

Άρα, $V_1 \cap V_2 =< (2, 1, 3, 0), (-1, 0, -2, 1) >$.

Επιπλέον, τα διανύσματα $(2, 1, 3, 0), (-1, 0, -2, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού, για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(2, 1, 3, 0) + \lambda_2(-1, 0, -2, 0) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \\
&(2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, 3\lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,
\end{aligned}$$

οπότε τα διανύσματα $(2, 1, 3, 0), (-1, 0, -2, 1)$ αποτελούν μια βάση του $V_1 \cap V_2$, άρα $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$.

Επιπλέον, από την Πρόταση 7.6, προκύπτει ότι

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Τέλος, επειδή $V_1 + V_2$ είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ και $\dim(V_1 + V_2) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, από την Πρόταση 7.6, προκύπτει ότι $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$. □

Άσκηση 7.16. *Δίνονται οι υπόχωροι V_1, V_2 του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$, των 2×2 μητρών με πραγματικά στοιχεία, με*

$$V_1 =\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_2 =\left\{ \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ a+c & a-c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Να βρεθούν οι διαστάσεις των υποχώρων

$$V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$$

και να αποδειχθεί ότι $V_1 + V_2 = \mathcal{M}_2$.

Λύση. Για τον υπόχωρο V_1 είναι

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \in V_1 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \in < \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} >,$$

άρα

$$V_1 =< \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} > .$$

Επιπλέον, τα στοιχεία $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 2\lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \mu\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & 2\lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Επομένως τα στοιχεία $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ αποτελούν μια βάση του V_1, άρα $\dim V_1 = 2$.

Για τον υπόχωρο V_2 είναι

$$A = \begin{bmatrix}a+b & a-b\\ a+c & a-c\end{bmatrix} \in V_2 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix}a & a\\ a & a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b & -b\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ c & -c\end{bmatrix} \Leftrightarrow A = a\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A \in < \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} >,$$

άρα

$$V_2 = < \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} > .$$

Επιπλέον, τα στοιχεία $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού, για $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, είναι

$$\kappa \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\kappa+\lambda & \kappa-\lambda\\ \kappa+\mu & \kappa-\mu\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \kappa = \lambda = \mu = 0.$$

Επομένως τα στοιχεία $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ αποτελούν μια βάση του V_2, άρα $\dim V_2 = 3$.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε μια βάση του $V_1 \cap V_2$:

$$A \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow A \in V_1 \text{ και } A \in V_2 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ 0 & 2a_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_2+b_2 & a_2-b_2\\ a_2+c_2 & a_2-c_2\end{bmatrix}, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

Όμως,

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ 0 & 2a_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_2+b_2 & a_2-b_2\\ a_2+c_2 & a_2-c_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2+b_2 = a_1\\ a_2-b_2 = b_1\\ a_2+c_2 = 0\\ a_2-c_2 = 2a_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = b_1 = -c_2\\ b_2 = 0\end{cases}$$

οπότε, προκύπτει ότι $A \in V_1 \cap V_2$ αν και μόνο αν υπάρχει $a_1 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$A = \begin{bmatrix}a_1 & a_1\\ 0 & 2a_1\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

οπότε

$$V_1 \cap V_2 = < \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} >$$

και επομένως $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

Επιπλέον, από την Πρόταση 7.6, προκύπτει ότι

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Τέλος, επειδή ως γνωστόν είναι $\dim \mathcal{M}_2 = 4$ και επιπλέον ο $V_1 + V_2$ είναι υπόχωρος του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ ίσης διάστασης, από την Πρόταση 7.6, έπεται ότι
$V_1 + V_2 = \mathcal{M}_2$. □

Άσκηση 7.17. *Δίνονται οι υπόχωροι V_1, V_2 του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(P_3, +, \cdot)$, των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμού μικρότερου ή ίσου με 3, με*

$$V_1 = \{ax^3 + bx^2 + ax + b : a, b \in \mathbb{R}\},$$
$$V_2 = \{ax^3 + bx^2 + ax - b : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Να βρεθούν οι διαστάσεις των υποχώρων

$$V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$$

και να εξεταστεί αν ο $V_1 + V_2$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $(P_3, +, \cdot)$.

Λύση. Για τον υπόχωρο V_1, ισχύει ότι $p \in V_1$ αν και μόνο αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + ax + b = a(x^3 + x) + b(x^2 + 1),$$

δηλαδή

$$p \in V_1 \Leftrightarrow p \in < x^3 + x, x^2 + 1 >,$$

επομένως

$$V_1 = < x^3 + x, x^2 + 1 > .$$

Επιπλέον, τα πολυώνυμα $x^3 + x$, $x^2 + 1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda(x^3 + x) + \mu(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda x^3 + \mu x^2 + \lambda x + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Άρα, τα δύο αυτά πολυώνυμα αποτελούν μια βάση του V_1 και επομένως είναι $\dim V_1 = 2$.

Για τον υπόχωρο V_2, ισχύει ότι $p \in V_2$ αν και μόνο αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + ax - b = a(x^3 + x) + b(x^2 - 1),$$

δηλαδή

$$p \in V_2 \Leftrightarrow p \in < x^3 + x, x^2 - 1 >,$$

επομένως

$$V_2 = < x^3 + x, x^2 - 1 > .$$

Επιπλέον, τα πολυώνυμα $x^3 + x$, $x^2 - 1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda(x^3 + x) + \mu(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda x^3 + \mu x^2 + \lambda x - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Άρα, τα δύο αυτά πολυώνυμα αποτελούν μια βάση του V_2 και επομένως είναι $\dim V_2 = 2$.

Για τον υπόχωρο $V_1 \cap V_2$, ισχύει ότι $p \in V_1 \cap V_2$ αν και μόνο αν υπάρχουν $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$p(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + a_1x + b_1 = a_2x^3 + b_2x^2 + a_2x - b_2.$$

Επειδή

$$a_1x^3 + b_1x^2 + a_1x + b_1 = a_2x^3 + b_2x^2 + a_2x - b_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \\ b_1 = -b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 = 0 \end{cases}$$

προκύπτει ότι $p \in V_1 \cap V_2$ αν και μόνο αν υπάρχει $a_1 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$p(x) = a_1(x^3 + x),$$

δηλαδή

$$p \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow p \in < x^3 + x >,$$

άρα

$$V_1 \cap V_2 = < x^3 + x >$$

και επομένως είναι $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

Επιπλέον, από την Πρόταση 7.6, προκύπτει ότι

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Τέλος, επειδή $\dim(V_1 + V_2) = 3 < 4 = \dim P_3$, έπεται ότι ο $V_1 + V_2$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $(P_3, +, \cdot)$. □

7.12 Συμπληρωματικές λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 7.18.

1. *Να εξετασθεί αν τα διανύσματα* $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,2)$ *και* $\mathbf{v}_3 = (4,1,2)$ *του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.*

2. *Να εξετασθεί αν τα διανύσματα* $\mathbf{w}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{w}_2 = (0,1,2)$ *και* $\mathbf{w}_3 = (5,3,1)$ *του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.*

Λύση.

1. Θεωρούμε την εξίσωση
$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$
ή, ισοδύναμα,
$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3(4,1,2) = (0,0,0)$$
ή, ισοδύναμα,
$$(\lambda_1 + 4\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) = (0,0,0),$$
απ' όπου προκύπτει το σύστημα
$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$
Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = -4\lambda_3$ στη δεύτερη εξίσωση, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα
$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$
Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = -4\lambda_3$ και $\lambda_2 = 7\lambda_3$ στην τρίτη εξίσωση, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα
$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$
Άρα, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, επομένως τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

2. Θεωρούμε την εξίσωση
$$\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \lambda_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$
ή, ισοδύναμα,
$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3(5,3,1) = (0,0,0)$$
ή, ισοδύναμα,
$$(\lambda_1 + 5\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0),$$
απ' όπου προκύπτει το σύστημα
$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = -5\lambda_3$ στη δεύτερη εξίσωση, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = -5\lambda_3$ και $\lambda_2 = 7\lambda_3$ στην τρίτη εξίσωση, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα είναι αόριστο και οι λύσεις του είναι όλες οι τριάδες $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-5\lambda_3, 7\lambda_3, \lambda_3)$, όπου $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Επομένως, αν για παράδειγμα $\lambda_3 = 1$, έχουμε ότι

$$-5\mathbf{w}_1 + 7\mathbf{w}_2 + 1\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$$

επομένως, τα διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. □

Άσκηση 7.19. *Να βρεθεί η θήκη που παράγεται από τα επόμενα σύνολα διανυσμάτων:*

1. $\mathbf{w}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 2)$ *και* $\mathbf{w}_3 = (5, 3, 1)$.
2. $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2)$ *και* $\mathbf{v}_3 = (4, 1, 2)$.

Λύση.

1. Η θήκη του συνόλου $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$.

   Όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα, συγκεκριμένα το $\mathbf{w}_3$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{w}_1$ και $\mathbf{w}_2$, οπότε

   $$< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 >=< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 >,$$

   δηλαδή το σύνολο των διανυσμάτων που παράγονται από τους γραμμικούς συνδυασμούς των τριών είναι το ίδιο με την θήκη των δύο πρώτων.

   Εξετάζουμε τώρα αν τα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.

   Θεωρούμε την εξίσωση

   $$\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$$

   ή, ισοδύναμα,

   $$(\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0, 0, 0),$$

   απ' όπου προκύπτει ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, άρα τα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

   Επομένως, η θήκη των $< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 >$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής $\lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 = \lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(0, 1, 2) = (\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2)$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

   Άρα,

   $$< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 >= \{(\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Η περιγραφή αυτή δεν μας επιτρέπει να εξετάσουμε άμεσα ποια διανύσματα ανήκουν στη θήκη αυτή. Μια ισοδύναμη περιγραφή της θήκης των $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ μπορεί να βρεθεί ως εξής:

Έστω $\mathbf{w} = (x, y, z) \in < \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 >$. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(0, 1, 2) = (x, y, z)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (x, y, z),$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= y \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= z. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = x$ στη δεύτερη εξίσωση, προκύπτει ότι $\lambda_2 = y - 2x$. Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = x$ και $\lambda_2 = y - 2x$ στη τρίτη εξίσωση, προκύπτει ότι $3x + 2(y - 2x) = z$, ή, ισοδύναμα, $x - 2y + z = 0$.

Άρα, προκύπτει ισοδύναμα ότι

$$< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 >= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\},$$

δηλαδή η θήκη των $< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 >$ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου με εξίσωση $x - 2y + z = 0$.

2. Η θήκη του συνόλου $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

   Όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

   Επομένως, η θήκη των $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$.

   Άρα
$$< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >= \{(\lambda_1 + 4\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$$

   Η μορφή αυτή των διανυσμάτων της θήκης των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ δεν μας επιτρέπει να εξετάσουμε άμεσα ποια διανύσματα περιέχει.

   Έστω $\mathbf{v} = (x, y, z) \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

   ή, ισοδύναμα,

$$(\lambda_1 + 4\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) = (x, y, z),$$

   απ' όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_3 &= x \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= y \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= z. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\lambda_1 = x - 4\lambda_3$ στη δεύτερη και τρίτη εξίσωση προκύπτει ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_3 &= x \\ 2x + \lambda_2 - 7\lambda_3 &= y \\ 3x + 2\lambda_2 - 10\lambda_3 &= z. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\lambda_2 = y - 2x + 7\lambda_3$ στην τρίτη εξίσωση προκύπτει ισοδύναμα ότι $-x + 2y + 4\lambda_3 = z$, ή, ισοδύναμα, $x - 2y + z = 4\lambda_3$. Άρα,

$$< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = c, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3,$$

δηλαδή τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ παράγουν ολόκληρο το διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. □

Άσκηση 7.20. *Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, και $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Να δειχθεί ότι η θήκη των διανυσμάτων $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι υπόχωρος του V.*

Λύση. Έστω $W =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$. Αρκεί να δείξουμε ότι το W είναι μη κενό και ότι οι πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι κλειστές στο W.

Πράγματι, $W \neq \emptyset$, αφού $\mathbf{v}_1 \in W$.

Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$. Τότε υπάρχουν λ_1, λ_2 και κ_1, κ_2 ώστε

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$$

και

$$\mathbf{y} = \kappa_1 \mathbf{v}_1 + \kappa_2 \mathbf{v}_2.$$

Για κάθε $a, b \in F$ ισχύει ότι

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = a(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) + b(\kappa_1 \mathbf{v}_1 + \kappa_2 \mathbf{v}_2) = (a\lambda_1 + b\kappa_1)\mathbf{v}_1 + (a\lambda_2 + b\kappa_2)\mathbf{v}_2 \in W,$$

δηλαδή το W είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+$ και $\cdot$.

Άρα, ο W είναι υπόχωρος του V. □

Γενίκευση: Αν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ τότε και η θήκη $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n >$ είναι υπόχωρος του V.

Λύση. Η απόδειξη είναι ίδια:

Έστω $W =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n >$.

Ισχύει ότι $W \neq \emptyset$, αφού $\mathbf{v}_1 \in W$.

Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ ώστε

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

και

$$\mathbf{y} = \kappa_1 \mathbf{v}_1 + \kappa_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n \mathbf{v}_n.$$

Για κάθε $a, b \in F$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} a\mathbf{x} + b\mathbf{y} &= a(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n) + b(\kappa_1 \mathbf{v}_1 + \kappa_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n \mathbf{v}_n) \\ &= (a\lambda_1 + b\kappa_1)\mathbf{v}_1 + (a\lambda_2 + b\kappa_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a\lambda_n + b\kappa_n)\mathbf{v}_n \in W. \end{aligned}$$

Άρα, ο W είναι υπόχωρος του V. □

Άσκηση 7.21. *Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, και $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Να δειχθεί ότι:*

1. *Τα διανύσματα $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{0}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*
2. *Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε*
$$\mathbf{v}_j \notin < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n > .$$
3. *Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και*
$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n,$$
τότε τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ είναι μοναδικά.
4. *Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα και*
$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n,$$
*τότε τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ **δεν** είναι μοναδικά.*

Λύση.

1. Πράγματι, επειδή
$$0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_n + 1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$
έπεται ότι τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
2. Επειδή τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$.
Αν $\mathbf{v}_j \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n >$, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \lambda_n \in F$, όχι όλα ίσα με 0, ώστε
$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + \lambda_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_j$$
ή, ισοδύναμα,
$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + (-1)\mathbf{v}_j + \lambda_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n = 0,$$
άτοπο, αφού τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
3. Έστω ότι
$$\mathbf{v} = \kappa_1\mathbf{v}_1 + \kappa_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n\mathbf{v}_n.$$
Τότε
$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \kappa_1\mathbf{v}_1 + \kappa_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n\mathbf{v}_n$$
ή, ισοδύναμα,
$$(\lambda_1 - \kappa_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \kappa_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_n - \kappa_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$
Επειδή τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι
$$\lambda_1 - \kappa_1 = \lambda_2 - \kappa_2 = \cdots = \lambda_n - \kappa_n = 0.$$
Άρα,
$$\lambda_1 = \kappa_1, \lambda_2 = \kappa_2, \ldots, \lambda_n = \kappa_n,$$
δηλαδή η έκφραση του $\mathbf{v}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι μοναδική.

4. Αφού τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$, όχι όλα 0, ώστε

$$\kappa_1\mathbf{v}_1 + \kappa_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Επομένως, για κάθε $a \in F$ ισχύει ότι

$$a(\kappa_1\mathbf{v}_1 + \kappa_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}.$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{0} \\ &= \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n + a(\kappa_1\mathbf{v}_1 + \kappa_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \kappa_n\mathbf{v}_n) \\ &= (\lambda_1 + a\kappa_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 + a\kappa_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\lambda_n + a\kappa_n)\mathbf{v}_n, \text{ για κάθε } a \in F. \end{aligned}$$

Δηλαδή, το $\mathbf{v}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ με συντελεστές κάθε n-αδά της μορφής $(\lambda_1 + a\kappa_1, \lambda_2 + a\kappa_2, \ldots, \lambda_n + a\kappa_n)$, για κάθε $a \in F$.

Συμπέρασμα: Αν το F έχει άπειρα στοιχεία, τότε υπάρχουν άπειροι τρόποι να εκφράσουμε το $\mathbf{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Αν $|F| = q$, τότε υπάρχουν τουλάχιστον q τρόποι να εκφράσουμε το $\mathbf{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. □

Άσκηση 7.22. *Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του* $\mathbf{R}^2$ *είναι υπόχωροι του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*:*

1. $W_1 = \{(0,0)\}$.
2. $W_2 = \{(1,1)\}$.
3. $W_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.
4. $W_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 1\}$.
5. $W_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}$.
6. $W_6 = \{\lambda(1,2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
7. $W_7 = \{a(1,2) + b(2,1) : a, b \in \mathbb{R}\}$.
8. $W_8 = \{a(1,2) + (2,1) : a \in \mathbb{R}\}$
9. $W_9 = \{a(1,2) + (2,4) : a \in \mathbb{R}\}$
10. $W_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 10\}$.

Λύση. Σε όλα τα παρακάτω, είναι χρήσιμη η παρατήρηση ότι το μηδενικό διάνυσμα **πρέπει** να ανήκει σε κάθε κάθε υπόχωρο ενός διανυσματικού χώρου. Εδώ το μηδενικό διάνυσμα είναι το ζεύγος $(0,0)$.

1. Το W_1 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.
2. Επειδή $(0,0) \notin W_2$ έπεται ότι W_2 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

3. Προφανώς, $W_3 \neq \emptyset$ αφού $(0,0) \in W_3$ (διότι $0 = 2 \cdot 0$).

   Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_3$ με $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$. Τότε ισχύει $y_1 = 2x_1$ και $y_2 = 2x_2$.

   Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 &= a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) \\ &= (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2). \end{aligned}$$

   Για να είναι $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \in W_3$ πρέπει $ay_1 + by_2 = 2(ax_1 + bx_2)$.

   Πράγματι, από τις σχέσεις $y_1 = 2x_1$ και $y_2 = 2x_2$ προκύπτει ότι

$$ay_1 = 2ax_1 \text{ και } by_2 = 2bx_2.$$

   Προσθέτωντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$ay_1 + by_2 = 2(ax_1 + bx_2).$$

   Άρα, $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \in W_3$, δηλαδή το W_3 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

4. Επειδή $(0,0) \notin W_4$, αφού $0 \neq 2 \cdot 0 + 1$, έπεται ότι W_4 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2), +, \cdot)$.

5. Προφανώς, $W_5 \neq \emptyset$, αφού $(0,0) \in W_5$. Όμως το W_5 δεν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+$ και $\cdot$. Πράγματι, ενώ $(1,1) \in W_5$ ισχύει $(-1) \cdot (1,1) = (-1,-1) \notin W_5$. Άρα το W_5 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

6. Προφανώς, $W_6 \neq \emptyset$, αφού $(1,2) \in W_6$.

   Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_6$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ώστε $\mathbf{v}_1 = \lambda_1(1,2)$ και $\mathbf{v}_2 = \lambda_2(1,2)$.

   Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = a\lambda_1(1,2) + b\lambda_2(1,2) = (a\lambda_1 + b\lambda_2)(1,2) \in W_6.$$

   Άρα, το W_6 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

7. Προφανώς, $W_7 \neq \emptyset$, αφού $(1,2) \in W_7$.

   Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_7$. Τότε υπάρχουν $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$ ώστε $\mathbf{v}_1 = a_1(1,2) + b_1(2,1)$, και $\mathbf{v}_2 = a_2(1,2) + b_2(2,1)$.

   Για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \kappa\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 &= \kappa(a_1(1,2) + b_1(2,1)) \\ &= \lambda(a_2(1,2) + b_2(2,1)) \\ &= (\kappa a_1 + \lambda a_2)(1,2) + (\kappa b_1 + \lambda b_2)(2,1) \in W_7. \end{aligned}$$

   Άρα, το W_7 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

8. Ισχύει ότι $(0,0) \notin W_8$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$a(1,2) + (2,1) = (0,0)$$

   ή, ισοδύναμα,

$$(a + 2, 2a + 1) = (0,0)$$

   ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} a + 2 &= 0 \\ 2a + 1 &= 0, \end{aligned}$$

   το οποίο είναι αδύνατο. Άρα το W_8 δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

9. Ισχύει ότι $a(1,2) + (2,4) = a(1,2) + 2(1,2) = (a+2)(1,2)$. Επομένως, εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (6), εύκολα προκύπτει ότι το W_9 είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

10. Το σύνολο W_{10} δεν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+$ και $\cdot$.

    Προφανώς, $(1,1) \in W_{10}$ αφού $|1| + |1| \leqslant 10$, αλλά $6 \cdot (1,1) = (6,6) \notin W_{10}$, αφού $|6| + |6| > 10$. Άρα, το W_{10} δεν είναι υπόχωρος του $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι οι μόνοι γνήσιοι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ είναι η αρχή των αξόνων, καθώς και όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. □

Άσκηση 7.23. *Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων αποτελούν βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

1. $S_1 = \{(1,1,1), (1,2,3)\}$.

2. $S_2 = \{(0,1,1), (1,1,0), (2,4,2), (4,2,4)\}$.

3. $S_3 = \{(1,2,1), (2,1,2), (1,2,3)\}$.

4. $S_4 = \{(1,-1,1), (2,1,-1), (2,7,-7)\}$.

Λύση. Ο διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ έχει διάσταση 3. Επομένως κάθε βάση του έχει ακριβώς 3 στοιχεία.

1. Επειδή $|S_1| = 2$, το σύνολο S_1 δεν αποτελεί βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

2. Επειδή $|S_2| = 4$, το σύνολο S_2 δεν αποτελεί βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

3. Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $(1,2,1), (2,1,2), (1,2,3)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

    - (1ος τρόπος) Θεωρούμε την εξίσωση

    $$\lambda_1(1,2,1) + \lambda_2(2,1,2) + \lambda_3(1,2,3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$
    $$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0),$$

    από την οποία προκύπτει το σύστημα

    $$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
    $$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

    Άρα, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

    - (2ος τρόπος) Θα υπολογίσουμε την τιμή της ορίζουσας της μήτρας με γραμμές τα 3 διανύσματα. Είναι

    $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-4) = -6 \neq 0.$$

    Άρα, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.[1]

[1]Ο 2ος τρόπος εφαρμόζεται μόνο αν έχουμε να εξετάσουμε n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Επομένως, το S_3 αποτελεί μια βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

4. Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $(1,-1,1), (2,1,-1), (2,7,-7)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

   - (1ος τρόπος) Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(2,7,-7) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$
$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 - 7\lambda_3) = (0,0,0),$$

   από την οποία προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \lambda_2 = -3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 - 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4\lambda_3 \\ \lambda_2 = -3\lambda_3. \end{cases}$$

   Άρα, το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις (για παράδειγμα την $\lambda = 4$, $\lambda_2 = -3$ και $\lambda_3 = 1$), δηλαδή τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

   - (2ος τρόπος) Θα υπολογίσουμε την τιμή της ορίζουσας της μήτρας με γραμμές τα 3 διανύσματα. Είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

   άρα, τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.[2]

Επομένως, το σύνολο S_4 δεν αποτελεί βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. □

Άσκηση 7.24. *Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:*

1. $S_1 = \{(2,-7,4), (-1,-1,6), (4,3,-2), (5,-1,-2)\}$.
2. $S_2 = \{(3,0,-2)\}$.
3. $S_3 = \{(2,1,0), (1,-1,-2)\}$.
4. $S_4 = S_2 \cup S_3$.

Λύση. Ο χώρος $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ έχει διάσταση 3 επομένως ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ είναι 3.

1. Επειδή $|S_1| = 4$ έπεται ότι τα διανύσματα του S_1 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
2. Επειδή $(3,0,-2) \neq \mathbf{0}$ έπεται ότι το διάνυσμα $(3,0,-2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

[2] Ο 2ος τρόπος εφαρμόζεται μόνο αν έχουμε να εξετάσουμε n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

3. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1(2,1,0) + \lambda_2(1,-1,2) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0)$$

από την οποία προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Άρα, τα διανύσματα $(2,1,0)$,$(1,-1,2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

4. Παρατηρούμε ότι $(3,0,-2) = (2,1,0) + (1,-1,-2)$, άρα τα διανύσματα $(3,0,-2)$, $(2,1,0)$, $(1,-1,-2)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Παρατήρηση: Η ένωση δύο γραμμικώς ανεξάρτητων συνόλων διανυσμάτων δεν είναι απαραίτητα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων. □

Άσκηση 7.25. *Να βρεθεί η διάσταση των παρακάτω διανυσματικών χώρων.*

1. $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$.
2. $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$.
3. $V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$.
4. $V_4 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : a + b = c + d\}$.
5. $V_5 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : a = 2b = 3c\}$.

Λύση.

Θα βρούμε μια βάση για κάθε ένα από τους παραπάνω διανυσματικούς χώρους, εκφράζοντας κάθε στοιχείο τους ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της αντίστοιχης βάσης.

1. Έστω $(x,y) \in V_1$. Τότε, επειδή $x - 2y = 0$, έπεται ότι

$$(x,y) = (2y,y) = y(2,1)$$

άρα κάθε στοιχείο του V_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός του $(2,1)$. Το σύνολο $\{(2,1)\}$ είναι μια βάση του V_1. Άρα, $\dim V_1 = 1$.

2. Έστω $(x,y,z) \in V_2$. Τότε, επειδή $x + y = z$, έπεται ότι

$$(x,y,z) = (x,y,x+y) = (x,0,x) + (0,y,y) = x(1,0,1) + y(0,1,1).$$

Άρα, κάθε στοιχείο του V_2 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(1,0,1)$ και $(0,1,1)$. Τα διανύσματα $(1,0,1)$ και $(0,1,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αφού

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,1) = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

οπότε το σύνολο $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ είναι μια βάση του V_2. Άρα, $\dim V_2 = 2$.

3. Έστω $(x, y, z) \in V_3$. Τότε, επειδή $x - 2y = z$, έπεται ότι

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = (2y, y, 0) + (0, 0, z) = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Άρα, κάθε στοιχείο του V_3 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(2, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$, τα οποία είναι προφανώς γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε το σύνολο $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ είναι μια βάση του V_3. Άρα, $\dim V_3 = 2$.

4. Έστω $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V_4$. Τότε, επειδή $a + b = c + d$, έπεται ότι

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άρα, κάθε στοιχείο του V_4 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικώς ανεξάρτητων μητρών $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Επομένως, $\dim V_4 = 3$.

5. Έστω $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V_5$. Τότε, επειδή $a = 2b = 3c$, έπεται ότι

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{3} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{3} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα, κάθε στοιχείο του V_4 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικώς ανεξάρτητων μητρών $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, επομένως $\dim V_5 = 2$. □

Άσκηση 7.26. *Να βρεθεί μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *η οποία περιέχει τα διανύσματα* $(0, 1, 1, 1)$ *και* $(1, -1, -1, 0)$.

Λύση. Προφανώς, τα διανύσματα $(0, 1, 1, 1)$ και $(1, -1, -1, 0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επειδή $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, αρκεί να βρούμε δύο επιπλέον γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Θα αναζητήσουμε αυτά τα δύο διανύσματα μεταξύ των διανυσμάτων της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^4$.

Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $(0, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 0), \mathbf{e}_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω

$$\begin{aligned} \lambda_1(0, 1, 1, 1) + \lambda_2(1, -1, -1, 0) + \lambda_3(1, 0, 0, 0) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \\ (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

τότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

άρα τα διανύσματα $(0, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 0), \mathbf{e}_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απομένει να βρούμε άλλο ένα διάνυσμα.

Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $(0,1,1,1),(1,-1,-1,0),\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω

$$\lambda_1(0,1,1,1)+\lambda_2(1,-1,-1,0)+\lambda_3(1,0,0,0)+\lambda_4(0,1,0,0)=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$
$$(\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4,\lambda_1-\lambda_2,\lambda_1)=(0,0,0,0).$$

Τότε, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases}\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_4=0\\ \lambda_1-\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\end{cases}\Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0.$$

Άρα, τα διανύσματα $(0,1,1,1),(1,-1,-1,0),\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο $\{(0,1,1,1),(1,-1,-1,0),\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

Αν το διάνυσμα $\mathbf{e}_1$ ή το διάνυσμα $\mathbf{e}_2$ δεν ήταν γραμμικώς ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα, τότε θα δοκιμάζαμε το επόμενο διάνυσμα της κανονικής βάσης. Η θεωρία μας εξασφαλίζει ότι μεταξύ των στοιχείων της κανονικής βάσης θα βρούμε το ζητούμενο σύνολο. □

Άσκηση 7.27. *Να βρεθούν οι διαστάσεις των υπόχωρων V_1+V_2, $V_3\cap V_4$ όταν είναι γνωστό ότι* $\dim V_1=2$, $\dim V_2=2$, $\dim(V_1\cap V_2)=1$, $\dim V_3=2$, $\dim V_4=1$, $\dim(V_3+V_4)=3$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)=2+2-1=3.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\dim(V_3\cap V_4)=\dim V_3+\dim V_4-\dim(V_3+V_4)=2+1-3=0.$$ □

Άσκηση 7.28. *Έστω $V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$, $V_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y\}$.*
Να βρεθούν οι διαστάσεις των $V_1,V_2,V_1\cap V_2,V_1+V_2$.

Λύση. Έστω $(x,y,z)\in V_1$. Αφού $x+y+z=0$, έπεται ότι

$$(x,y,z)=(x,y,-x-y)=(x,0,-x)+(0,y,-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1).$$

Άρα, κάθε διάνυσμα του V_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $(1,0,-1)$ και $(0,1,-1)$. Επομένως, $\dim V_1=2$.

Έστω $(x,y,z)\in V_2$. Αφού $x=y$, έπεται ότι

$$(x,y,z)=(x,x,z)=(x,x,0)+(0,0,z)=x(1,1,0)+z(0,0,1).$$

Άρα, κάθε διάνυσμα του V_2 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $(1,1,0)$ και $(0,0,1)$. Επομένως, $\dim V_2=2$.

Έστω $(x,y,z)\in V_1\cap V_2$. Τότε

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+z=0\\ x=y,\end{cases}$$

οπότε

$$(x, y, z) = (x, x, -2x) = x(1, 1, -2).$$

Άρα, κάθε διάνυσμα του $V_1 \cap V_2$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός του $(1, 1, -2)$. Επομένως, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

Τέλος,

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

δηλαδή $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. □

Άσκηση 7.29. *Να λυθεί η εξίσωση*

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

όπου x, y είναι οι άγνωστοι και t είναι παράμετρος.

Λύση. Η εξίσωση έχει λύση αν και μόνο αν

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \in < \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} > .$$

Θα εξετάσουμε αν οι μήτρες $\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ t\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ t\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$(t - 1)\lambda_1 = 0.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $t = 1$. Τότε οι μήτρες $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες και ισχύει ότι

  $$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Άρα,

  $$< \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} > = < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$$

  Προφανώς,

  $$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \in < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$$

αφού
$$\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Επιπλέον, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} + a\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\ &= 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + a\left(2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right)\\ &= (2a+3)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - a\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Άρα, για $t = 1$, η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις $(x, y) = (2a + 3, -a)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

- $t \neq 1$. Τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ και άρα οι μήτρες $\begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

  Επιπλέον, ισχύει ότι $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \dfrac{3}{2}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$.

  Άρα,
$$\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}.$$

  Επειδή, οι μήτρες $\begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, η έκφραση αυτή είναι μοναδική.

  Άρα, για $t \neq 1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση $(x, y) = (0, \frac{3}{2})$. □

7.13 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Έστω η εσωτερική πράξη $\boxplus$ και η εξωτερική πράξη $\boxdot$ στο σύνολο V των θετικών αριθμών, με

$$x \boxplus y = xy \quad \text{και} \quad \lambda \boxdot x = x^{\lambda},$$

για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η αλγεβρική δομή $(V, \boxplus, \boxdot)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

2. Στο σύνολο $V = \{2^x : x \in \mathbb{R}\}$ ορίζονται η εσωτερική πράξη $\oplus$ και η εξωτερική πράξη $\odot$ ως εξής:

$$2^x \oplus 2^y = 2^{x+y-1} \quad \text{και} \quad \lambda \odot 2^x = 2^{\lambda(x-1)+1},$$

για κάθε $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η αλγεβρική δομή $(V, \oplus, \odot)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

3. Στο σύνολο $V = \mathbb{R}^2$ ορίζονται η εσωτερική πράξη $\oplus$ και η εξωτερική πράξη $\odot$ με σύνολο τελεστών το $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

και

$$\lambda \odot (x_1, x_2) = (2\lambda x_1, -\lambda x_2).$$

Να εξεταστεί αν η αλγεβρική δομή $(V, \oplus, \odot)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

4. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες 5 - 11 των διανυσματικών χώρων.

5. Να αποδειχθεί η Πρόταση 7.1.

6. Να εξεταστεί αν τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 = 2x_3\},$$
$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\},$$
$$W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5\}.$$

7. Έστω $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των 2×2 μητρών με πραγματικά στοιχεία. Να εξεταστεί αν τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathcal{M}_2$ είναι υπόχωροι του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$:

$$W_1 = \{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : 2\alpha + \beta = \gamma - \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\},$$
$$W_2 = \{\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : \beta, \gamma \in \mathbb{R}\},$$
$$W_3 = \{\begin{bmatrix} \alpha & \beta + 1 \\ -\gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

8. Να εξεταστεί αν τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$:

$$W_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ συνεχής}\},$$
$$W_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ άρτια}\},$$
$$W_3 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) < 1\},$$
$$W_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 0\},$$
$$W_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

9. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Να εξεταστεί αν το διάνυσμα $\mathbf{x} = (-2, 2, -5)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\mathbf{x}_1 = (-1, 3, 2), \quad \mathbf{x}_2 = (4, 0, 1), \quad \mathbf{x}_3 = (2, 2, 5).$$

10. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ και τα διανύσματά του

$$\mathbf{x}_1 = (1, 0, 3, 4), \mathbf{x}_2 = (-2, 3, -1, 2), \mathbf{x}_3 = (1, -1, 0, 1)$$

και $\mathbf{x} = (-8, \alpha, 3, 18)$. Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το $\mathbf{x}$ να είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

11. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(P, +, \cdot)$ των πολυωνύμων και τα στοιχεία του

$$p_1(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 2, \qquad p_2(x) = x^2 + x - 2,$$
$$p_3(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 3, \qquad p_4(x) = 6x^3 + 5,$$
$$p(x) = 4x^3 + 9x^2 - 7x + 2.$$

Να εξεταστεί αν το p είναι γραμμικός συνδυασμός των p_1, p_2, p_3, p_4.

12. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των 2×2 μητρών με πραγματικά στοιχεία και τα στοιχεία του

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ \alpha & 5 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η Δ να είναι γραμμικός συνδυασμός των A, B, Γ.

13. Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in V$. Να αποδειχθεί ότι

$$< \mathbf{x}_1+2\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1+3\mathbf{x}_2, -2\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_3 > = < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 > .$$

14. Να εξετασθεί αν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα όταν

    (i) $\mathbf{x}_1 = (-1, 2, 4)$, $\mathbf{x}_2 = (3, -2, 2)$, $\mathbf{x}_3 = (6, 3, 0)$,

    (ii) $\mathbf{x}_1 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (4, -2, 3)$, $\mathbf{x}_3 = (-2, 5, 6)$.

15. Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο των 2×2 μητρών με πραγματικά στοιχεία, να εξεταστεί αν οι μήτρες A, B, Γ, Δ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες όταν

    i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

    ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

16. Δίνεται διανυσματικός χώρος $(V, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματά του. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα

$$(a-1)\mathbf{x} + (a+1)\mathbf{y} \quad \text{και} \quad a\mathbf{x} + 2\mathbf{y}$$

να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

17. Δίνεται διανυσματικός χώρος $(V, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ τρία διανύσματά του. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$S_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_3\}$$

είναι βάση του $(V, +, \cdot)$ αν και μόνο αν το σύνολο

$$S_2 = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3\}$$

είναι βάση του $(V, +, \cdot)$.

18. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{x} = (-1, 4, 2), \quad \mathbf{y} = (2, -1, 0), \quad \mathbf{z} = (-1, -1, 3),$$

αποτελούν βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ ως προς τη βάση αυτή.

19. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + 3x^2 + 4x + 5, \\ p_2(x) &= x^3 - x^2 - x - 1, \\ p_3(x) &= 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1, \\ p_4(x) &= 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2. \end{aligned}$$

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $S = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ είναι μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό μικρότερο ή ίσο του 3 και να βρεθούν οι συντεταγμένες του πολυωνύμου

$$p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$$

ως προς τη βάση αυτή.

20. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου όλων των 2×2 μητρών με πραγματικά στοιχεία και να βρεθούν οι συντεταγμένες της μήτρας

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

ως προς τη βάση αυτή.

21. Να βρεθεί μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, που να περιέχει τα διανύσματα

$$\mathbf{x} = (-1, 3, 0, 6), \qquad \mathbf{y} = (2, 1, 4, 0).$$

22. Να βρεθεί μια βάση του πραγματικού διανυσματικού χώρου όλων των 2×2 μητρών με πραγματικά στοιχεία, που να περιέχει τις μήτρες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

23. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $p_1, p_2, \ldots, p_n$, τα οποία έχουν πραγματικούς συντελεστές, μη μηδενικό βαθμό και σταθερό όρο ίσο με το μηδέν. Να αποδειχθεί ότι

$$\dim < p_1, p_2, \ldots, p_n >= \dim < p_1', p_2', \ldots, p_n' >,$$

όπου p_i' είναι η παράγωγος του p_i, για κάθε $i \in [n]$.

24. Έστω $(V, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και V_1, V_2 υπόχωροί του, με $V_1 \nsubseteq V_2$. Αν

$$\dim V = 10, \quad \dim V_1 = 5, \quad \dim V_2 = 7,$$

να βρεθούν οι δυνατές τιμές του $\dim(V_1 \cap V_2)$.

25. Έστω $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ ο πραγματικός διανυσματικός χώρος όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, με

$$f_1(x) = \cos 2x, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = 1.$$

Να βρεθεί η διάσταση του υποχώρου που παράγεται από τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3.

26. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ και τα σύνολα

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 3x_3 = x_4 = 0\},$$
$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_2 + x_4 = 0\}.$$

i) Να αποδειχθεί ότι τα V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.
ii) Να βρεθούν οι διαστάσεις των $V_1,\ V_2,\ V_1 \cap V_2,\ V_1 + V_2$.
iii) Είναι ο $V_1 + V_2$ γνήσιος υπόχωρος του $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$;

27. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ των 2×2 μητρών με πραγματικά στοιχεία, και τα σύνολα

$$V_1 = \{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} : a_1 - 2b_1 + c_1 + 2d_1 = 0\}$$

$$V_2 = \{\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} : a_2 - 2b_2 + 2c_2 + d_2 = 0\}$$

όπου $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$,

i) Να αποδειχθεί ότι τα V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$.
ii) Να βρεθούν οι διαστάσεις των $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$.
iii) Είναι ο $V_1 + V_2$ γνήσιος υπόχωρος του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$;

28. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(P_4, +, \cdot)$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, και βαθμό μικρότερο ή ίσο του 4, και τα $V_1, V_2 \subseteq P_4$, με

$$V_1 = \{ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2ax + 2b : a, b, c \in \mathbb{R}\},$$
$$V_2 = \{ax^4 - bx^3 + 2ax - 2b : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

i) Να αποδειχθεί ότι τα V_1, V_2 είναι υπόχωροι του $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.
ii) Να βρεθούν οι διαστάσεις των $V_1,\ V_2,\ V_1 \cap V_2,\ V_1 + V_2$.
iii) Είναι ο $V_1 + V_2$ γνήσιος υπόχωρος του $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$;

Κεφάλαιο 8

Γραμμικές απεικονίσεις

8.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$. Μια απεικόνιση $f : V \to W$ ονομάζεται **γραμμική απεικόνιση** (ή **μορφισμός** ή **γραμμικός μετασχηματισμός**) αν και μόνο αν

i) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

ii) $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$, για κάθε $\lambda \in F$ και $\mathbf{x} \in V$.

Παρατηρήσεις:

1. Αν και οι πράξεις των διανυσματικών χώρων είναι εν γένει διαφορετικές (ακόμα και αν $V = W$), τις συμβολίζουμε με τα ίδια σύμβολα, χάριν απλότητας. Επίσης, θα χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο ($\mathbf{0}$) για τα μηδενικά στοιχεία τους.

2. Οι συνθήκες (i) και (ii) στον παραπάνω ορισμό μπορούν να αντικατασταθούν ισοδύναμα από τη συνθήκη:
$$\text{iii)} \quad f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}),$$
για κάθε $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

   Πράγματι, αν ισχύουν οι συνθήκες (i) και (ii), τότε, εφαρμόζοντάς τις διαδοχικά, προκύπτει η συνθήκη (iii), δηλαδή
$$f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = f(\lambda\mathbf{x}) + f(\mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}).$$

   Αντίστροφα, αν ισχύει η συνθήκη (iii), τότε εφαρμόζοντάς την για $\lambda = \mu = 1$ και για $\mu = 0$, προκύπτουν διαδοχικά οι συνθήκες (i) και (ii), δηλαδή
$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(1\mathbf{x} + 1\mathbf{y}) = 1f(\mathbf{x}) + 1f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$
και
$$f(\lambda\mathbf{x}) = f(\lambda\mathbf{x} + \mathbf{0}) = f(\lambda\mathbf{x} + 0\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + 0f(\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mathbf{0} = \lambda f(\mathbf{x}).$$

3. Η συνθήκη (iii) επεκτείνεται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων, δηλαδή ι-σχύει:

   Αν $f : V \to W$ γραμμική απεικόνιση, τότε
$$f(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{x}_n),$$
για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ και $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$.

4. Αν $f : V \to W$ γραμμική απεικόνιση, τότε ισχύουν τα παρακάτω

   α) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

   β) $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

   Πράγματι, από τη συνθήκη (ii), για $\lambda = 0$ και $\lambda = -1$, προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις
$$f(\mathbf{0}) = f(0\mathbf{x}) = 0f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$
   και
$$f(-\mathbf{x}) = f((-1)\mathbf{x}) = (-1)f(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}).$$

Παραδείγματα

1. Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και $a \in F$. Τότε, η απεικόνιση $f : V \to V$, με $f(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$ είναι γραμμική.

   Πράγματι, για $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, είναι
$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= a(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = a(\lambda\mathbf{x}) + a(\mu\mathbf{y}) \\ &= (a\lambda)\mathbf{x} + (a\mu)\mathbf{y} = (\lambda a)\mathbf{x} + (\mu a)\mathbf{y} \\ &= \lambda(a\mathbf{x}) + \mu(a\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

   Ειδικά, για $a = 1$ και $a = 0$, προκύπτει ότι η ταυτοτική απεικόνιση και η σταθερή, ίση με $\mathbf{0}$, απεικόνιση είναι γραμμικές.

2. Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και τις απεικονίσεις f, g, h, από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^3$, με
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 0) \\ g(x_1, x_2) &= (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 1), \\ h(x_1, x_2) &= (x_1 + x_2, x_1x_2, 0). \end{aligned}$$

   Θα αποδειχθεί ότι η f είναι γραμμική, ενώ οι g, h δεν είναι.

   Πράγματι, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, με $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, είναι
$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = f(\lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2)) &= f(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 - (\lambda x_2 + \mu y_2), 0) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_1 - \lambda x_2, 0) + (\mu y_1 + \mu y_2, \mu y_1 - \mu y_2, 0) \\ &= \lambda(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 0) + \mu(y_1 + y_2, y_1 - y_2, 0) \\ &= \lambda f(x_1, x_2) + \mu f(y_1, y_2) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

   Άρα, η f είναι γραμμική απεικόνιση.

   Τα μηδενικά στοιχεία των χώρων $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ είναι τα $(0, 0)$ και $(0, 0, 0)$ αντίστοιχα. Όμως, είναι $g(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$, επομένως η απεικόνιση g δεν είναι γραμμική.

   Τέλος, επειδή
$$h(-\mathbf{x}) = h(-x_1, -x_2) = (-x_1 - x_2, x_1x_2, 0)$$
   και
$$-h(\mathbf{x}) = -h(x_1, x_2) = -(x_1 + x_2, x_1x_2, 0) = (-x_1 - x_2, -x_1x_2, 0),$$
   προκύπτει ότι $h(-\mathbf{x}) \neq -h(\mathbf{x})$, όταν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$, και επομένως η απεικόνιση h δεν είναι γραμμική.

3. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$, όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και έστω V ο υπόχωρός του που αποτελείται από όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Τότε, η απεικόνιση $f : V \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, με $f(g) = g'$ είναι γραμμική απεικόνιση.

   Πράγματι, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $g, h \in V$, είναι

$$f(\lambda g + \mu h) = (\lambda g + \mu h)' = (\lambda g)' + (\mu h)' = \lambda g' + \mu h' = \lambda f(g) + \mu f(h).$$

4. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ και έστω η 2×2 μήτρα με πραγματικά στοιχεία $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Τότε, η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

   είναι γραμμική απεικόνιση.

   Πράγματι, για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, είναι

$$\begin{aligned}
f(\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) &= f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) \\
&= f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\
&= (a(\lambda x_1 + \mu x_2) + b(\lambda y_1 + \mu y_2), c(\lambda x_1 + \mu x_2) + d(\lambda y_1 + \mu y_2)) \\
&= (a\lambda x_1 + b\lambda y_1, c\lambda x_1 + d\lambda y_1) + (a\mu x_2 + b\mu y_2, c\mu x_2 + d\mu y_2) \\
&= \lambda(ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1) + \mu(ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2) \\
&= \lambda f(\mathbf{v}_1) + \mu f(\mathbf{v}_2)
\end{aligned}$$

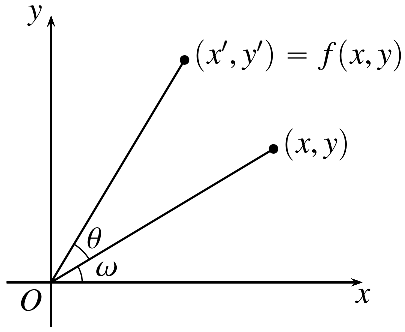
8.2 Στροφή, προβολή και ανάκλαση

Για τη γραμμική απεικόνιση του παραδείγματος 4, θεωρούμε τις ειδικές περιπτώσεις:

1. Αν $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$, τότε

$$f(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

   Η απεικόνιση αυτή παριστάνει γεωμετρικά τη στροφή κατά γωνία θ (βλ. επόμενο σχήμα).



   Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο σημεία (x, y) και (x', y'), όπως φαίνονται στο προηγούμενο σχήμα, τα οποία επιπλέον ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων, δηλαδή $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \rho$, τότε

$$\begin{aligned}
x' &= \rho\cos(\omega + \theta) = \rho(\cos\omega\cos\theta - \sin\omega\sin\theta) \\
&= (\rho\cos\omega)\cos\theta - (\rho\sin\omega)\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta
\end{aligned}$$

και

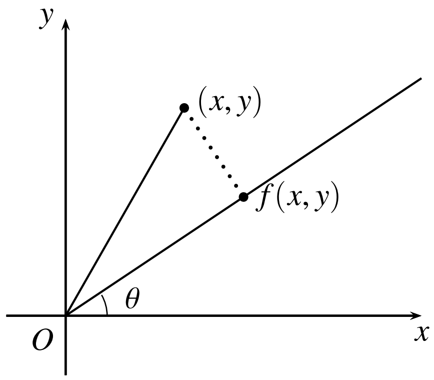
$$\begin{aligned} y' &= \rho \sin(\omega + \theta) = \rho(\sin\omega\cos\theta + \cos\omega\sin\theta) \\ &= (\rho\sin\omega)\cos\theta + (\rho\cos\omega)\sin\theta = y\cos\theta + x\sin\theta, \end{aligned}$$

δηλαδή το σημείο (x', y') είναι η εικόνα του σημείου (x, y) ως προς την απεικόνιση f, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Αν $A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$, τότε

$$f(x, y) = (x\cos^2\theta + y\sin\theta\cos\theta, x\sin\theta\cos\theta + y\sin^2\theta).$$

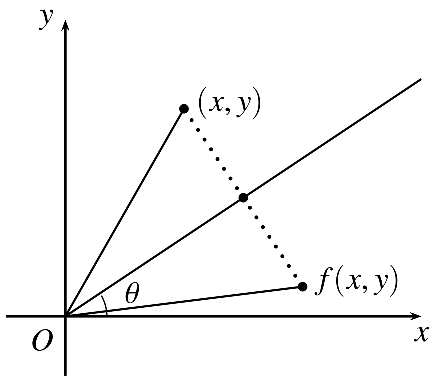
Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή παριστάνει γεωμετρικά την προβολή στην ευθεία $y = (\operatorname{tg}\theta)x$ (βλ. επόμενο σχήμα).



3. Αν $A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$, τότε

$$f(x, y) = (x\cos 2\theta + y\sin 2\theta, x\sin 2\theta - y\cos 2\theta).$$

Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή παριστάνει γεωμετρικά την ανάκλαση στην ευθεία $y = (\operatorname{tg}\theta)x$ (βλ. επόμενο σχήμα).



8.3 Ειδικές κατηγορίες γραμμικών απεικονίσεων

Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ ονομάζεται:

i) **Μονομορφισμός** αν και μόνο αν η f είναι $1-1$, δηλαδή

$$f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V.$$

ii) **Επιμορφισμός** αν και μόνο αν η f είναι επί, δηλαδή για κάθε $\mathbf{y} \in W$ υπάρχει $\mathbf{x} \in V$ με $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (ή ισοδύναμα $f(V) = W$).

iii) **Ισομορφισμός** αν και μόνο αν η f είναι ταυτόχρονα μονομορφισμός και επιμορφισμός.

iv) **Αυτομορφισμός** αν και μόνο αν η f είναι ισομορφισμός και $V = W$.

Παρατήρηση: Η αντίστροφη απεικόνιση ενός ισομορφισμού $f : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση (οπότε και ισομορφισμός). Πράγματι, αν $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ και $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in W$, τότε υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ με $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$ και $f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$, οπότε, χρησιμοποιώντας τη γραμμική ιδιότητα της f, προκύπτει ότι

$$f(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2) = \lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2.$$

Επομένως, είναι

$$f^{-1}(\lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2) = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 = \lambda_1 f^{-1}(\mathbf{y}_1) + \lambda_2 f^{-1}(\mathbf{y}_2).$$

8.4 Ισόμορφοι διανυσματικοί χώροι

Δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ ονομάζονται **ισόμορφοι** (συμβ. $V \simeq W$) αν και μόνο αν υπάρχει ισομορφισμός $f : V \to W$.

Παραδείγματα

1. Οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ είναι ισόμορφοι διότι η απεικόνιση $f : \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}^4$, με
$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d)$$
είναι ισομορφισμός.

2. Οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $(P_n, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^{n+1}, +, \cdot)$ είναι ισόμορφοι διότι η απεικόνιση
$f : P_n \to \mathbb{R}^{n+1}$, με
$$f\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right) = (a_n, \ldots, a_1, a_0)$$
είναι ισομορφισμός.

8.5 Εικόνα και αντίστροφη εικόνα υποχώρου

Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, τους υποχώρους V_1, W_1 των V, W αντίστοιχα και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$. Τότε, τα σύνολα $f(V_1)$ και $f^{-1}(W_1)$ είναι υπόχωροι των W, V αντίστοιχα.

Πράγματι, για το $f(V_1)$, αν $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in f(V_1)$, τότε θα υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1$, με $\mathbf{y}_1 = f(\mathbf{x}_1)$ και $\mathbf{y}_2 = f(\mathbf{x}_2)$. Επειδή V_1 υπόχωρος του V και $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1$, έπεται ότι $\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2 \in V_1$, επομένως, και λόγω της γραμμικότητας της f, θα είναι

$$\lambda\mathbf{y}_1 + \mu\mathbf{y}_2 = \lambda f(\mathbf{x}_1) + \mu f(\mathbf{x}_2) = f(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2) \in f(V_1).$$

Άρα $f(V_1)$ υπόχωρος του W.

Για το $f^{-1}(W_1)$, αν $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in f^{-1}(W_1)$, τότε $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2) \in W_1$ και επειδή W_1 υπόχωρος του W, έπεται ότι $\lambda f(\mathbf{x}_1) + \mu f(\mathbf{x}_2) \in W_1$, επομένως, και λόγω της γραμμικότητας της f, θα είναι

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2) = \lambda f(\mathbf{x}_1) + \mu f(\mathbf{x}_2) \in W_1,$$

και τελικά $\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2 \in f^{-1}(W_1)$, άρα $f^{-1}(W_1)$ υπόχωρος του V.

Υπάρχουν δύο σημαντικές ειδικές περιπτώσεις:

1. Ο υπόχωρος $f(V) = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$ ονομάζεται **εικόνα** (**image**) της γραμμικής απεικόνισης και συμβολίζεται με $\operatorname{Im} f$.

2. Ο υπόχωρος $f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ ονομάζεται **πυρήνας** (**kernel**) της γραμμικής απεικόνισης και συμβολίζεται με $\ker f$.

Πρόταση 8.1. *Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.*

Απόδειξη. Αν $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ και $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$, τότε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2) &\Rightarrow f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker f \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2, \end{aligned}$$

άρα η f είναι μονομορφισμός.

Αντίστροφα, αν η f είναι μονομορφισμός, τότε, δεδομένου ότι ισχύει $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (για κάθε γραμμική απεικόνιση f), είναι

$$\mathbf{x} \in \ker f \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

δηλαδή $\ker f = \{\mathbf{0}\}$. □

Παράδειγμα. *Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, με*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3).$$

Να βρεθούν τα $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$ και να εξετασθεί αν η f είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός.

Λύση. Για το $\ker f$ είναι

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker f &\Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3) = (0,0,0) \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ και } x_4 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{(0,0,0,x) : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Άρα, $\ker f = \{(0,0,0,x) : x \in \mathbb{R}\}$. Επειδή $\ker f \neq \{(0,0,0,0)\}$, έπεται ότι η f δεν είναι μονομορφισμός.

Για το $\operatorname{Im} f$ είναι

$$(y_1, y_2, y_3) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \begin{cases} \text{υπάρχει } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \text{ με} \\ (y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{cases}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow & (y_1, y_2, y_3) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{y_2+y_3}{2} \\ x_2 = \frac{y_3+y_1}{2} \\ x_3 = \frac{y_1+y_2}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, για κάθε $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, ισχύει ότι

$$(y_1, y_2, y_3) = f\left(\frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{y_3 + y_1}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, x_4\right),$$

όπου x_4 είναι οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{R}$. Άρα, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, και επομένως η f είναι επιμορφισμός. □

8.6 Διάσταση και γραμμικές απεικονίσεις

Αρχικά, θα δοθεί μία πρόταση η οποία δείχνει ότι κάθε γραμμική απεικόνιση καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες των στοιχείων μιας βάσης της.

Πρόταση 8.2. *Αν $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ είναι δύο διανυσματικοί χώροι επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, και $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια βάση του V, τότε για κάθε $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n \in W$ υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$, με $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, για κάθε $i \in [n]$.*

Παράδειγμα. *Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Να βρεθεί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, με*

$$f(1,0,0) = (-1,2,2,0), \quad f(0,1,0) = (0,1,1,-2), \quad f(0,0,1) = (3,-1,0,2).$$

Λύση. Επειδή για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ είναι

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1),$$

από τη γραμμική ιδιότητα της f προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) =& f\left(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)\right) \\ =& x_1 f(1,0,0) + x_2 f(0,1,0) + x_3 f(0,0,1) \\ =& x_1(-1,2,2,0) + x_2(0,1,1,-2) + x_3(3,-1,0,2) \\ =& (-x_1 + 3x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2, -2x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$ □

Στη συνέχεια, θα εξετασθεί πότε τα δομικά χαρακτηριστικά των διανυσματικών χώρων μεταφέρονται μέσω των γραμμικών απεικονίσεων.

Πρόταση 8.3. *Έστω δύο διανυσματικοί χώροι* $(V, +, \cdot)$ *και* $(W, +, \cdot)$ *επί του σώματος* $(F, +, \cdot)$, *μια γραμμική απεικόνιση* $f : V \to W$ *και* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in V$. *Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Αν τα διανύσματα* $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_k)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και τα* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

(ii) *Αν η* f *είναι μονομορφισμός και τα διανύσματα* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και τα* $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_k)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

(iii) *Αν* $V_1 =< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k >$, *τότε* $f(V_1) =< f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_k) >$.

(iv) *Αν η* f *είναι ισομορφισμός, τότε το σύνολο* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ *είναι βάση του* V *αν και μόνο αν το σύνολο* $\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_k)\}$ *είναι βάση του* W.

Εφαρμογή 8.1. *Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *και ο υπόχωρός του* $V = \{(x, 0, z, 0) : x, z \in \mathbb{R}\}$. *Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *με*

(i) $\operatorname{Im} f = V$.

(ii) $\ker f = V$.

Λύση.

(i) Έστω $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ η κανονική βάση του $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Παρατηρούμε ότι

$$V =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 >,$$

αφού για οποιοδήποτε $\mathbf{v} = (x, 0, z, 0) \in V$ είναι $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_3$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.2, θα υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, με

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \text{ και } f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0}.$$

Ο τύπος της f είναι

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f\left(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4\right) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + x_3 f(\mathbf{e}_3) + x_4 f(\mathbf{e}_4) \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{0} + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{0} \\ &= x_1(1, 0, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) \\ &= (x_1, 0, x_3, 0) \end{aligned}$$

Επειδή $\mathbb{R}^4 =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 >$, από την Πρόταση 8.3(iii), προκύπτει ότι

$$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^4) =< f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3), f(\mathbf{e}_4) >=< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 >= V.$$

(ii) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.2, θα υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, με

$$f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}, f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 \text{ και } f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_4.$$

Τότε, αποδεικνύεται όπως πριν ότι

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_2, 0, x_4).$$

Οπότε, για κάθε $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in \ker f &\Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)\\ &\Leftrightarrow (0, x_2, 0, x_4) = (0,0,0,0)\\ &\Leftrightarrow x_2 = x_4 = 0\\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, 0, x_3, 0)\\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} \in V.\end{aligned}$$

Άρα, $\ker f = V$. □

Πρόταση 8.4. *Αν $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ είναι δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης, επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, τότε*

$$V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορεί να υποτεθεί ότι οι δύο διανυσματικοί χώροι είναι μη μηδενικοί.

Έστω $V \simeq W$, τότε υπάρχει ισομορφισμός $f : V \to W$. Αν $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μία βάση του V, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 8.3(iv), το σύνολο $\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_n)\}$ είναι μία βάση του W, οπότε $\dim V = n = \dim W$.

Αντίστροφα, αν $\dim V = \dim W = n$ και $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ βάσεις των V, W αντίστοιχα, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 8.2, υπάρχει μοναδική απεικόνιση $f : V \to W$, με $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, για κάθε $i \in [n]$. Θα αποδειχθεί ότι η f είναι ισομορφισμός.

Πράγματι, για $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n \in V$, είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in \ker f &\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\\ &\Leftrightarrow \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}\\ &\Leftrightarrow \lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{y}_n = \mathbf{0}\\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \mathbf{0}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Άρα, $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 8.1, η f είναι μονομορφισμός.

Για να είναι η f επιμορφισμός, πρέπει να ισχύει $W = \operatorname{Im} f$. Έτσι, δεδομένου $\operatorname{Im} f \subseteq W$ (για κάθε απεικόνιση f), αρκεί να δειχθεί ότι $W \subseteq \operatorname{Im} f$. Πράγματι, αν $y \in W$, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$, με

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{y}_n\\ &= \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{x}_n)\\ &= f(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n \in V$. Επομένως, $y \in f(V) = \operatorname{Im} f$, για κάθε $y \in W$, δηλαδή $W \subseteq \operatorname{Im} f$, οπότε η f είναι και επιμορφισμός. □

Πρόταση 8.5. *Αν $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ είναι δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης, επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση, τότε*

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f).$$

Απόδειξη. Αν $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\}$, τότε $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, για κάθε $\mathbf{x} \in V$, δηλαδή $\ker f = V$, οπότε ο τύπος ισχύει. Αν $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, τότε $\dim(\ker f) = 0$ και η απεικόνιση $f : V \to \operatorname{Im} f$ είναι ισομορφισμός, επομένως $\dim V = \dim(\operatorname{Im} f)$, οπότε ο τύπος επίσης ισχύει. Κατόπιν τούτων, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι χώροι $\ker f, \operatorname{Im} f$ είναι μη μηδενικοί.

Έστω $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ και $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ είναι βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$ αντίστοιχα. Επειδή για κάθε $i \in [m]$ είναι $\mathbf{y}_i \in \operatorname{Im} f$, θα υπάρχει $\mathbf{z}_i \in V$, με $f(\mathbf{z}_i) = \mathbf{y}_i$.

Αρκεί να δειχθεί ότι το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m\}$ είναι μια βάση του V, αφού τότε θα είναι $\dim V = k + m = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$.

Αρχικά θα δειχθεί ότι $V =< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m >$.

Πράγματι, αν $\mathbf{x} \in V$, τότε $f(\mathbf{x}) \in \operatorname{Im} f$, οπότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in F$, με

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{y}_m \\ &= \lambda_1 f(\mathbf{z}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{z}_2) + \cdots + \lambda_m f(\mathbf{z}_m) \\ &= f(\lambda_1 \mathbf{z}_1 + \lambda_2 \mathbf{z}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{z}_m), \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει ότι

$$f(\mathbf{x} - (\lambda_1 \mathbf{z}_1 + \lambda_2 \mathbf{z}_2 + \lambda_m \mathbf{z}_m)) = f(\mathbf{x}) - f(\lambda_1 \mathbf{z}_1 + \lambda_2 \mathbf{z}_2 + \lambda_m \mathbf{z}_m) = \mathbf{0}$$

και συνεπώς $\mathbf{x} - (\lambda_1 \mathbf{z}_1 + \lambda_2 \mathbf{z}_2 + \lambda_m \mathbf{z}_m) \in \ker f$. Τότε όμως υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \in F$, με

$$\mathbf{x} - (\lambda_1 \mathbf{z}_1 + \lambda_2 \mathbf{z}_2 + \lambda_m \mathbf{z}_m) = \mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k$$

και επομένως

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{z}_1 + \lambda_2 \mathbf{z}_2 + \lambda_m \mathbf{z}_m + \mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k.$$

Άρα, $V =< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m >$.

Τέλος, θα δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in F$, με

$$\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k + \lambda_1 \mathbf{z}_1 + \lambda_2 \mathbf{z}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{z}_m = \mathbf{0}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} f(\mu_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k + \lambda_1 \mathbf{z}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{z}_m) = f(\mathbf{0}) &\Rightarrow f(\mu_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k) + \lambda_1 f(\mathbf{z}_1) + \cdots + \lambda_m f(\mathbf{z}_m) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{0} + \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{y}_m = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0 \end{aligned}$$

οπότε

$$\mu_1 \mathbf{x}_1 + \mu_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = 0.$$

Άρα, τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m$ είναι επιπλέον γραμμικώς ανεξάρτητα, και επομένως αποτελούν μια βάση του V. □

Εφαρμογή 8.2. *Αν $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ είναι δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης, επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, με $\dim V = \dim W$, και $f : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση, τότε η f είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν είναι επιμορφισμός.*

Λύση. Είναι,

$$\begin{aligned} f \text{ μονομορφισμός } &\overset{1}{\Leftrightarrow} \ker f = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(\ker f) = 0 \\ &\overset{2}{\Leftrightarrow} \dim V = \dim(\operatorname{Im} f) \\ &\Leftrightarrow \dim W = \dim(\operatorname{Im} f) \\ &\overset{3}{\Leftrightarrow} V = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f \text{ επιμορφισμός.} \end{aligned}$$

□

Εφαρμογή 8.3. *Έστω $(V, +, \cdot)$ μη μηδενικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, και V_1, V_2 δύο υπόχωροί του. Να αποδειχθεί ο τύπος*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2),$$

ως εφαρμογή της Πρότασης 8.5.

Λύση. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο γινόμενο $(V_1 \times V_2, +, \cdot)$ και την απεικόνιση $f : V_1 \times V_2 \to V$, με

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2.$$

Θα αποδειχθεί ότι η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική, με

$$\operatorname{Im} f = V_1 + V_2 \text{ και } \ker f = \{(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V_1 \cap V_2\}.$$

Πράγματι, για $\lambda, \mu \in F$ και $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in V_1 \times V_2$, είναι

$$\begin{aligned} f(\lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mu(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)) &= f(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{y}_1, \lambda\mathbf{x}_2 + \mu\mathbf{y}_2) \\ &= \lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 + \mu\mathbf{y}_2 \\ &= \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mu(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mu f(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \end{aligned}$$

άρα η f είναι γραμμική.

Επιπλέον, για $\mathbf{y} \in V$, είναι

$$\mathbf{y} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \begin{cases} \text{υπάρχει } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in V_1 \times V_2, \text{ με} \\ \mathbf{y} = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{y} \in V_1 + V_2,$$

οπότε $\operatorname{Im} f = V_1 + V_2$.

Επίσης, για $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in V_1 \times V_2$, είναι

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \ker f \Leftrightarrow f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1 \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \{(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V_1 \cap V_2\}, \end{aligned}$$

οπότε $\ker f = \{(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V_1 \cap V_2\}$.

[1]Σύμφωνα με την Πρόταση 8.1.
[2]Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.5.
[3]Σύμφωνα με την Πρόταση 7.6.

Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι η απεικόνιση $\varphi : V_1 \cap V_2 \to \ker f$, με $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, -\mathbf{x})$ είναι ισομορφισμός. Πράγματι, για $\lambda, \mu \in F$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1 \cap V_2$, είναι

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, -\lambda\mathbf{x} - \mu\mathbf{y})\\ &= (\lambda\mathbf{x}, -\lambda\mathbf{x}) + (\mu\mathbf{y}, -\mu\mathbf{y})\\ &= \lambda(\mathbf{x}, -\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{y}, -\mathbf{y})\\ &= \lambda\varphi(\mathbf{x}) + \mu\varphi(\mathbf{y}),\end{aligned}$$

οπότε η φ είναι γραμμική.

Επιπλέον, η φ είναι $1-1$, αφού

$$\varphi(\mathbf{x}_1) = \varphi(\mathbf{x}_2) \Rightarrow (\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_1) = (\mathbf{x}_2, -\mathbf{x}_2) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2,$$

και είναι επί, αφού για κάθε $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \ker f$ υπάρχει $\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2$, με $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}, -\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$.

Άρα, η φ είναι ισομορφισμός, και επομένως $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(\ker f)$. Κατόπιν τούτων, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 8.5 για την απεικόνιση f, προκύπτει ότι

$$\dim(V_1 \times V_2) = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

και δεδομένου ότι $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$, προκύπτει τελικά ο ζητούμενος τύπος. □

8.7 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 8.1. *Δίνονται οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *και* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *και οι απεικονίσεις*
$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *με*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3), \\ g(x_1, x_2, x_3) &= (x_2 + x_3, 2), \\ h(x_1, x_2, x_3) &= (-x_1 + x_2, x_3^2). \end{aligned}$$

Να αποδειχθεί ότι η f *είναι γραμμική, ενώ οι* g, h *δεν είναι.*

Λύση. Για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, είναι

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) =& f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ =& (x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), 3(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3)) \\ =& (x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3) + (y_1 + 2y_2 - y_3, 3y_1 - y_2 + 2y_3) \\ =& f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x}) &= f(\lambda(x_1, x_2, x_3)) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\ &= (\lambda x_1 + 2\lambda x_2 - \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + 2\lambda x_3) \\ &= \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_2 + 2x_3) = \lambda f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

άρα η f είναι γραμμική.

Επειδή $g(0, 0, 0) = (0, 2) \neq (0, 0)$, προκύπτει ότι η g δεν είναι γραμμική.

Τέλος, επειδή

$$h(-(x_1, x_2, x_3)) = h(-x_1, -x_2, -x_3) = (x_1 - x_2, x_3^2)$$

και

$$-h((x_1, x_2, x_3)) = -(-x_1 + x_2, x_3^2) = (x_1 - x_2, -x_3^2),$$

προκύπτει ότι $h(-(x_1, x_2, x_3)) \neq -h((x_1, x_2, x_3))$, για $x_3 \in \mathbb{R}^*$, και επομένως η h δεν είναι γραμμική. □

Άσκηση 8.2. *Δίνονται οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *και* $(V, +, \cdot)$, *όπου* V *είναι το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο* $[0, 1]$. *Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση* $f : V \to \mathbb{R}$, *με*

$$f(g) = \int_0^1 g(x)dx,$$

είναι γραμμική.

Λύση. Για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $g, h \in V$, είναι

$$\begin{aligned} f(\lambda g + \mu h) &= \int_0^1 (\lambda g + \mu h)(x)dx \\ &= \lambda \int_0^1 g(x)dx + \mu \int_0^1 h(x)dx \\ &= \lambda f(g) + \mu f(h), \end{aligned}$$

οπότε η απεικόνιση f είναι γραμμική. □

Άσκηση 8.3. *Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και το σύνολο*

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Να αποδειχθεί ότι το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, ισόμορφος με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Λύση. Για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in V$, είναι

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) = (\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{y}_1, \lambda\mathbf{x}_2 + \mu\mathbf{y}_2, \lambda\mathbf{x}_3 + \mu\mathbf{y}_3).$$

Όμως, επειδή $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, έχουμε ότι

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 = y_1 + y_2 + y_3 \Rightarrow \lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3) = 0,$$

οπότε, $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in V$, επομένως ο V είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : V \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2).$$

Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική, αφού για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in V$, είναι

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= f(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{y}_1, \lambda\mathbf{x}_2 + \mu\mathbf{y}_2, \lambda\mathbf{x}_3 + \mu\mathbf{y}_3) \\ &= (\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{y}_1, \lambda\mathbf{x}_2 + \mu\mathbf{y}_2) = \lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Επιπλέον, η f είναι επί, διότι, για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, το διάνυσμα $(x_1, x_2, -x_1 - x_2)$ ανήκει στο V (αφού $x_1 + x_2 + (-x_1 - x_2) = 0$) και $f(x_1, x_2, -x_1 - x_2) = (x_1, x_2)$.

Τέλος, θα δειχθεί ότι η f είναι 1-1. Πράγματι, για $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in V$, είναι

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(y_1, y_2, y_3) \Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2. \end{cases}$$

Εξάλλου, επειδή $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$, έπεται ότι $x_3 = -x_1 - x_2 = -y_1 - y_2 = y_3$, οπότε $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ και η f είναι 1-1.

Άρα, η f είναι ισομορφισμός και συνεπώς $V \simeq \mathbb{R}^2$. □

Άσκηση 8.4. *Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\ker f = \{\mathbf{0}\}$. (βλ. Πρόταση 8.1.)*

Λύση. Αρχικά, υποτίθεται ότι η f είναι μονομορφισμός και θα αποδειχθεί ότι $\ker f = \{\mathbf{0}\}$. Προφανώς, επειδή $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, προκύπτει ότι $\{\mathbf{0}\} \subseteq \ker f$. Από την άλλη, αν $\mathbf{x} \in \ker f$, τότε $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, οπότε προκύπτει ότι $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και επομένως $\ker f \subseteq \{\mathbf{0}\}$. Άρα τελικά, $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

Στη συνέχεια, υποτίθεται ότι $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ και θα αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1 (οπότε και μονομορφισμός). Αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$, με $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$, τότε είναι

$$f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker f \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2,$$

άρα η f είναι 1-1. □

Άσκηση 8.5. *Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *και τη γραμμική απεικόνιση*
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *με*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3).$$

Να βρεθούν βάσεις των υποχώρων $\ker f$ *και* $\operatorname{Im} f$.

Λύση. Για $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, είναι

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \in \ker f \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3) = (0, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_2 = x_1 + 2x_3 \Leftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_1 + 2x_3, x_3) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} = x_1(1, 1, 0) + x_2(0, 2, 1) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} \in < (1, 1, 0), (0, 2, 1) > .
\end{aligned}$$

Εξετάζουμε τη γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $(1, 1, 0)$ και $(0, 2, 1)$. Για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 2, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\lambda, \lambda + 2\mu, \mu) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$$

Άρα, τα διανύσματα $(1, 1, 0)$ και $(0, 2, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μία βάση του $\ker f$.

Για $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, είναι $\mathbf{y} \in \operatorname{Im} f$ αν και μόνο αν υπάρχει $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, με $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$. Αλλά,

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) &\Leftrightarrow (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3) = (y_1, y_2, y_3) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = y_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = y_1 = -y_2 = \frac{y_3}{2}.
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων,

$$\mathbf{y} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \mathbf{y} = y_1(1, -1, 2) \Leftrightarrow \mathbf{y} \in < (1, -1, 2) > .$$

Άρα, επειδή το $(1, -1, 2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, θα είναι μία βάση του $\in f$. $\square$

Άσκηση 8.6. *Αν* $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ *είναι δύο διανυσματικοί χώροι επί του σώματος* $(F, +, \cdot)$, *και* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ *είναι μια βάση του* V, *τότε για κάθε* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n \in W$ *υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f : V \to W$, *με* $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, *για κάθε* $i \in [n]$. *(βλ. Πρόταση 8.2.)*

Λύση. Αρχικά, θα εξετασθεί η ύπαρξη της f. Επειδή $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια βάση του V, έπεται ότι, για κάθε $\mathbf{x} \in V$, υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ (οι συντεταγμένες του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση S), με

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $f : V \to W$, με

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{y}_n.$$

Για την απεικόνιση αυτή ισχύει ότι

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_i) &= f(0\mathbf{x}_1 + \cdots + 0\mathbf{x}_{i-1} + 1\mathbf{x}_i + 0\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n) \\ &= 0\mathbf{y}_1 + \cdots + 0\mathbf{y}_{i-1} + 1\mathbf{y}_i + 0\mathbf{y}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{y}_n \\ &= \mathbf{y}_i, \end{aligned}$$

για κάθε $i \in [n]$.

Επιπλέον η f είναι γραμμική. Πράγματι, αν $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in V$, με

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n$$

και

$$\mathbf{z} = \mu_1\mathbf{x}_1 + \mu_1\mathbf{x}_2 + \cdots + \mu_n\mathbf{x}_n,$$

τότε

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{z} = \lambda(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n) + \mu(\mu_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \mu_n\mathbf{x}_n) = (\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)\mathbf{x}_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n + \mu\mu_n)\mathbf{x}_n,$$

δηλαδή τα $\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1, \lambda\lambda_2 + \mu\mu_2, \ldots, \lambda\lambda_n + \mu\mu_n$ είναι οι συντεταγμένες του $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{z}$ ως προς τη βάση S, οπότε

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{z}) =&(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)\mathbf{y}_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n + \mu\mu_n)\mathbf{y}_n \\ =&\lambda(\lambda_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{y}_n) + \mu(\mu_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \mu_n\mathbf{y}_n) \\ =&\lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Τέλος, θα δειχθεί ότι η f είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και μια άλλη γραμμική απεικόνιση $g : V \to W$, με $g(x_i) = y_i = f(x_i)$, για κάθε $i \in [n]$. Τότε, αν $\mathbf{x} \in V$, με

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n,$$

θα είναι

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= g(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n) \\ &= \lambda_1 g(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 g(\mathbf{x}_2) + \cdots + \lambda_n g(\mathbf{x}_n) \\ &= \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{x}_n) \\ &= f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

δηλαδή $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, για κάθε $\mathbf{x} \in V$, οπότε είναι $g = f$. □

Άσκηση 8.7. *Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ και τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, με*

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 4), \quad \mathbf{v}_3 = (2, 1, 1).$$

i) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι μία βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, με

$$f(\mathbf{v}_1) = (1, -3), \quad f(\mathbf{v}_2) = (5, 1), \quad f(\mathbf{v}_3) = (4, 1).$$

Λύση.

i) Για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(-1,2,0) + \lambda_2(1,0,4) + \lambda_3(2,1,1) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (-\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_3, 4\lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και, επειδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, προκύπτει ότι θα αποτελούν μία βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

ii) Αρχικά θα βρεθούν οι συντεταγμένες του οποιουδήποτε διανύσματος $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ως προς τη βάση S. Είναι

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(-1,2,0) + \lambda_2(1,0,4) + \lambda_3(2,1,1) = (-\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_3, 4\lambda_2 + \lambda_3),$$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x_1, \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = x_2, \\ 4\lambda_2 + \lambda_3 = x_3. \end{cases}$$

Επιλύοντας το σύστημα αυτό, προκύπτει ότι

$$\lambda_1 = \tfrac{-4x_1+7x_2+x_3}{18}, \lambda_2 = \tfrac{-2x_1-x_2+5x_3}{18}, \lambda_3 = \tfrac{4x_1+2x_2-x_3}{9}.$$

Κατόπιν τούτων, χρησιμοποιώντας τη γραμμική ιδιότητα της f, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= f(\lambda_1(-1,2,0) + \lambda_2(1,0,4) + \lambda_3(2,1,1)) \\
&= \lambda_1 f(-1,2,0) + \lambda_2 f(1,0,4) + \lambda_3 f(2,1,1) \\
&= \frac{-4x_1 + 7x_2 + x_3}{18}(1,-3) + \frac{-2x_1 - x_2 + 5x_3}{18}(5,1) + \frac{4x_1 + 2x_2 - x_3}{9}(4,1) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 8.8. *Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(P_3, +, \cdot)$ και τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$.*

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \quad \mathbf{v}_2 = (-1,0,1), \quad \mathbf{v}_3 = (0,-1,1).$$

i) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι μία βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \to P_3$, με

$$f(\mathbf{v}_1) = x^3 - 2x, \quad f(\mathbf{v}_2) = x^2 + 2x, \quad f(\mathbf{v}_3) = x^3 + x^2.$$

iii) Να βρεθούν βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.

Λύση. i) Για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(-1,0,1) + \lambda_3(0,-1,1) = (0,0,0)\\ &\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 - \lambda_2 = 0\\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.\end{aligned}$$

Άρα τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και, επειδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, προκύπτει ότι θα αποτελούν μία βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

ii) Αρχικά θα βρεθούν οι συντεταγμένες του οποιουδήποτε διανύσματος $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ως προς τη βάση S. Είναι

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(-1,0,1) + \lambda_3(0,-1,1) = (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases}\lambda_1 - \lambda_2 = x_1,\\ \lambda_1 - \lambda_3 = x_2,\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_3.\end{cases}$$

Επιλύοντας το σύστημα αυτό, προκύπτει ότι

$$\lambda_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \lambda_2 = \frac{-2x_1 + x_2 + x_3}{3}, \lambda_3 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{3}.$$

Κατόπιν τούτων, χρησιμοποιώντας τη γραμμική ιδιότητα της f, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= f(\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(-1,0,1) + \lambda_3(0,-1,1))\\ &= \lambda_1 f(1,1,1) + \lambda_2 f(-1,0,1) + \lambda_3 f(0,-1,1)\\ &= \lambda_1(x^3 - 2x) + \lambda_2(x^2 + 2x) + \lambda_3(x^3 + x^2)\\ &= (\lambda_1 + \lambda_3)x^3 + (\lambda_2 + \lambda_3)x^2 + 2(\lambda_2 - \lambda_1)x\\ &= \frac{2x_1 + 2x_3 - x_2}{3}x^3 + \frac{2x_3 - x_1 - x_2}{3}x^2 - 2x_1 x.\end{aligned}$$

iii) Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in \ker f \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \frac{2x_1 + 2x_3 - x_2}{3}x^3 + \frac{2x_3 - x_1 - x_2}{3}x^2 - 2x_1 x = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2x_1 + 2x_3 - x_2 = 0\\ 2x_3 - x_1 - x_2 = 0\\ x_1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 0\\ x_2 = 2x_3\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = (0, 2x_3, x_3) = x_3(0,2,1).\end{aligned}$$

Άρα, το σύνολο $\{(0,2,1)\}$ είναι μία βάση του $\ker f$.

Επειδή $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >= \mathbb{R}^3$, έπεται, σύμφωνα με την Πρόταση 8.3.iii), ότι

$$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^3) =< f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), f(\mathbf{v}_3) >=< x^3, 2x, x^2 + 2x, x^3 + 2x >=< x^3 - 2x, x^2 + 2x >,$$

αφού $x^3 + x^2 = (x^3 - 2x) + (x^2 + 2x)$.

Επιπλέον, τα πολυώνυμα $x^3 - 2x$ και $x^2 + 2x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι

$$\lambda(x^3 - 2x) + \mu(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \lambda x^3 + \mu x^2 + 2(\mu - \lambda)x = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Άρα, το σύνολο $\{x^3 - 2x, x^2 + 2x\}$ είναι μια βάση του $\operatorname{Im} f$. □

Άσκηση 8.9. *Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *και* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *και τα διανύσματα* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^4$, *με*

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1),$$

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, 2), \quad \mathbf{u}_2 = (2, -1, 0, 1).$$

i) Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, *με* $\ker f =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$.

ii) Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, *με* $\operatorname{Im} f =< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$.

Λύση. i) Θα βρεθεί μια βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, η οποία να περιέχει τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (τέτοια βάση υπάρχει, διότι τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα). Για το σκοπό αυτό, επιλέγεται το διάνυσμα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, και θα δειχθεί ότι τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πράγματι, για $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned} \kappa\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \kappa(1, 0, 0) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \kappa = \lambda = \mu = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και επειδή $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, θα αποτελούν βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.2, θα υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, με

$$f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2) = (0, 0, 0, 0) \text{ και } f(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 0, 0).$$

Θα δειχθεί ότι $\ker f =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$. Πράγματι, αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, τότε υπάρχουν $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, με $\mathbf{x} = \kappa\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \ker f &\Leftrightarrow f(\kappa\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \kappa f(\mathbf{e}_1) + \lambda f(\mathbf{v}_1) + \mu f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \kappa(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \kappa = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >, \end{aligned}$$

άρα $\ker f =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$.

ii) Θεωρούμε την κανονική βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με την Πρόταση 8.2, θα υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, με

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_2, \quad f(\mathbf{e}_3) = (0, 0, 0, 0).$$

Ο τύπος της f θα είναι

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + x_3 f(\mathbf{e}_3) \\ &= x_1(1, 0, -1, 2) + x_2(2, -1, 0, 1) + x_3(0, 0, 0, 0) \\ &= x_1(x_1 + 2x_1, -x_2 - x_1, x_2 + 2x_1). \end{aligned}$$

Επειδή $\mathbb{R}^3 =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$, από την Πρόταση 8.3.iii) προκύπτει ότι

$$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^3) =< f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3) >=< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, (0, 0, 0, 0) >=< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 > . \qquad \square$$

Άσκηση 8.10. *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. *Να εξεταστεί αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *με* $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Λύση. Αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με $\ker f = \operatorname{Im} f$, θα πρέπει να ισχύει

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim(\ker f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 2\dim(\ker f),$$

οπότε n άρτιος. Άρα, για n περιττό, δεν υπάρχει τέτοια απεικόνιση.

Αν $n = 2k$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$ (δηλαδή n άρτιος), τότε θα πρέπει να είναι

$$\dim(\ker f) = \dim(\operatorname{Im} f) = k.$$

Έστω $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{2k}\}$ η κανονική βάση του $(\mathbb{R}^{2k}, +, \cdot)$. Αρκεί να κατασκευαστεί η γραμμική απεικόνιση f ώστε

$$\ker f =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k >= \operatorname{Im} f \tag{8.1}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.2, θα υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k}$, με

$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad f(\mathbf{e}_i + k) = \mathbf{e}_i, \quad \text{για κάθε } i \in [k].$$

Ο τύπος της f είναι

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) =& f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_{2k}\mathbf{e}_{2k}) \\ =& x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_{2k} f(\mathbf{e}_{2k}) \\ =& x_{k+1} f(\mathbf{e}_{k+1}) + x_{k+2} f(\mathbf{e}_{k+2}) + \cdots + x_{2k} f(\mathbf{e}_{2k}) \\ =& x_{k+1}\mathbf{e}_1 + x_{k+2}\mathbf{e}_2 + \cdots + x_{2k}\mathbf{e}_k \\ =& (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{2k}, 0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Θα αποδειχθεί η σχέση (8.1).

Για $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \in \mathbb{R}^{2k}$, είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \ker f \Leftrightarrow& f(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = (0, 0, \dots, 0) \\ \Leftrightarrow& (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{2k}, 0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0) \\ \Leftrightarrow& x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{2k} = 0 \\ \Leftrightarrow& \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0) \\ \Leftrightarrow& \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_k\mathbf{e}_k \\ \Leftrightarrow& \mathbf{x} \in< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k >, \end{aligned}$$

άρα, $\ker f =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k >$.

Επιπλέον, για $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \in \mathbb{R}^{2k}$, είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow& \begin{cases} \text{υπάρχει } (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \in \mathbb{R}^{2k}, \text{με} \\ f(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow& \begin{cases} \text{υπάρχει } (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \in \mathbb{R}^{2k}, \text{με} \\ (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{2k}, 0, \dots, 0) = (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow& \begin{cases} \text{υπάρχει } (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \in \mathbb{R}^{2k}, \text{με} \\ y_i = x_{k+i} \text{ και } = y_{i+k} = 0, \text{ για κάθε } i \in [k] \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbf{y} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_k\mathbf{e}_k \Leftrightarrow \mathbf{y} \in< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k >,$$

άρα, $\operatorname{Im} f =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k >$. □

8.8 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, και οι απεικονίσεις:

   i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, με $f_1(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2 + x_3)$.

   ii) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, με $f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, |x_1| + |x_2|)$.

   iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, με $f_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 1, x_2 - x_1)$.

   iv) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, με $f_4(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1^2 + x_2^2, x_1 + x_2)$.

   v) $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, με $f_5(x_1, x_2) = (3x_1+4x_2, 2x_1-x_2, x_1+3x_2)$.

   Να εξεταστεί ποιές από τις παραπάνω απεικονίσεις είναι γραμμικές.

2. Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(P_n, +, \cdot)$ και $(P_{n+1}, +, \cdot)$, των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμού μικρότερο ίσο του n και μικρότερο ίσο του $n + 1$ αντίστοιχα. Να εξεταστεί ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές:

   i) $f_1 : P_n \to P_{n+1}$, με $f_1(p(x)) = xp(x)$.

   ii) $f_2 : P_n \to P_{n+1}$, με $f_2(p(x)) = xp(x)+x$.

   iii) $f_3 : P_n \to P_{n+1}$, με $f_3(p(x)) = \int_0^x p(t)dt$.

   iv) $f_4 : P_{n+1} \to P_n$, με $f_4(p(x)) = p'(x)$.

3. Έστω V το σύνολο όλων των συγκλινουσών πραγματικών ακολουθιών με τις συνήθεις πράξεις:

   $$(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n) \quad \text{και} \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n).$$

   Να αποδειχθεί ότι η δομή $(V, +, \cdot)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και ότι η απεικόνιση $f : V \to \mathbb{R}$, με

   $$f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

   είναι γραμμική.

4. Έστω $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$, $(H, +, \cdot)$ τρεις διανυσματικοί χώροι επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και οι γραμμικές απεικονίσεις $f : V \to W$ και $g : W \to H$. Να αποδειχθεί ότι η σύνθεση $g \circ f$ είναι γραμμική απεικόνιση.

5. Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, και οι απεικονίσεις:

   i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3)$.

   ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, με $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3)$.

   iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$.

   iv) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3)$.

   Να εξεταστεί ποιές από τις παραπάνω απεικονίσεις είναι μονομορφισμοί, επιμορφισμοί και ισομορφισμοί.

6. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και το υποσύνολό του

   $$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

   Να αποδειχθεί ότι το V είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και ότι είναι ισόμορφος με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

7. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ και το υποσύνολό του

   $$V = \{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

   Να αποδειχθεί ότι το V είναι υπόχωρος του $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ και ότι είναι ισόμορφος με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

8. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(P_{n+1}, +, \cdot)$, των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμού μικρότερου ή ίσου με $n + 1$ και έστω V το υποσύνολο του P_{n+1}, το οποίο αποτελείται από τα πολυώνυμα που δεν έχουν σταθερό όρο. Να αποδειχθεί ότι το V είναι υπόχωρος του P_{n+1} και ότι η απεικόνιση $f : V \to P_n$, με $f(p) = p'$ είναι ισομορφισμός.

9. Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και την απεικόνιση $f : \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}^3$, με

   $$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c, b+c-d, c+d-a).$$

   i) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική.

ii) Να βρεθούν τα $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$ και στη συνέχεια να εξεταστεί αν η f είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός.

10. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 + 2x_2 + x_3, 6x_1 - 4x_2 - 2x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3).$$

Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική και να βρεθούν βάσεις των υποχώρων $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.

11. Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 2, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και στη συνέχεια να βρεθεί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, με

$$f(\mathbf{v}_1) = (2, 1, -1, 0),$$
$$f(\mathbf{v}_2) = (1, -3, 2, 1),$$
$$f(\mathbf{v}_3) = (3, 0, 0, 0).$$

12. Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Να εξετασθεί αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με

$$f(1, 1) = (-1, 2), \quad f(-1, 1) = (2, -1)$$

13. Να αποδειχθεί η Πρόταση 8.3.

14. Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ και τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -4, 0, 3).$$

Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, με $\operatorname{Im} f =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$. Είναι η f μοναδική;

15. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ και τον υπόχωρό του

$$V = \{\begin{bmatrix} a & a \\ b & -b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

i) Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$, με $\operatorname{Im} f = V$.

ii) Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$, με $\ker f = V$.

16. Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(P_3, +, \cdot)$ και τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, με

$$\mathbf{v}_1 = (2, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (2, 1, 0).$$

i) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι μία βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \to P_3$, με

$$f(\mathbf{v}_1) = 3x^3 + 2x^2,$$
$$f(\mathbf{v}_2) = x^3 - 2x,$$
$$f(\mathbf{v}_3) = x^2 + 3x.$$

iii) Να βρεθούν βάσεις των $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$.

17. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(P_n, +, \cdot)$, των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμού μικρότερου ή ίσου με n. Να εξεταστεί αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : P_n \to P_n$, με $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Κεφάλαιο 9

Μήτρες και γραμμικές απεικονίσεις

9.1 Μήτρα στήλη διανύσματος

Έστω $(V, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ με $\dim V = n$.

Κάθε διατεταγμένη n-άδα που αποτελείται από τα στοιχεία μιας βάσης του διανυσματικού χώρου ονομάζεται **διατεταγμένη βάση** του $(V, +, \cdot)$.

Παράδειγμα: Οι διατεταγμένες τριάδες $(1, x, x^2)$ και $(x, 1, x^2)$ είναι δυο διαφορετικές διατεταγμένες βάσεις του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{P}_2, +, \cdot)$.

Προφανώς σε κάθε βάση S ενός διανυσματικού χώρου διάστασης n αντιστοιχούν $n!$ το πλήθος διαφορετικές διατεταγμένες βάσεις του διανυσματικού χώρου οι οποίες προκύπτουν δια μεταθέσεως των στοιχείων της S.

Έστω $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ μια διατεταγμένη βάση του $(V, +, \cdot)$. Τότε για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in V$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ με $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$.

Η μήτρα

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **μήτρα στήλη του v ως προς την διατεταγμένη βάση** S και συμβολίζεται με $[\mathbf{v}]_S$, δηλαδή

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n.$$

Παράδειγμα. *Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και οι διατεταγμένες βάσεις του $S = (\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_2)$ και $T = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)$, Αν $\mathbf{v} = (1, 3, 4)$ να βρεθούν οι μήτρες $[\mathbf{v}]_S$ και $[\mathbf{v}]_T$.*

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2(2\mathbf{e}_3) + \lambda_3(-\mathbf{e}_2) &\Leftrightarrow \\ (1, 3, 4) = \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 2) + \lambda_3(0, -1, 0) &\Leftrightarrow \\ (1, 3, 4) = (\lambda_1, -\lambda_3, 2\lambda_2) &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

οπότε

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{e}_1 + 2(2\mathbf{e}_3) - 3(-\mathbf{e}_2) \Leftrightarrow [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ανάλογα,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mu_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \mu_2\mathbf{e}_1 + \mu_3(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) &\Leftrightarrow \\ (1,3,4) = \mu_1(1,1,0) + \mu_2(1,0,0) + \mu_3(0,-1,1) &\Leftrightarrow \\ (1,3,4) = (\mu_1 + \mu_2, \mu_1 - \mu_3, \mu_3) &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 1 \\ \mu_1 - \mu_3 = 3 \\ \mu_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 7 \\ \mu_2 = -6 \\ \mu_3 = 4 \end{cases}$$

οπότε

$$\mathbf{v} = 7(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - 6\mathbf{e}_1 + 4(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2) \Leftrightarrow [\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$ □

9.2 Μήτρα γραμμικής απεικόνισης

Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ με διατεταγμένες βάσεις $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ και $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ αντίστοιχα, και $f : V \to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Αν τεθεί

$$[f(\mathbf{v}_j)]_T = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \ j \in [n],$$

τότε η $m \times n$ μήτρα $A = [a_{ij}]$, $i \in [m]$, $j \in [n]$ που προκύπτει, ονομάζεται **μήτρα της γραμμικής απεικόνισης** f **ως προς τις διατεταγμένες βάσεις** S **και** T και συμβολίζεται με $[f, S, T]$.

Δηλαδή ισχύει ότι

$$\begin{aligned} [f, S, T] = [a_{ij}] \Leftrightarrow [f(\mathbf{v}_j)]_T &= \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \forall j \in [n] \\ &\Leftrightarrow f(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m, \forall j \in [n]. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, η μήτρα $[f, S, T]$ είναι η $m \times n$ μήτρα της οποίας για κάθε $j \in [n]$ η j στήλη της ισούται με την m-άδα των συντελεστών του διανύσματος $f(\mathbf{v}_j)$ ως προς τη βάση T.

Παρατηρήσεις:

1. Για τη μηδενική απεικόνιση $\mathbf{0} : V \to W$ ισχύει ότι
$$[\mathbf{0}, S, T] = \mathbb{O}_{m\times n},$$
όπου $\mathbb{O}_{m\times n}$ είναι η μηδενική $m \times n$ μήτρα.
2. Για την ταυτοτική απεικόνιση $\mathbf{1}_V$ ισχύει ότι
$$[\mathbf{1}_V, S, S] = I_n,$$
όπου I_n είναι η μοναδιαία τετραγωνική μήτρα.
3. Αν $f, g : V \to W$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις τότε ισχύει ότι
$$[f, S, T] = [g, S, T] \Leftrightarrow f = g.$$

Παράδειγμα. *Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με*
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1, x_1 - 3x_2).$$
Να βρεθεί η μήτρα $[f, S, T]$ όταν

(i) $S = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *και* $T = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$,

(ii) $S = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ *και* $T = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$,

(iii) $S = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *και* $T = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_2)$,

όπου $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{e}'_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}'_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}'_3 = (0, 0, 1)$.

Λύση. Είναι
$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= f(1,0) = (1,2,1) \\ &= (1,0,0) + 2(0,1,0) + (0,0,1) \\ &= \mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 \end{aligned}$$
και
$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_2) &= f(0,1) = (1,0,-3) \\ &= (1,0,0) + (0,0,-3) \\ &= \mathbf{e}'_1 - 3\mathbf{e}'_3, \end{aligned}$$
οπότε είναι

(i) $[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$

(ii) $[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$

(iii) $[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$ □

Παράδειγμα. *Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ με*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_1 + 2x_2 - x_3)$$

και οι διατεταγμένες βάσεις $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ και $W = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ των $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ αντίστοιχα, με $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 3)$, $\mathbf{w}_1 = (1, -1)$ και $\mathbf{w}_2 = (2, 1)$. Να βρεθεί η μήτρα $[f, S, T]$.

Λύση. Αρχικά βρίσκουμε τα $f(\mathbf{v}_1)$, $f(\mathbf{v}_2)$ και $f(\mathbf{v}_3)$.

Είναι

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= f(-1, 1, 1) = (-1 - 1 + 2, -3 + 2 - 1) = (0, -2), \\ f(\mathbf{v}_2) &= f(2, 1, 0) = (2 - 1, 6 + 2) = (1, 8), \\ f(\mathbf{v}_3) &= f(1, 0, 3) = (1 + 6, 3 - 3) = (7, 0). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να βρούμε τους συντελεστές των παραπάνω τριών διανυσμάτων ως προς τη βάση T, εκφράζουμε το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{w} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης T.

Πράγματι, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 &\Leftrightarrow (a, b) = \lambda_1(1, -1) + \lambda_2(2, 1) \\ &\Leftrightarrow (a, b) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{a-2b}{3} \\ \lambda_2 = \frac{a+b}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$(a, b) = \frac{a - 2b}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{a + b}{3}\mathbf{w}_2.$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για τα $f(\mathbf{v}_1)$, $f(\mathbf{v}_2)$ και $f(\mathbf{v}_3)$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= (0, -2) = \frac{4}{3}\mathbf{w}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{w}_2, \\ f(\mathbf{v}_2) &= (1, 8) = -5\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2, \\ f(\mathbf{v}_3) &= (7, 0) = \frac{7}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{7}{3}\mathbf{w}_2. \end{aligned}$$

Άρα

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -5 & \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} & 3 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

□

Παράδειγμα. *Θεωρούμε τους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους $(\mathcal{P}_3, +, \cdot)$ και $(\mathcal{P}_2, +, \cdot)$ και τις διατεταγμένες βάσεις τους $S = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ και $T = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ αντίστοιχα, όπου $\mathbf{p}_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Αν $f : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ με $f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ να βρεθεί η μήτρα $[f, S, T]$.*

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}_0) &= 1' = 0 = 0\mathbf{p}_0 + 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2, \\ f(\mathbf{p}_1) &= x' = 1 = 1\mathbf{p}_0 + 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2, \\ f(\mathbf{p}_2) &= (x^2)' = 2x = 0\mathbf{p}_0 + 2\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2, \\ f(\mathbf{p}_3) &= (x^3)' = 3x^2 = 0\mathbf{p}_0 + 0\mathbf{p}_1 + 3\mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

Άρα,

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Πρόταση 9.1. *Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ με διατεταγμένες βάσεις $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ και $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ αντίστοιχα, και $f : V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Τότε, ισχύει ότι*

$$[f(\mathbf{v})]_T = [f, S, T][\mathbf{v}]_S$$

για κάθε $\mathbf{v} \in V$.

Απόδειξη. Έστω $[f, S, T] = [a_{ij}]$, όπου $j \in [n]$, $i \in [m]$ και $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$.

Τότε, ισχύουν οι σχέσεις

$$f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,$$

για κάθε $j \in [n]$ και $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j$.

Κατόπιν τούτων είναι

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{w}_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} \right) \mathbf{w}_i.$$

Άρα,

$$[f(\mathbf{v})]_T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_n a_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \cdots + \lambda_n a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = [f, S, T][\mathbf{v}]_S \square$$

Παρατήρηση: Η μήτρα $[f, S, T]$ είναι η μοναδική μήτρα για την οποία ισχύει η σχέση της προηγούμενης πρότασης.

Πράγματι, αν $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ με

$$[f(\mathbf{v})]_T = A[\mathbf{v}]_S \text{ και } [f(\mathbf{v})]_T = B[\mathbf{v}]_S$$

για κάθε $\mathbf{v} \in V$, θα ισχύει ότι

$$A[\mathbf{v}]_S = B[\mathbf{v}]_S$$

για κάθε $\mathbf{v} \in V$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ισότητα για $\mathbf{v} = \mathbf{v}_j$, $j \in [n]$ προκύπτει ότι

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \vdots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου η μήτρα στήλη της παραπάνω ισότητας έχει σε όλες τις θέσεις 0 εκτός από την j θέση όπου έχει 1.

Κατόπιν τούτων για κάθε $j \in [n]$ είναι

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$$

Άρα, $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i \in [m]$ και $j \in [n]$ και τελικά $A = B$.

Πρόταση 9.2. *Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ με διατεταγμένες βάσεις $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ και $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ αντίστοιχα.*

Αν $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ με $[f, S, T] = A$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\mathbf{u}_j = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m$$

για κάθε $j \in [n]$.

Επειδή $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι μια βάση του $(V, +, \cdot)$ και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in W$, τότε (ως γνωστόν) θα υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ με $f(\mathbf{v}_j) = \mathbf{u}_j$ για κάθε $j \in [n]$.

Άρα θα ισχύει ότι

$$f(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m$$

για κάθε $j \in [n]$, και επομένως σύμφωνα με τον ορισμό της μήτρας γραμμικής απεικόνισης θα είναι $[f, S, T] = A$. □

Εφαρμογή 9.1. *Δίδονται οι διατεταγμένες βάσεις $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ και $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ των διανυσματικών χώρων $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ αντίστοιχα, όπου $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{w}_1 = (1, 1)$ και $\mathbf{w}_2 = (-1, 0)$. Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με*

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Ορίζουμε $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ με

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= 1\mathbf{w}_1 + (-2)\mathbf{w}_2 = (1, 1) - 2(-1, 0) = (3, 1) \\ \mathbf{u}_2 &= 0\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 = 4(-1, 0) = (-4, 0) \\ \mathbf{u}_3 &= -3\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 = -3(1, 1) = (-3, -3). \end{aligned}$$

Επειδή $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι μια βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbf{R}^2$ θα υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{u}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_2, f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_3.$$

Κατόπιν τούτων

$$[f(\mathbf{v}_1)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, [f(\mathbf{v}_2)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, [f(\mathbf{v}_3)]_T = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

οπότε σύμφωνα με τον ορισμό της μήτρας γραμμικής απεικόνισης προκύπτει ότι

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Προκειμένου να βρεθεί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης f, αρχικά θα εκφρασθεί το τυχαίο διάνυσμα $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Είναι

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 \\ &= \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(-1, 2, 0) + \lambda_3(2, 3, -1) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3),\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 & = x_1 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = x_2 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = \frac{2x_1 + x_2 + 7x_3}{9} \\ \lambda_2 & = \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \lambda_3 & = \frac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{9} \end{cases}$$

Άρα,

$$(x_1, x_2, x_3) = \\ \frac{2x_1 + x_2 + 7x_3}{9}\mathbf{v}_1 + \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{3}\mathbf{v}_2 + \frac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{9}\mathbf{v}_3$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{2x_1 + x_2 + 7x_3}{9}f(\mathbf{v}_1) + \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{3}f(\mathbf{v}_2) + \frac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{9}f(\mathbf{v}_3) \\ &= \frac{2x_1 + x_2 + 7x_3}{9}(3, 1) + \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{3}(-4, 0) + \frac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{9}(-3, -3) \\ &= (\frac{4x_1 - 4x_2 + 5x_3}{3}, \frac{-4x_1 - 2x_2 + 13x_3}{9}).\end{aligned}$$

□

Πρόταση 9.3. *Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ με διατεταγμένες βάσεις $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ και $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ αντίστοιχα.*

Αν $f, g : V \to W$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις και $\lambda, \mu \in F$, τότε ισχύει ότι

$$[\lambda f + \mu g, S, T] = \lambda[f, S, T] + \mu[g, S, T].$$

Απόδειξη. Αν τεθούν $[f, S, T] = [a_{ij}]$ και $[g, S, T] = [b_{ij}]$, όπου $i \in [m]$ και $j \in [n]$, τότε από τον ορισμό της μήτρας της γραμμικής απεικόνισης προκύπτει ότι

$$f(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m$$

και

$$g(\mathbf{v}_j) = b_{1j}\mathbf{w}_1 + b_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + b_{mj}\mathbf{w}_m,$$

για κάθε $j \in [n]$.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(\mathbf{v}_j) &= \lambda f(\mathbf{v}_j) + \mu g(\mathbf{v}_j)\\ &= \lambda(a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m) + \mu(b_{1j}\mathbf{w}_1 + b_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + b_{mj}\mathbf{w}_m),\end{aligned}$$

για $j \in [n]$.

Οπότε

$$[\lambda f + \mu g, S, T] = [\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}] = \lambda[f, S, T] + \mu[g, S, T]$$

□

Πρόταση 9.4. *Έστω τρεις διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ και $(U, +, \cdot)$ επί του σώματος F με διατεταγμένες βάσεις $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$, $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ και $R = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p)$ αντίστοιχα.*

Αν $f : V \to W$ και $g : W \to U$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε ισχύει ότι

$$[g \circ f, S, R] = [g, T, R][f, S, T].$$

Απόδειξη. Αν τεθούν $[f, S, T] = [a_{ij}]$ και $[g, T, R] = [b_{ki}]$, όπου $k \in [p]$, $i \in [m]$ και $j \in [n]$, τότε από τον ορισμό της μήτρας της γραμμικής απεικόνισης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}f(\mathbf{v}_j) &= a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m\\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{w}_i \qquad (9.1)\end{aligned}$$

για κάθε $j \in [n]$ και

$$\begin{aligned}g(\mathbf{w}_i) &= b_{1i}\mathbf{u}_1 + b_{2i}\mathbf{u}_2 + \cdots + b_{pj}\mathbf{u}_p\\ &= \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathbf{u}_k \qquad (9.2)\end{aligned}$$

για κάθε $i \in [m]$.

Αν επιπλέον τεθεί

$$[c_{kj}] = [g, T, R][f, S, T] = [b_{ki}][a_{ij}],$$

τότε από τον ορισμό του γινομένου των μητρών προκύπτει ότι

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}, \qquad (9.3)$$

για κάθε $j \in [n]$, $k \in [p]$.

Από τις σχέσεις (9.1) και (9.2), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\mathbf{v}_j) = g(f(\mathbf{v}_j)) = g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{w}_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g(\mathbf{w}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathbf{u}_k\\ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} b_{ki}a_{ij}\mathbf{u}_k &= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\right)\mathbf{u}_k \overset{(9.3)}{=} \sum_{k=1}^{p} c_{kj}\mathbf{u}_k.\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, από τον ορισμό της μήτρας γραμμικής απεικόνισης, προκύπτει ότι

$$[g \circ f, S, R] = [c_{kj}] = [b_{ki}][a_{ij}].$$

□

Πρόταση 9.5. *Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ με $\dim V = \dim W = n$.*

Αν $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ και $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ είναι δύο διατεταγμένες βάσεις των $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ αντίστοιχα, και $f : V \to W$ γραμμική απεικόνιση, τότε η f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν η μήτρα $[f, S, T]$ είναι αντιστρέψιμη.

Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι

$$[f, S, T]^{-1} = [f^{-1}, T, S].$$

Απόδειξη. Αν υποτεθεί ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομορφισμός, τότε από την Πρόταση 9.2 προκύπτει ότι

$$I_n = [1_V, S, S] = [f^{-1} \circ f, S, S] = [f^{-1}, T, S][f, S, T]$$

και

$$I_n = [1_W, T, T] = [f \circ f^{-1}, T, T] = [f, S, T][f^{-1}, T, S].$$

Άρα,

$$[f^{-1}, T, S][f, S, T] = [f, S, T][f^{-1}, T, S] = I_n$$

από όπου προκύπτει ότι η μήτρα $[f, S, T]$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει ότι $[f, S, T]^{-1} = [f^{-1}, T, S]$.

Αντίστροφα, αν υποτεθεί ότι η μήτρα $[f, S, T]$ είναι αντιστρέψιμη, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2, θα υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $g : W \to V$ με

$$[g, T, S] = [f, S, T]^{-1}.$$

Τότε όμως, από την Πρόταση 9.4, προκύπτει ότι

$$[g \circ f, S, S] = [g, T, S][f, S, T] = [f, S, T]^{-1}[f, S, T] = I_n = [1_V, S, S]$$

και

$$\begin{aligned} [f \circ g, T, T] &= [f, S, T][g, T, S] \\ &= [f, S, T][f, S, T]^{-1} \\ &= I_n = [1_W, T, T]. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$g \circ f = 1_V \quad \text{και} \quad f \circ g = 1_W$$

και επομένως η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομορφισμός. □

Εφαρμογή 9.2. *Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, τις διατεταγμένες βάσεις του $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ και $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, με*

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 2), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{w}_2 = (1, 0, 1), \mathbf{w}_3 = (-1, 2, 0)$$

και τις γραμμικές απεικονίσεις $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2, x_1 + x_3)$$

και

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2, x_2 - 2x_3)$$

i) *Να βρεθούν οι μήτρες* $[f, S, T]$ *και* $[g, T, S]$.

ii) *Να εξετασθεί αν οι γραμμικές απεικονίσεις* f, g *είναι ισομορφισμοί.*

iii) *Να βρεθούν οι μήτρες*

$$[g \circ f, S, S] \text{ και } [f \circ g, T, T].$$

Λύση.

i) Αρχικά θα βρεθούν οι συντεταγμένες του τυχαίου διανύσματος $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ως προς τις διατεταγμένες βάσεις T και S.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(a, b, c) = \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \lambda_3 \mathbf{w}_3 &\Leftrightarrow (a, b, c) = \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 1) + \lambda_3(-1, 2, 0) \\
&\Leftrightarrow (a, b, c) = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_3, \lambda_2) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = a \\ 2\lambda_3 = b \\ \lambda_2 = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a + \frac{b}{2} - c \\ \lambda_2 = c \\ \lambda_3 = \frac{b}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Άρα,

$$(a, b, c) = (a + \frac{b}{2} - c)\mathbf{w}_1 + c\mathbf{w}_2 + \frac{b}{2}\mathbf{w}_3. \tag{9.4}$$

Ανάλογα,

$$\begin{aligned}
(a, b, c) = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mu_3 \mathbf{v}_3 &\Leftrightarrow (a, b, c) = \mu_1(1, -1, 0) + \mu_2(1, 0, 2) + \mu_3(0, 0, 1) \\
&\Leftrightarrow (a, b, c) = (\mu_1 + \mu_2, -\mu_1, 2\mu_2 + \mu_3) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = a \\ -\mu_1 = b \\ 2\mu_2 + \mu_3 = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = -b \\ \mu_2 = a + b \\ \mu_3 = c - 2a - 2b. \end{cases}
\end{aligned}$$

Άρα,

$$(a, b, c) = b\mathbf{v}_1 + (a + b)\mathbf{v}_2 + (c - 2a - 2b)\mathbf{v}_3. \tag{9.5}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (9.4) για τα διανύσματα $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), f(\mathbf{v}_3)$, προκύπτει ότι

$$f(\mathbf{v}_1) = (2, -1, 1) = \frac{1}{2}\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}_3,$$

$$f(\mathbf{v}_2) = (1, 0, 3) = -2\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2$$

και

$$f(\mathbf{v}_3) = (0, 0, 1) = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

Άρα,

$$[f,S,T]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -2 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Ανάλογα, εφαρμόζοντας τη σχέση (9.5) για τα διανύσματα $g(\mathbf{w}_1), g(\mathbf{w}_2), g(\mathbf{w}_3)$, προκύπτει ότι

$$g(\mathbf{w}_1)=(1,1,0)=-\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2-4\mathbf{v}_3,$$

$$g(\mathbf{w}_2)=(3,1,-2)=-\mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2-10\mathbf{v}_3$$

και

$$g(\mathbf{w}_3)=(-1,1,2)=-\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_3.$$

Άρα,

$$[g,T,S]=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 0\\ -4 & -10 & 2\end{bmatrix}.$$

ii) Επειδή,

$$|[f,S,T]|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -2 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

έπεται ότι η μήτρα $[f,S,T]$ είναι αντιστρέψιμη, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 9.5 η απεικόνιση f είναι ισομορφισμός.

Επειδή,

$$|[g,B,S]|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 0\\ -4 & -10 & 2\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}2 & 4\\ -4 & -10\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=(-1)(-4)+2(-2)=0,$$

έπεται ότι η μήτρα $[g,B,S]$ δεν είναι αντιστρέψιμη, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 9.5 η απεικόνιση g δεν είναι ισομορφισμός.

iii) Από την Πρόταση 9.4 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}[g\circ f,S,S]&=[g,T,S][f,S,T]\\ &=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 0\\ -4 & -10 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -2 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 5 & 8 & 2\\ -13 & -22 & -6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}[f\circ g,T,T]&=[f,S,T][g,T,S]\\ &=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -2 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 0\\ -4 & -10 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -5\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\end{aligned}$$ □

9.3 Μήτρα αλλαγής βάσης

Έστω διανυσματικός χώρος $(V,+,\cdot)$ επί του σώματος $(F,+,\cdot)$ και $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$, $S' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_n)$ δύο διατεταγμένες βάσεις του.

Ζητείται να βρεθεί ένας τύπος για τον υπολογισμό των συντεταγμένων οποιουδήποτε διανύσματος $\mathbf{v} \in V$ ως προς τη βάση S' όταν δίδονται οι συντεταγμένες του $\mathbf{v}$ ως προς τη βάση S.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την τετραγωνική μήτρα $P = [a_{ij}]$, $i, j \in [n]$, που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{v}'_1 + a_{2j}\mathbf{v}'_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{v}'_n, \;\; j \in [n],$$

η οποία ονομάζεται **μήτρα αλλαγής βάσης** (ή **μήτρα μετάβασης**) από τη βάση S στη βάση S'.

Με άλλα λόγια ισχύει ότι

$$[\mathbf{v}_j]_{S'} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

για κάθε $j \in [n]$, ή ισοδύναμα

$$P = [1_V, S, S'].$$

Κατόπιν τούτου δια εφαρμογής της Πρότασης 9.1 για τη γραμμική απεικόνιση 1_V προκύπτει η πρόταση

Πρόταση 9.6. *Έστω $(V,+,\cdot)$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $(F,+,\cdot)$, S, S' δύο διατεταγμένες βάσεις του και P η μήτρα αλλαγής βάσης από τη βάση S στη βάση S'. Τότε ισχύει ότι*

$$[\mathbf{v}]_{S'} = P[\mathbf{v}]_S.$$

Παρατήρηση: Επειδή σύμφωνα με τη Πρόταση 9.5 ισχύει ότι

$$[1_V, S', S] = [1_V, S, S']^{-1},$$

προκύπτει ότι η μήτρα αλλαγής βάσης από τη βάση S' στη βάση S είναι η αντίστροφη της μήτρας αλλαγής βάσης από τη βάση S στη βάση S'.

Παράδειγμα. *Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ και τις διατεταγμένες βάσεις του $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ και $S' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3)$ με $\mathbf{v}_1 = (-1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,0,2)$, $\mathbf{v}'_1 = (1,2,1)$, $\mathbf{v}'_2 = (-1,0,3)$ και $\mathbf{v}'_3 = (0,0,1)$.*

i) Να βρεθεί η μήτρα αλλαγής βάσης P (αντ. Q) από τη βάση S (αντ. S') στη βάση S' (αντ. S).

ii) Να επαληθευτεί ότι $Q = P^{-1}$.

iii) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$ ως προς τη βάση S'.

Λύση.

i) Προκειμένου να βρεθεί η μήτρα αλλαγής βάσης P από τη βάση S στη βάση S' πρέπει να εκφράσουμε τα στοιχεία της βάσης S ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης S'.

Για το σκοπό αυτό θα εκφράσουμε αρχικά το τυχαίο διάνυσμα $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης S'.

Πράγματι είναι

$$\begin{aligned}(a,b,c)=\lambda_1\mathbf{v}_1'+\lambda_2\mathbf{v}_2'+\lambda_3\mathbf{v}_3' &\Leftrightarrow (a,b,c)=\lambda_1(1,2,1)+\lambda_2(-1,0,3)+\lambda_3(0,0,1)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=a\\ 2\lambda_1=b\\ \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=c\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=\frac{b}{2}\\ \lambda_2=\frac{b}{2}-a\\ \lambda_3=c-2b+3a\end{cases}\end{aligned}$$

Άρα

$$(a,b,c)=\frac{b}{2}\mathbf{v}_1'+(\frac{b}{2}-a)\mathbf{v}_2'+(c-2b+3a)\mathbf{v}_3'.$$

Εφαρμόζοντας τη παραπάνω ισότητα για τα $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ προκύπτει ότι

$$\mathbf{v}_1=\frac{1}{2}\mathbf{v}_1'+\frac{3}{2}\mathbf{v}_2'-5\mathbf{v}_3',$$

$$\mathbf{v}_2=-\frac{1}{2}\mathbf{v}_1'-\frac{1}{2}\mathbf{v}_2'+2\mathbf{v}_3'$$

και

$$\mathbf{v}_3=-\mathbf{v}_2'+5\mathbf{v}_3'.$$

Άρα

$$P=[1_V,S,S']=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\ -5&2&5\end{bmatrix}$$

Ανάλογα θα εκφράσουμε το τυχαίο διάνυσμα $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης S.

Πράγματι είναι

$$\begin{aligned}(a,b,c)=\mu_1\mathbf{v}_1+\mu_2\mathbf{v}_2+\mu_3\mathbf{v}_3 \Leftrightarrow&(a,b,c)=\mu_1(-1,1,0)+\mu_2(0,-1,0)+\mu_3(1,0,2)\\ \Leftrightarrow&(a,b,c)=(\mu_3-\mu_1,\mu_1-\mu_2,2\mu_3)\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}\mu_3-\mu_1=a\\ \mu_1-\mu_2=b\\ 2\mu_3=c\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}\mu_1=\frac{c}{2}-a\\ \mu_2=\frac{c}{2}-a-b\\ \mu_3=\frac{c}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

Άρα

$$(a,b,c)=(\frac{c}{2}-a)\mathbf{v}_1+(\frac{c}{2}-a-b)\mathbf{v}_2+\frac{c}{2}\mathbf{v}_3.$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ισότητα για τα $\mathbf{v}_1',\mathbf{v}_2',\mathbf{v}_3'$ προκύπτει ότι

$$\mathbf{v}_1'=-\frac{1}{2}\mathbf{v}_1-\frac{5}{2}\mathbf{v}_2+\frac{1}{2}\mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{v}_2' = \frac{5}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{5}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{3}{2}\mathbf{v}_3$$

και

$$\mathbf{v}_3' = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$$

Άρα,

$$Q = [1_V, S', S] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ii) Επειδή

$$PQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -5 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

προκύπτει ότι $Q = P^{-1}$.

iii) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.6, προκύπτει ότι

$$[\mathbf{v}]_{S'} = [1_V, S, S'][\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -5 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1' + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2' + 3\mathbf{v}_3',$$

δηλαδή οι συντεταγμένες του $\mathbf{v}$ ως προς τη βάση S' είναι $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ και 3. □

Παράδειγμα. *Θεωρούμε το πραγματικό διανυσματικό χώρο $(\mathcal{P}_3, +, \cdot)$ και τις διατεταγμένες βάσεις του $S = (1, 2x, x^2 - x, x^3 + x)$ και $S' = (x - 2, x^2 + x, x^3 - 1, x^3 + x^2)$. Να βρεθεί η μήτρα αλλαγής βάσης P από τη βάση S στη βάση S'.*

Λύση. Αρχικά θα εκφράσουμε το τυχαίο πολυώνυμο $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ του $\mathcal{P}_3$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης S'.

Πράγματι είναι

$$\begin{aligned} & p(x) = \lambda_1(x-2) + \lambda_2(x^2+x) + \lambda_3(x^3-1) + \lambda_4(x^3+x^2) \Leftrightarrow \\ & ax^3 + bx^2 + cx + d = (\lambda_3+\lambda_4)x^3 + (\lambda_2+\lambda_4)x^2 + (\lambda_1+\lambda_2)x - (2\lambda_1+\lambda_3) \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} \lambda_3 + \lambda_4 = a \\ \lambda_2 + \lambda_4 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 = c \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = b - a - c - d \\ \lambda_2 = a - b + 2c + d \\ \lambda_3 = 2a - 2b + 2c + d \\ \lambda_4 = 2b - a - 2c - d \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} p(x) = & (b-a-c-d)(x-2) + (a-b+2c+d)(x^2+x) + (2a-2b+2c+d)(x^3-1) \\ & + (2b-a-2c-d)(x^3+x^2) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για τα πολυώνυμα της βάσης S προκύπτει ότι

$$1 = -(x-2) + (x^2+x) + (x^3-1) - (x^3+x^2)$$

$$2x = -2(x-2) + 4(x^2+x) + 4(x^3-1) - 4(x^3+x^2)$$
$$x^2 - x = 2(x-2) - 3(x^2+x) - 4(x^3-1) + 4(x^3+x^2)$$
$$x^3 + x = -2(x-2) + 3(x^2+x) - 4(x^3-1) - 3(x^3+x^2)$$

οπότε

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$ □

Στην επόμενη πρόταση δίδεται ένας τύπος που συνδέει τις μήτρες μιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικές επιλογές βάσεων.

Πρόταση 9.7. *Έστω δυο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και $f : V \to W$ γραμμική απεικόνιση.*

Αν S, S' (αντ. T, T') είναι δυο διατεταγμένες βάσεις του διανυσματικού χώρου $(V, +, \cdot)$ (αντ. $(W, +, \cdot)$) και Q (αντ. P) η μήτρα αλλαγής βάσης από τη βάση S' (αντ. T') στη βάση S (αντ. T) τότε ισχύει ότι

$$[f, S', T'] = P^{-1}[f, S, T]Q.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας δυο φόρες την Πρόταση 4 και την Πρόταση 5 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P^{-1}[f, S, T]Q &= [1_W, T', T]^{-1}[f, S, T][1_V, S', S] \\ &= [1_W, T, T'][f \circ 1_V, S', T] \\ &= [1_W, T, T'][f, S', T] \\ &= [1_W \circ f, S', T'] \\ &= [f, S', T'] \end{aligned}$$ □

Αν εφαρμοσθεί η προηγούμενη πρόταση για $W = V$ και $T = S$, $T' = S'$ προκύπτει το επόμενο πόρισμα

Πόρισμα 9.8. *Έστω ένας διανυσματικός χώρος $(V, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση και S, S' δύο διατεταγμένες βάσεις του διανυσματικού χώρου $(V, +, \cdot)$.*

Αν P είναι η μήτρα αλλαγής βάσης από τη βάση S' στη βάση S τότε ισχύει ότι

$$[f, S', S'] = P^{-1}[f, S, S]P.$$

9.4 Ισοδύναμες μήτρες

Δύο μήτρες $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ ονομάζονται **ισοδύναμες** (συμβ. $A \sim B$) αν υπάρχουν αντιστρέψιμες μήτρες $P \in \mathcal{M}_m(F)$ και $Q \in \mathcal{M}_n(F)$, με $B = P^{-1}AQ$.

Ειδικά, αν $P = Q$, δηλαδή $B = P^{-1}AP$, τότε οι μήτρες A, B ονομάζονται **όμοιες**.

Παρατηρήσεις:

(1) Η σχέση "$\sim$" είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Πράγματι,

(*i*) $A \sim A$, αφού $A = I_m^{-1}AI_n$.

(*ii*) Αν $A \sim B$, τότε $B \sim A$, αφού

$$\begin{aligned} A = P^{-1}BQ \Rightarrow PA = BQ \Rightarrow PAQ^{-1} = B \\ \Rightarrow B = (P^{-1})^{-1}AQ^{-1}. \end{aligned}$$

(*iii*) Αν $A \sim B$ και $B \sim C$, τότε $A \sim C$, αφού

$$\begin{aligned} &A = P_1^{-1}BQ_1 \text{ και } B = P_2^{-1}CQ_2 \\ \Rightarrow &A = P_1^{-1}(P_2^{-1}CQ_2)Q_1 \\ \Rightarrow &A = (P_1^{-1}P_2^{-1})C(Q_2Q_1) \\ \Rightarrow &A = (P_2P_1)^{-1}C(Q_2Q_1) \end{aligned}$$

(2) Η σχέση ομοιότητας είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathcal{M}_n(F)$. (Άσκηση.)

(3) Αν $A, B \in \mathcal{M}_n(F)$ είναι όμοιες μήτρες, τότε $\det(A) = \det(B)$. Πράγματι, επειδή A, B είναι όμοιες μήτρες, θα υπάρχει αντιστρέψιμη μήτρα $P \in \mathcal{M}_n(F)$, με $B = P^{-1}AP$.

Τότε όμως είναι

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\ &= \det(P^{-1})\det(P)\det(A) \\ &= \det(P^{-1}P)\det(A) \\ &= \det(I_n)\det(A) = 1\det(A) = \det(A). \end{aligned}$$

(4) Δύο ισοδύναμες μήτρες $A, B \in \mathcal{M}_n(F)$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη όμοιες ακόμα και αν $\det(A) = \det(B)$.

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε $\det(A) = \det(B) = 1$.

Οι μήτρες A, B δεν είναι όμοιες, διότι διαφορετικά θα υπήρχε αντιστρέψιμη μήτρα $P \in \mathcal{M}_2(F)$, με

$$P^{-1}AP = B \Leftrightarrow P^{-1}P = B \Leftrightarrow A = B,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Αντίθετα, οι μήτρες A, B είναι ισοδύναμες, αφού αν

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε οι P, Q είναι αντιστρέψιμες και ισχύει

$$PB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = Q,$$

επομένως,

$$B = P^{-1}Q = P^{-1}AQ.$$

(5) Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$.

Αν S, S' και T, T' είναι δύο διατεταγμένες βάσεις των διανυσματικών χώρων $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ αντίστοιχα, τότε από την Πρόταση 7, προκύπτει ότι

$$[f, S, T] \sim [f, S', T'].$$

Με άλλα λόγια, δύο μήτρες μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to W$ ως προς διαφορετικές επιλογές βάσεων είναι ισοδύναμες.

Ειδικά, αν $W = V$, $T = S$ και $T' = S'$, από το Πόρισμα 8 προκύπτει ότι οι μήτρες $[f, S, S]$ και $[f, S', S']$ είναι όμοιες.

Παρακάτω, δίδεται το αντίστροφο της προηγούμενης παρατήρησης.

Πρόταση 9.9. *Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$, με $\dim V = n$ και $\dim W = m$, και δύο ισοδύναμες μήτρες $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$. Τότε, υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ και διατεταγμένες βάσεις S, S' του $(V, +, \cdot)$ και T, T' του $(W, +, \cdot)$, τέτοιες ώστε*

$$A = [f, S, T] \quad \text{και} \quad B = [f, S', T']$$

Απόδειξη. Έστω $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ και $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ είναι διατεταγμένες βάσεις των διανυσματικών χώρων $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ αντίστοιχα.

Επειδή $A \sim B$, θα υπάρχουν αντιστρέψιμες μήτρες $P \in \mathcal{M}_m(F)$ και $Q \in \mathcal{M}_n(F)$, με $B = P^{-1}AQ$.

Τότε όμως εφαρμόζοντας τρεις φορές την Πρόταση 2 για τις μήτρες A, P, Q, προκύπτει ότι θα υπάρχουν (μοναδικές) γραμμικές απεικονίσεις $f : V \to W$, $\varphi : V \to V$ και $\psi : W \to W$, με

$$A = [f, S, T], Q = [\varphi, S, S], P = [\psi, T, T].$$

Επειδή οι μήτρες Q, P είναι αντιστρέψιμες, προκύπτει σύμφωνα με την Πρόταση 5 ότι οι γραμμικές απεικονίσεις φ, ψ είναι ισομορφισμοί.

Τότε $S' = (\varphi(\mathbf{v}_1), \varphi(\mathbf{v}_2), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_n))$ και $T' = (\psi(\mathbf{w}_1), \psi(\mathbf{w}_2), \ldots, \psi(\mathbf{w}_n))$ είναι διατεταγμένες βάσεις των διανυσματικών χώρων $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ αντίστοιχα.

Θα δειχθεί ότι $B = [f, S', T']$. Πράγματι, επειδή

$$Q = [\varphi, S, S] = [1_V, S', S]$$

και

$$P = [\psi, T, T] = [1_W, T', T],$$

δηλαδή Q, P είναι οι μήτρες αλλαγής βάσης, από τη βάση S' στην S και από τη βάση T' στην T αντίστοιχα, από την Πρόταση 7 προκύπτει ότι

$$[f, S', T'] = P^{-1}[f, S, T]Q = P^{-1}AQ = B. \qquad \square$$

Ειδικά, αν $V = W$, $S = T$ και $S' = T'$, τότε προκύπτει ότι

Πόρισμα 9.10. *Έστω ο διανυσματικός χώρος $(V,+,\cdot)$ επί του σώματος $(F,+,\cdot)$, με $\dim V = n$ και δύο όμοιες μήτρες $A, B \in \mathcal{M}_n(F)$. Τότε, υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$ και διατεταγμένες βάσεις S, S' του $(V,+,\cdot)$, τέτοιες ώστε*

$$A = [f, S, S] \quad \textit{και} \quad B = [f, S', S'].$$

Στην επόμενη πρόταση, δίδεται ένας χαρακτηρισμός της μήτρας μιας γραμμικής απεικόνισης.

Πρόταση 9.11. *Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V,+,\cdot)$ και $(W,+,\cdot)$ επί του σώματος $(F,+,\cdot)$, με $\dim V = n$ και $\dim W = m$ και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$. Τότε, υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις S, T των $(V,+,\cdot)$ και $(W,+,\cdot)$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε*

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

όπου $r = \dim \operatorname{Im} f$ και η μήτρα $\begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ έχει στην πάνω αριστερή γωνία τη μοναδιαία μήτρα I_r και 0 παντού αλλού.

Απόδειξη. Επειδή, ως γνωστόν,

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f,$$

προκύπτει ότι $\dim \ker f = n - r$.

Έστω $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ μια διατεταγμένη βάση του $(V,+,\cdot)$, έτσι ώστε $(\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ να είναι μια διατεταγμένη βάση του $\ker f$.

Θα αποδειχθεί ότι $(f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r))$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\operatorname{Im} f$. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + \lambda_r f(\mathbf{v}_r) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow f(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{v}_r) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{v}_r \in \ker f \end{aligned}$$

Οπότε, υπάρχουν $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n \in F$, με

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \lambda_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \lambda_{r+2} \mathbf{v}_{r+2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \\ \Leftrightarrow &\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_r \mathbf{v}_r + (-\lambda_{r+1}) \mathbf{v}_{r+1} + (-\lambda_{r+2}) \mathbf{v}_{r+2} + \cdots + (-\lambda_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \\ \Rightarrow &\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0 \end{aligned}$$

και επομένως τα διανύσματα

$$f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω

$$T = (f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r), \mathbf{w}_{r+1}, \mathbf{w}_{r+2}, \ldots, \mathbf{w}_m)$$

μια διατεταγμένη βάση του W (επέκταση της διατεταγμένης βάσης $(f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r))$).

Κατόπιν τούτων, ισχύει ότι

$$[f(\mathbf{v}_j)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

όπου το 1 εμφανίζεται στην j γραμμή, για $j \in [r]$ και

$$[f(\mathbf{v}_j)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

για κάθε $j \in [r+1, n]$.

Άρα,

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}.$$

□

Εφαρμογή 9.3. *Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *και* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *και η γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *με*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_3 + x_4).$$

Να βρεθούν διατεταγμένες βάσεις S, T *των* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *και* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *αντίστοιχα ώστε*

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Αρχικά θα βρεθεί μια διατεταγμένη βάση του $\ker f$. Είναι

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker f &\Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_3 + x_4) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 - x_1 \\ x_4 = -x_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_2 - x_1, -x_2) \\
&\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, 1, -1)
\end{aligned}$$

Άρα, $\ker f =< (1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, -1) >$.

Τα διανύσματα $(1, 0, -1, 0)$ και $(0, 1, 1, -1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διότι

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(1, 0, -1, 0) + \lambda_2(0, -1, 1, -1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \\
&(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_2) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Άρα το $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, -1))$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\ker f$.

Στη συνέχεια (επεκτείνοντας τη βάση του $\ker f$) θα αποδειχθεί ότι το

$$S = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (1,0,-1,0), (0,1,1,-1))$$

είναι μια διατεταγμένη βάση του $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Για το σκοπό αυτό αρκεί να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα του S είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(0,1,0,0) + \lambda_3(1,0,-1,0) + \lambda_4(0,1,1,-1) &= (0,0,0,0) \Leftrightarrow \\
(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_4, -\lambda_3 + \lambda_4, -\lambda_4) &= (0,0,0,0) \Leftrightarrow \\
\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0
\end{aligned}$$

Άρα, το S είναι μια διατεταγμένη βάση του $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι το

$$(f(1,0,0,0), f(0,1,0,0)) = ((1,0,1), (-1,1,0))$$

είναι μια διατεταγμένη βάση του $\operatorname{Im} f$.

Επειδή $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 4 - 2 = 2$ αρκεί να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $(1,0,1)$ και $(-1,1,0)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(-1,1,0) &= (0,0,0) \Leftrightarrow \\
(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1) &= (0,0,0) \Leftrightarrow \\
\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Άρα, το $((1,0,1), (-1,1,0))$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\operatorname{Im} f$.

Στη συνέχεια (επεκτείνοντας τη βάση του $\operatorname{Im} f$) θα αποδειχθεί ότι το

$$T = ((1,0,1), (-1,1,0), (1,0,0))$$

είναι μια βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Για το σκοπό αυτό αρκεί να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα του T είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Είναι

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(-1,1,0) + \lambda_3(1,0,0) &= (0,0,0) \Leftrightarrow \\
(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

Άρα το T είναι μια διατεταγμένη βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Τέλος θα αποδειχθεί ότι

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
f(1,0,0,0) &= (1,0,1) = 1(1,0,1) + 0(-1,1,0) + 0(1,0,0) \\
f(0,1,0,0) &= (-1,1,0) = 0(1,0,1) + 1(-1,1,0) + 0(1,0,0) \\
f(1,0,-1,0) &= (0,0,0) = 0(1,0,1) + 0(-1,1,0) + 0(1,0,0) \\
f(0,1,1,-1) &= (0,0,0) = 0(1,0,1) + 0(-1,1,0) + 0(1,0,0).
\end{aligned}$$

Οπότε σύμφωνα με τον ορισμό της μήτρας γραμμικής απεικόνισης προκύπτει ότι

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Εφαρμογή 9.4. *Έστω οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $(\mathcal{P}_2, +, \cdot)$ και $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ και η γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, με*

$$f(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & a - b \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν διατεταγμένες βάσεις S, T των $(\mathcal{P}_2, +.\cdot)$ και $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +.\cdot)$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Αρχικά, θα βρεθεί μια διατεταγμένη βάση του $\ker f$. Είναι

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c \in \ker f \Leftrightarrow & f(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & a - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = b \text{ και } c = 0 \\ \Leftrightarrow & ax^2 + bx + c = a(x^2 + x) \in < x^2 + x > . \end{aligned}$$

Οπότε, το πολυώνυμο $x^2 + x$ αποτελεί μια βάση του $\ker f$.

Θα βρεθεί μια διατεταγμένη βάση του $(\mathcal{P}_2, +.\cdot)$, η οποία είναι επέκταση της βάσης του $\ker f$ που βρήκαμε. Έστω

$$S = (1, x, x^2 + x).$$

Επειδή $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, αρκεί να δειχθεί ότι τα πολυώνυμα $1, x, x^2 + x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 x + \lambda_3(x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow & \lambda_3 x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, τα πολυώνυμα $1, x, x^2 + x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως το S είναι μια διατεταγμένη βάση του $(\mathcal{P}_2, +.\cdot)$.

Στη συνέχεια, θα αποδειχθεί ότι το

$$(f(1), f(x)) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

είναι μια διατεταγμένη βάση του $\operatorname{Im} f$. Για το σκοπό αυτό, αφού

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{P}_2 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2,$$

αρκεί να δειχθεί ότι οι μήτρες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Άρα, οι μήτρες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και το $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\operatorname{Im} f$.

Θα βρεθεί μια βάση T του $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, η οποία είναι επέκταση της βάσης του $\operatorname{Im} f$ που βρήκαμε. Έστω

$$T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Επειδή $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, αρκεί να δειχθεί ότι οι μήτρες του T είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Άρα, η T είναι μια διατεταγμένη βάση του $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Τέλος, επειδή

$$f(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(x + x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

προκύπτει ότι

$$[f(1)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [f(x)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [f(x + x^2)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

άρα, σύμφωνα με τον ορισμό της μήτρας της γραμμικής απεικόνισης, έπεται ότι

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Από την πέμπτη παρατήρηση μετά τον ορισμό των ισοδύναμων μητρών και την πρόταση, προκύπτει ότι

Πόρισμα 9.12. *Έστω δύο διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$. Αν S, T είναι διατεταγμένες βάσεις των $(V, +, \cdot)$ και $(W, +, \cdot)$ αντίστοιχα, τότε ισχύει ότι*

$$[f, S, T] \sim \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

όπου $r = \dim \operatorname{Im} f$.

Πρόταση 9.13. *Για κάθε μήτρα $A = [a_{ij}]$, όπου $i \in [m]$ και $j \in [n]$ και $a_{ij} \in F$, ισχύει ότι*

$$A \sim \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

όπου $r = \operatorname{rank} A$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $(\mathcal{M}_{n\times 1}(F), +, \cdot)$ και $(\mathcal{M}_{m\times 1}(F), +, \cdot)$ με διατεταγμένες βάσεις $S = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ και $T = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ αντίστοιχα, με

$$X_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, j \in [n] \text{ και } Y_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, j \in [m],$$

όπου το 1 στις παραπάνω στήλες εμφανίζεται στην j γραμμή, καθώς επίσης και τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{M}_{n\times 1}(F) \to \mathcal{M}_{m\times 1}(F)$, με

$$f(X) = AX, \text{ όπου } X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(F).$$

Επειδή $\mathcal{M}_{n\times 1} =< X_1, X_2, \ldots, X_n >$, έπεται ότι $\operatorname{Im} f =< f(X_1), f(X_2), \ldots, f(X_n) >$. Αλλά, για κάθε $j \in [n]$, ισχύει ότι

$$f(X_j) = AX_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

(όπου το 1 στην παραπάνω στήλη εμφανίζεται στην j γραμμή), δηλαδή το $f(X_j)$ ισούται με την j στήλη της A.

Κατόπιν τούτων, ο διανυσματικός υπόχωρος $\operatorname{Im} f$ παράγεται από τις στήλες της A, και επομένως

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A.$$

Επιπλέον, από την προηγούμενη σχέση είναι

$$f(X_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = a_{1j}Y_1 + a_{2j}Y_2 + \cdots + a_{mj}Y_m,$$

για κάθε $j \in [n]$, επομένως

$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Από το Πόρισμα 9.12, θα ισχύει ότι

$$[f, S, T] \sim \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

όπου $r = \dim \operatorname{Im} f$, οπότε τελικά προκύπτει ότι

$$A \sim \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

όπου $r = \operatorname{rank} A$. □

Εφαρμογή 9.5. *Έστω η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & -11 \\ 2 & -2 & -6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν αντιστρέψιμες μήτρες P, Q, με

$$P^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$, με

$$f(X) = AX, \text{ όπου } X \in \mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R}).$$

Αρχικά, θα αποδειχθεί ότι

$$[f, S, T] = A,$$

όπου

$$S = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), T = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Πράγματι,

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\-6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-11\\12\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-11\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+12\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Κατόπιν τούτων, από τον ορισμό της μήτρας γραμμικής απεικόνισης, προκύπτει ότι

$$[f,S,T]=A.$$

Στη συνέχεια, (εργαζόμενοι όπως στις εφαρμογές της Πρότασης 9.11 θα βρεθούν διατεταγμένες βάσεις S',T' των διανυσματικών χώρων $(\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ και $(\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ αντίστοιχα, με

$$[f,S',T']=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Για το σκοπό αυτό, αρχικά βρίσκουμε μια διατεταγμένη βάση του $\ker f$. Πράγματι, για

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R})$$

είναι

$$X\in\ker f\Leftrightarrow f(X)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&3\\-2&1&4&-11\\2&-2&-6&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+3x_4=0\\-2x_1+x_2+4x_3-11x_4=0\\2x_1-2x_2-6x_3+12x_4=0\end{cases}\qquad(\Sigma)$$

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος, έχουμε

$$\begin{bmatrix}1&2&3&3\\-2&1&4&-11\\2&-2&-6&12\end{bmatrix}\underbrace{\overset{R_2\to R_2+2R_1}{R_3\to R_3-2R_1}}\begin{bmatrix}1&2&3&3\\0&5&10&-5\\0&-6&-12&6\end{bmatrix}\underbrace{R_2\to\tfrac{1}{5}R_2}\begin{bmatrix}1&2&3&3\\0&1&2&-1\\0&-6&-12&6\end{bmatrix}\underbrace{R_3\to R_3+6R_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&3\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\underbrace{R_1\to R_1-2R_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&5\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 5x_4 \\ x_2 = -2x_3 + x_4 \end{cases}$$

Άρα,

$$X \in \ker f \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} x_3 - 5x_4 \\ -2x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X \in < \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} >$$

δηλαδή

$$\ker f = < \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} >$$

Επιπλέον, οι μήτρες $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, αφού

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 - 5\lambda_2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

και επομένως, το $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\ker f$.

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τη βάση αυτή σε μια διατεταγμένη βάση S του $(\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Έστω

$$S' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 - 5\lambda_4 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Άρα, οι 4 μήτρες του S' είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και επειδή $\dim \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) = 4$, προκύπτει ότι το S' είναι μια διατεταγμένη βάση του $(\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Στη συνέχεια, θα αποδειχθεί ότι το

$$\left(f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

είναι μια διατεταγμένη βάση του $\operatorname{Im} f$. Για το σκοπό αυτό, αφού

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) - \dim \ker f = 4 - 2 = 2,$$

αρκεί να δειχθεί ότι οι δύο παραπάνω μήτρες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Πράγματι, για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Άρα οι μήτρες $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και το $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$ είναι μια διατεταγμένη βάση του $\operatorname{Im} f$.

Θα βρεθεί μια διατεταγμένη βάση T' του $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, η οποία είναι επέκταση της βάσης του $\operatorname{Im} f$ που βρήκαμε. Έστω

$$T' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Επειδή $\dim \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) = 3$, αρκεί να δειχθεί ότι οι μήτρες του T' είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Άρα, η T' είναι μια διατεταγμένη βάση του $\operatorname{Im} f$.

Επιπλέον, επειδή

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = f\left(\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

προκύπτει ότι

$$[f, S', T'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τέλος, από την Πρόταση 9.7, προκύπτει ότι

$$P^{-1}AQ = P^{-1}[f,S,T]Q = [f,S',T'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου Q (αντίστοιχα P) η μήτρα αλλαγής βάσης από τη βάση S' (αντ. T') στη βάση S (αντ. T).

Προκειμένου να βρεθεί η μήτρα Q (αντ. P) εκφράζουμε κάθε στήλη της διατεταγμένης βάσης S' (αντ. T') ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών της διατεταγμένης βάσης S (αντ. T). Πράγματι, είναι

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

άρα

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Πρόταση 9.14. *Δίδεται μια μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ και οι αντιστρέψιμες μήτρες $P \in \mathcal{M}_m(F)$ και $Q \in \mathcal{M}_n(F)$. Τότε, ισχύει ότι*
$$\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank} A.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f : \mathcal{M}_{n\times 1}(F) \to \mathcal{M}_{m\times 1}(F), \text{ με } f(X) = AX,$$
$$g : \mathcal{M}_{m\times 1}(F) \to \mathcal{M}_{m\times 1}(F), \text{ με } g(X) = PX,$$
$$h : \mathcal{M}_{n\times 1}(F) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(F), \text{ με } h(X) = QX,$$

και τη σύνθεσή τους $g \circ f \circ h : \mathcal{M}_{n\times 1}(F) \to \mathcal{M}_{m\times 1}(F)$, με

$$(g \circ f \circ h)(X) = PAQX.$$

Όπως έχει ήδη λεχθεί στην απόδειξη της Πρότασης 9.13, ισχύει ότι

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} f$$

και

$$\operatorname{rank}(PAQ) = \dim \operatorname{Im}(g \circ f \circ h).$$

Επειδή οι μήτρες P, Q είναι αντιστρέψιμες, εύκολα προκύπτει ότι οι g, h είναι ισομορφισμοί, οπότε

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(g \circ f \circ h) &= (g \circ f \circ h)(\mathcal{M}_{n\times 1}(F)) \\
&= (g \circ f)\left(h(\mathcal{M}_{n\times 1}(F))\right) \overset{h \text{ επί}}{=} (g \circ f)(\mathcal{M}_{n\times 1}(F)) \\
&= g\left(f(\mathcal{M}_{n\times 1}(F))\right) = g(\operatorname{Im} f)
\end{aligned}$$

και

$$\operatorname{rank}(PAQ) = \dim \operatorname{Im}(g \circ f \circ h) \overset{g\ 1\text{-}1}{=} \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A$$ □

Πρόταση 9.15. *Δύο μήτρες $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν*

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$$

Απόδειξη. Αν $A \sim B$, τότε υπάρχουν αντιστρέψιμες μήτρες $P \in \mathcal{M}_m(F)$ και $Q \in \mathcal{M}_n(F)$, με $B = P^{-1}AQ$. Οπότε, από την προηγούμενη πρόταση, προκύπτει άμεσα ότι $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

Αντίστροφα, αν $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = r$, τότε από την Πρόταση 13, προκύπτει ότι

$$A \sim \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \text{ και } B \sim \begin{bmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

οπότε τελικά $A \sim B$. □

Εφαρμογή 9.6. *Ποιες από τις παρακάτω μήτρες είναι ισοδύναμες;*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση. Θα βρεθούν τα rank των παραπάνω μητρών χρησιμοποιώντας τις γραμμοπράξεις.

$$
\begin{aligned}
A \overset{R_1\to\frac{1}{2}R_1}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3+R_1 \\ R_4\to R_4-3R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \\
\overset{R_2\to -R_2}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3\to R_3-2R_2 \\ R_4\to R_4-R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \\
\overset{R_3\leftrightarrow R_4}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Οπότε, $\operatorname{rank} A = 3$.

$$
B \overset{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-3R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_2\to\frac{1}{6}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3\to R_3-2R_2 \\ R_4\to R_4-3R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Οπότε, $\operatorname{rank} B = 2$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma \overset{\substack{R_2\to R_2-3R_1 \\ R_3\to R_3-2R_1 \\ R_4\to R_4+R_1}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_2\to -\frac{1}{2}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\
\overset{\substack{R_3\to R_3+3R_2 \\ R_4\to R_4-4R_2}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \overset{R_3\to -\frac{1}{5}R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\
\overset{R_4\to R_4-7R_3}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Οπότε, $\operatorname{rank} \Gamma = 3$.

Κατόπιν τούτων και σύμφωνα με την Πρόταση 15, προκύπτει ότι $A \sim \Gamma$, ενώ $A \nsim B$ και $B \nsim \Gamma$. □

9.5 Ορίζουσα γραμμικής απεικόνισης

Δίδεται ένας διανυσματικός χώρος $(V, +, \cdot)$, πεπερασμένης διάστασης, επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to V$.

Όπως είναι γνωστό,[1] για κάθε ζεύγος διατεταγμένων βάσεων S, S' του $(V, +, \cdot)$, οι μήτρες $[f, S, S]$ και $[f, S', S']$ είναι όμοιες, οπότε[2] θα ισχύει ότι

$$\det([f, S, S]) = \det([f, S', S']).$$

Δηλαδή, η ορίζουσα της μήτρας της γραμμικής απεικόνισης είναι ανεξάρτητη της επιλογής διατεταγμένων βάσεων. Κατόπιν τούτων, η ορίζουσα $\det([f, S, S])$ ονομάζεται **ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης** f και συμβολίζεται με $\det(f)$, δηλαδή

$$\det(f) = \det([f, S, S]).$$

Παράδειγμα. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3).$$

Λύση. Έστω η διατεταγμένη κανονική βάση $S = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, με

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Τότε είναι,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= (2, 0, 1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \\ f(\mathbf{e}_2) &= (-1, 1, 1) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ f(\mathbf{e}_3) &= (0, 1, -1) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

Άρα, $[f, S, S] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ και επομένως

$$\det(f) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2) - 1 = -5$$ □

Παράδειγμα. *Να υπολογιστεί η ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, με $f(p) = p'$.*

Λύση. Έστω η διατεταγμένη βάση $S = (1, x, x^2, x^3)$ του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathcal{P}_3, +, \cdot)$. Τότε, είναι

$$f(1) = 1' = 0, \quad f(x) = x' = 1,$$

$$f(x^2) = (x^2)' = 2x, \quad f(x^3) = (x^3)' = 3x^2.$$

[1] Βλ. Παρατήρηση 5 μετά τον ορισμό των όμοιων μητρών.
[2] Βλ. Παρατήρηση 3 μετά τον ορισμό των όμοιων μητρών.

Άρα, $[f,S,S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και επομένως

$$\det(f) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$ □

Παράδειγμα. *Δίδεται η μήτρα $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ και η γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, με $f(X) = AX$. Να αποδειχθεί ότι $\det(f) = \det(A)$.*

Λύση. Θεωρούμε την διατεταγμένη κανονική βάση $S = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, όπου

$$E_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j \in [n]$$

(όπου το 1 εμφανίζεται j στη γραμμή του E_j).

Τότε, για κάθε $j \in [n]$, ισχύει ότι

$$f(E_j) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{1j}E_1 + a_{2j}E_2 + \cdots + a_{nj}E_n,$$

οπότε $[f,S,S]$ είναι η μήτρα της οποίας, για κάθε $j \in [n]$, η j στήλη ισούται με $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$, δηλαδή $[f,S,S] = A$ και επομένως $\det(f) = \det(A)$. □

Πρόταση 9.16. *Αν $(V, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, επί του σώματος $(F, +, \cdot)$ και $f : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση, τότε οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Η f είναι ισομορφισμός.*

(ii) $\det(f) \neq 0$.

Απόδειξη. Αν S είναι μια διατεταγμένη βάση του διανυσματικού χώρου $(V, +, \cdot)$, τότε ισχύει ότι

$$\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow \det([f, S, S]) \neq 0 \Leftrightarrow [f, S, S] \text{ αντιστρέψιμη} \overset{3}{\Leftrightarrow} f \text{ ισομορφισμός}. \qquad \square$$

Εφαρμογή 9.7. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, με*

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+2b & b+2c \\ c+2d & d+2a \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια να εξετασθεί αν η f είναι ισομορφισμός.

Λύση. Έστω η διατεταγμένη βάση

$$S = (A_1, A_2, A_3, A_4)$$

του πραγματικού διανυσματικού χώρου
$(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, με

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε, είναι

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A_1 + 2A_4, \\ f(A_2) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2A_1 + A_2, \\ f(A_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2A_2 + A_3, \\ f(A_4) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2A_3 + A_4. \end{aligned}$$

Άρα

$$\det(f) = |[f, S, S]| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 16 = -15.$$

Επειδή $\det(f) \neq 0$, η f είναι ισομορφισμός. $\square$

[3] Σύμφωνα με την Πρόταση ;5;.

9.6 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 - 2x_2)$$
Να βρεθεί η μήτρα $[f, S, T]$ όταν
   i) $S = (e_1, e_2)$ και $T = (e'_1, e'_2, e'_3)$
   ii) $S = (e_2, e_1)$ και $T = (e'_1, e'_2, e'_3)$
   iii) $S = (e_1, e_2)$ και $T = (e'_1, e'_3, e'_2)$

   όπου $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $e'_1 = (1, 0, 0)$, $e'_2 = (0, 1, 0)$ και $e'_3 = (0, 0, 1)$.

2. Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 3x_2)$$
Να βρεθεί η μήτρα $[f, S, T]$ όταν
   i) $S = (e_1, e_2)$ και $T = (e'_1, e'_2, e'_3)$
   ii) $S = (e_2, e_1)$ και $T = (e'_1, e'_2, e'_3)$
   iii) $S = (e_1, e_2)$ και $T = (e'_1, e'_3, e'_2)$

   όπου $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $e'_1 = (1, 0, 0)$, $e'_2 = (0, 1, 0)$ και $e'_3 = (0, 0, 1)$.

3. Δίδονται οι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ και $(\mathcal{P}_2, +, \cdot)$ των 2×2 πραγματικών μητρών, και των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ 2 αντίστοιχα, και η γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2$ με
$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b)x^2+(a-c-d)x+b+c+d.$$
Να βρεθούν διατεταγμένες βάσεις S, T των $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ και $(\mathcal{P}_2, +, \cdot)$ αντίστοιχα, ώστε
$$[f, S, T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Δίδονται οι διανυσματικοί χώροι $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ με τις συνήθεις πράξεις τους, και οι διανυσματικές βάσεις τους $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, και $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ αντίστοιχα, όπου
$$\mathbf{v}_1 = (0, -2, 3),\ \mathbf{v}_2 = (1, -1, 2),\ \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1),$$
$$\mathbf{w}_1 = (2, 1),\ \mathbf{w}_2 = (-1, 3).$$
Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με
$$[f, S, T] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -14 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$ και οι διατεταγμένες βάσεις $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ και $W = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ των $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ αντίστοιχα, με $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{w}_1 = (1, 1)$ και $\mathbf{w}_2 = (-1, 0)$. Να βρεθεί η μήτρα $[f, S, T]$.

6. Έστω η μήτρα
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$
Να βρεθούν αντιστρέψιμες μήτρες P, Q με
$$P^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Έστω η μήτρα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ -3 & 8 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$
Να βρεθούν αντιστρέψιμες μήτρες P, Q με
$$P^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Ποιες από τις παρακάτω μήτρες είναι ισοδύναμες;
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \\ 5 & -5 & 0 \\ 8 & 16 & 24 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Ποιες από τις παρακάτω μήτρες είναι ισοδύναμες;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 18 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & 18 & 20 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

10. Να υπολογισθεί η ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - 2x_3).$$

11. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ με τις συνήθεις πράξεις του και τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2,$$
$$x_1 - x_2 + x_4, -2x_3 - 2x_2 + x_4).$$

Να υπολογισθεί η ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης f και με τη βοήθεια αυτής να εξετασθεί αν η f είναι ισομορφισμός.

12. Να υπολογισθεί η ορίζουσα της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, με

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & b-c \\ c-d & d-a \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια να εξετασθεί αν η f είναι ισομορφισμός.

Κεφάλαιο 10

Εσωτερικό γινόμενο

10.1 Διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Έστω $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.

Η απεικόνιση $\langle \rangle$ ονομάζεται **εσωτερικό γινομένο** επί του $\mathcal{V}$ αν και μόνο αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$,
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$,
4. $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + b \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα **πραγματικό διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο** και γράφουμε $(V, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \langle \rangle)$. Αν επιπλέον, ο $\mathcal{V}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, ο διανυσματικός χώρος λέγεται **Ευκλείδειος χώρος**.

Μερικές φορές αντί για $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα. *Για τον διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^n, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ η απεικόνιση $\langle \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ όπου για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ορίζουμε*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

*είναι ένα εσωτερικό γινόμενο που λέγεται **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο επί του** $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε,

(i)
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 + \cdots x_n x_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant 0.$$

(ii)
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 &\Leftrightarrow x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle &= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n\\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n\\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle .\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle &= \langle a(x_1, \ldots, x_n) + b(y_1, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n)\rangle\\ &= \langle (ax_1, \ldots, ax_n) + (by_1, \ldots, by_n), (z_1, \ldots, z_n)\rangle\\ &= \langle (ax_1 + by_1, \ldots, ax_n + by_n), (z_1, \ldots, z_n)\rangle\\ &= (ax_1 + by_1)z_1 + \cdots + (ax_n + by_n)z_n\\ &= ax_1z_1 + \cdots + ax_nz_n + by_1z_1 + \cdots + by_nz_n\\ &= a(x_1z_1 + \cdots + x_nz_n) + b(y_1z_1 + \cdots + y_nz_n)\\ &= a\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + b\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle .\end{aligned}$$

□

Παρατηρήσεις:

(i) Ο παραπάνω διανυσματικός χώρος είναι Ευκλείδειος, αφού $\dim \mathbb{R}^n = n$ και η απεικόνιση $\langle\rangle$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{k\times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}$ και $C = [c_{ij}] = AB$. Όπως είναι γνωστό, $c_{ij} = \sum\limits_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} \cdot b_{\lambda j}$. Οι γραμμές της A: R_1, R_2, …, R_k και οι στήλες της B: C_1, C_2, …, C_m μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία του $\mathbb{R}^n$, οπότε $c_{ij} = \langle R_i, C_j\rangle$, όπου $\langle\ \rangle$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$.

Στον διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο $\langle\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Έτσι,

- $\langle (2, 1, -2), (-3, 1, 0)\rangle = -6 + 1 + 0 = -5$.
- $\langle (1, 2, 3), (4, 5, 6)\rangle = 4 + 10 + 18 = 32$.
- Έστω $\mathbf{x} = (-1, 2, -1)$, $\mathbf{y} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{z} = (-5, -1, 2)$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle 3\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle &= \langle 3(-1, 2, -1) + (2, 2, 0), (-5, -1, 2)\rangle\\ &= \langle (-3, 6, -3) + (2, 2, 0), (-5, -1, 2)\rangle\\ &= \langle (-1, 8, -3), (-5, -1, 2)\rangle = 5 - 8 - 6 = -9\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}3\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle &= 3\langle (-1, 2, -1), (-5, -1, 2)\rangle + \langle (2, 2, 0), (-5, -1, 2)\rangle\\ &= 3(5 - 2 - 2) + (-10 - 2 + 0) = 3 \cdot 1 - 12 = -9,\end{aligned}$$

(επαληθεύοντας την ιδιότητα 4 του ορισμού).

Παράδειγμα. *Έστω $(V,+,\cdot)$ ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$, $a<b$. Η απεικόνιση $<>: V^2 \to \mathbb{R}$ για την οποία*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \text{ για κάθε } f,g \in V$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του V.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $f,g,h \in V$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Τότε

(i) $\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(x)dx \geqslant \int_a^b 0dx = 0.$

(ii) $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f^2(x)dx = 0 \overset{f \text{ συνεχής}}{\Leftrightarrow} f = \mathbf{0}.$

(iii) $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g,f\rangle.$

(iv)

$$\langle \lambda f+\mu g,h\rangle = \int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))h(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)h(x) + \mu\int_a^b g(x)h(x)dx = \lambda < f,h > + \mu < g,h >$$

Ο διανυσματικός χώρος V δεν είναι Ευκλείδειος. □

Παράδειγμα. *Έστω $(\mathcal{M}_n,+,\cdot)$ ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των $n\times n$ μητρών. Η απεικόνιση $\langle\rangle : \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ για την οποία*

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{AB}^{\mathrm{t}})$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{M}_n$.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $A,B,C \in \mathcal{M}_n$. Αν $R_1,R_2,\ldots,R_n$ είναι οι γραμμές της μήτρας A και $R'_1,R'_2,\ldots,R'_n$ οι γραμμές της μήτρας B τότε, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παρατήρηση, αν θεωρήσουμε ότι $R_i,R'_i \in \mathbb{R}^n$ για κάθε $i\in[n]$ τότε

(i)

$$\langle A,A\rangle = \mathrm{tr}(AA^t) = \langle R_1,R_1\rangle + \langle R_2,R_2\rangle + \cdots + \langle R_n,R_n\rangle \geqslant 0,$$

όπου $\langle R_i,R_i\rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ είναι $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geqslant 0$.

(ii)

$$\begin{aligned}\langle A,A\rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle R_1,R_1\rangle + \langle R_2,R_2\rangle + \cdots + \langle R_n,R_n\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \langle R_1,R_1\rangle = \langle R_2,R_2\rangle = \cdots = \langle R_n,R_n\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow R_1 = R_2 = \cdots = R_n = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n\\ &\Leftrightarrow A = O_{n\times n}.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \mathrm{tr}(AB^t)\\ &= \langle R_1, R_1'\rangle + \langle R_2, R_2'\rangle + \cdots + \langle R_n, R_n'\rangle\\ &= \langle R_1', R_1\rangle + \langle R_2', R_2\rangle + \cdots + \langle R_n', R_n\rangle\\ &= \mathrm{tr}(BA^t) = \langle B, A\rangle .\end{aligned}$$

(iv) Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\langle \lambda A + \mu B, C\rangle &= \mathrm{tr}((\lambda A + \mu B)C^t)\\ &= \mathrm{tr}(\lambda AC^t + \mu BC^t)\\ &= \mathrm{tr}(\lambda AC^t) + \mathrm{tr}(\mu BC^t)\\ &= \lambda \mathrm{tr}(AC^t) + \mu \mathrm{tr}(BC^t)\\ &= \lambda \langle A, C\rangle + \mu \langle B, C\rangle .\end{aligned}$$

Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{M}_n$ είναι Ευκλείδειος, αφού $\dim(\mathcal{M}_n) = n$. □

Πρόταση 10.1. *Έστω $\mathcal{V} = (V, +, \cdot)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\rangle$. Τότε,*

(1) $\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y}\rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.

(2) $\langle a\mathbf{x}, a\mathbf{y}\rangle = a^2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.

(3) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{0}\rangle = 0$.

(4) $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle > 0$.

(5) $\langle a_1\mathbf{x}_1 + \cdots a_n\mathbf{x}_n, \mathbf{y}\rangle = a_1\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}\rangle + \cdots + a_n\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\rangle$.

(6) $\langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{z}\rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + b\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle$.

(7) $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}\rangle = a^2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2ab\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + b^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$.

(8) $\left\langle \sum_{p\in[n]} a_p\mathbf{x}_p, \sum_{q\in[m]} b_q\mathbf{y}_q \right\rangle = \sum_{(p,q)\in[n]\times[m]} a_pb_q\langle \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_q\rangle$.

(9) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a\mathbf{x}, b\mathbf{y}\rangle = 0$.

(10) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$,
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y}\rangle = 0$.

(11) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = 0$.

Παραδείγματα (Για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$.)

1. Ισχύει ότι

$$\langle 2(1,2,3), (-1,-1,5)\rangle = \langle (2,4,6), (-1,-1,5)\rangle = (-2) + (-4) + 30 = 24$$

και

$$2\langle (1,2,3), (-1,-1,5)\rangle = 2((-1) + (-2) + 15) = 2 \cdot 12 = 24,$$

(επαληθεύοντας την ιδιότητα 1).

2. Ισχύει ότι
$$\big\langle 2(1,3,5), 2(1,3,5)\big\rangle = 4\big\langle (1,3,5),(1,3,5)\big\rangle,$$
(επαληθεύοντας την ιδιότητα 2).

Πράγματι,
$$2(1,3,5), 2(1,3,5) = \big\langle (2,6,10),(2,6,10)\big\rangle = 4+36+100 = 140,$$
και
$$4\big\langle (1,3,5),(1,3,5)\big\rangle = 4(4+9+25) = 4\cdot 35 = 140.$$

3. Ισχύει ότι
$$\big\langle (1,2,3), 5(-1,-1,2)+3(1,-1,4)\big\rangle = 5\big\langle (1,2,3),(-1,-1,2)\big\rangle + 3\big\langle (1,2,3),(1,-1,4)\big\rangle,$$
(επαληθεύοντας την ιδιότητα 6).

Πράγματι,
$$\begin{aligned}\big\langle (1,2,3), 5(-1,-1,2)+3(1,-1,4)\big\rangle &= \big\langle (1,2,3),(-5+3,-5-3,10+12)\big\rangle\\ &= \big\langle (1,2,3),(-2,-8,22)\big\rangle = -2-16+66 = 48\end{aligned}$$
και
$$\begin{aligned}5\big\langle (1,2,3),(-1,-1,2)\big\rangle + 3\big\langle (1,2,3),(1,-1,4)\big\rangle &= 5(-1-2+6)+3(1-2+12)\\ &= 5\cdot 3+3\cdot 11 = 15+33 = 48.\end{aligned}$$

4. Ισχύει ότι
$$\big\langle (2,3,-1),(4,-1,5)\big\rangle = 8-3-5 = 0.$$
Άρα και
$$\big\langle 7(2,3,-1), 3(4,-1,5)\big\rangle = 0.$$
Πράγματι,
$$\big\langle 7(2,3,-1),3(4,-1,5)\big\rangle = \big\langle (14,21,-7),(12,-3,15)\big\rangle = 14\cdot 12+21(-3)+(-7)\cdot 15 = 0.$$
(επαληθεύοντας την ιδιότητα 9).

Πρόταση 10.2 (Ανισότητα Cauchy - Schwarz). *Έστω $(V,+,\cdot)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\rangle$. Τότε,*
$$\big|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\big| \leqslant \sqrt{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}\cdot\sqrt{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}$$
όπου $|a|$ είναι η απόλυτη τιμή του a. Η ισότητα ισχύει μόνο αν τα $\mathbf{x},\mathbf{y}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. Αρκεί να δειχθεί ότι
$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle^2 \geqslant 0$$
Αν $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, τότε προφανώς η ανισότητα ισχύει.

Έστω ότι $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. (Η απόδειξη είναι αρκετά τεχνική και χρησιμοποιεί επανειλημμένα την ιδιότητα $\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, a\mathbf{y}\rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$.) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \\
&= \langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle - \langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \\
&= \langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \\
&= \frac{1}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y}\rangle \\
&= \frac{1}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle \\
&= \frac{1}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι

$$\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle = 0$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle &= \langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle - \langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 = \frac{1}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle \geqslant 0,$$

διότι $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle \geqslant 0$ για κάθε $\mathbf{z} \in V$. (Εδώ $\mathbf{z} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}$.)

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle = 0$$

ή, ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

και επειδή $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \neq 0$ έπεται ότι τα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. □

Παρατηρήσεις:

1. Στην απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz αποδείχθηκε η σχέση

   $$\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\mathbf{x}\rangle = 0,$$

   την ερμηνεία της οποίας θα δούμε σε επόμενη παράγραφο που αφορά τις προβολές διανυσμάτων.

2. Η ανισότητα Cauchy - Schwarz θεωρείται από τις πιο σημαντικές ανισότητες. Με τη βοήθειά της, μπορούν να αποδειχθούν πολλές άλλες ανισότητες.

Παραδείγματα
Στον $\mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, τότε έχουμε ότι

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k,$$

$$\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

και

$$\sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Επομένως,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_ky_k \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ή, ισοδύναμα, υψώνοντας στο τετράγωνο,

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Από την ανισότητα αυτή μπορούν να προκύψουν διάφορες ανισότητες ως ειδικές περιπτώσεις:

Παράδειγμα. *Να δειχθεί ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$a^2 + b^2 + (1 - a - b)^2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

Λύση. Από την προηγούμενη ανισότητα για $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = 1 - a - b$ και $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ και $y_3 = 1$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} (a \cdot 1 + b \cdot 1 + (1 - a - b) \cdot 1)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + (1 - a - b)^2) \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2) \Leftrightarrow \\ 1^2 \leqslant (a^2 + b^2 + (1 - a - b)^2) \cdot 3 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{3} \leqslant a^2 + b^2 + (1 - a - b)^2 \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα $(a, b, 1-a-b)$ και $(1, 1, 1)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή όταν $a = b = 1 - a - b = \lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, επομένως

$$\lambda = 1 - \lambda - \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

άρα, η ισότητα ισχύει όταν

$$a = b = \frac{1}{3}.$$

Πράγματι, ισχύει ότι

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$ □

Παράδειγμα. *Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης*

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (2x+3y-8)^2$$

Λύση. Αν τεθεί $\mathbf{x} = (x+1, y-2, 2x+3y-8)$ τότε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (x+1)^2 + (y-2)^2 + (2x+3y-8)^2.$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την προηγούμενη ιδέα αναζητούμε διάνυσμα $\mathbf{y} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ έτσι ώστε η παράσταση Π όπου:

$$\Pi = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle (x+1, y-2, 2x+3y-8), (c_1, c_2, c_3) \rangle = c_1(x+1) + c_2(y-2) + c_3(2x+3y-8)$$

να μην περιέχει x και y.

Ισχύει ότι

$$\Pi = (c_1 + 2c_3)x + (c_2 + 3c_3)y + c_1 - 2c_2 - 8c_3.$$

Πρέπει

$$\begin{cases} c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2c_3 \\ c_2 = -3c_3 \end{cases}$$

Άρα, αν επιλέξουμε για παράδειγμα $c_3 = -1$ έχουμε ότι $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $\mathbf{y} = (2, 3, -1)$ και $\Pi = 2 - 2 \cdot 3 - 8 \cdot (-1) = 4$.

Για τα διανύσματα $\mathbf{x} = (x+1, y-2, 2x+3y-8)$ και $\mathbf{y} = (2, 3, -1)$ από την ανισότητα Cauchy - Schwarz προκύπτει ότι

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \Leftrightarrow$$
$$(2(x+1) + 3(y-2) + (-1)(2x+3y-8))^2 \leqslant ((x+1)^2 + (y-2)^2 + (2x+3y-8)^2)(2^2 + 3^2 + (-1)^2)$$

ή, ισοδύναμα

$$4^2 \leqslant ((x+1)^2 + (y-2)^2 + (2x+3y-8)^2) \cdot 14$$

άρα,

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (2x+3y-8)^2 \geqslant \frac{16}{14}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα $\mathbf{x} = (x+1, y-2, 2x+3y-8)$ και $\mathbf{y} = (2, 3, -1)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή όταν $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\begin{cases} x + 1 = 2\lambda \\ y - 2 = 3\lambda \\ 2x + 3y - 8 = (-1)\lambda \end{cases}$$

οπότε

$$4 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 14\lambda$$

επομένως

$$\lambda = \frac{4}{14}$$

άρα

$$x = -\frac{6}{14}, \quad y = \frac{40}{14}.$$

Τότε

$$(x+1)^2 = \left(2 \cdot \frac{4}{14}\right)^2$$

$$(y-2)^2 = \left(3 \cdot \frac{4}{14}\right)^2$$

$$(2x+3y-8)^2 = \left(-\frac{4}{14}\right)^2$$

και

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (2x+3y-8)^2 = \frac{8^2+12^2+4^2}{14^2} = \frac{64+144+16}{14^2} = \frac{16}{14}. \qquad \square$$

10.2 Διανυσματικοί χώροι με norm

Έστω $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\| \, \| : V \to \mathbb{R}$.

Η απεικόνιση $\| \, \|$ λέγεται **norm** επί του $\mathcal{V}$ αν και μόνο αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ και για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

1. $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$,
2. $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (τριγωνική ανισότητα),
4. $\|a\mathbf{x}\| = |a| \, \|\mathbf{x}\|$.

Το $(\mathcal{V}, \| \, \|)$ λέγεται **πραγματικός διανυσματικός χώρος με norm**.

Παραδείγματα

Παράδειγμα. *Η απεικόνιση* $\| \, \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *όπου, αν* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, *τότε*

$$\|\mathbf{x}\| = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

είναι μια norm επί του $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Απόδειξη. Πράγματι, αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, τότε

i)

$$\|\mathbf{x}\| = |x_1| + \cdots + |x_n| \geqslant 0.$$

ii)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| = 0 &\Leftrightarrow |x_1| + \cdots + |x_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = (0, \ldots, 0) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &= \left\|(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)\right\| \\ &= |x_1+y_1| + \cdots + |x_n+y_n| \\ &\leqslant |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\ &= (|x_1| + \cdots + |x_n|) + (|y_1| + \cdots + |y_n|) \\ &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\|a\mathbf{x}\| &= \big\|a(x_1,\dots,x_n)\big\| = \big\|(ax_1,\dots,ax_n)\big\| \\ &= |ax_1| + \cdots + |ax_n| = |a|\,|x_1| + \cdots + |a|\,|x_n| \\ &= |a|\,(|x_1| + \cdots + |x_n|) = |a|\,\|\mathbf{x}\|\,. \end{aligned}$$ □

Παρατήρηση: Η norm αυτή ονομάζεται **1-norm** και συνήθως συμβολίζεται με $\|\ \|_1$. Προφανώς, αυτό το παράδειγμα για $n = 1$ αποδεικνύει ότι η απόλυτη τιμή είναι norm στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα. *Η απεικόνιση* $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *όπου, αν* $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$*, τότε*

$$\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$$

είναι μια norm επί του $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Απόδειξη. Πράγματι, αν $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_n)$, τότε

i)

$$\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} \geqslant 0.$$

ii)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| = 0 &\Leftrightarrow \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_1| = \cdots = |x_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = (0,\dots,0) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &= \big\|(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\big\| \\ &= \max\{|x_1+y_1|,\cdots,|x_n+y_n|\} \\ &\leqslant \max\{|x_1|+|y_1|,\cdots,|x_n|+|y_n|\} \\ &\leqslant \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} + \max\{|y_1|,\dots,|y_n|\} \\ &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\,.\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\|a\mathbf{x}\| &= \big\|a(x_1,\dots,x_n)\big\| \\ &= \big\|(ax_1,\dots,ax_n)\big\| \\ &= \max\{|ax_1|,\cdots,|ax_n|\} \\ &= \max\{|a|\,|x_1|,\cdots+|a|\,|x_n|\} \\ &= |a|\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\} \\ &= |a|\,\|\mathbf{x}\|\,.\end{aligned}$$ □

Παρατήρηση: Η norm αυτή ονομάζεται **max norm** και συνήθως συμβολίζεται με $\|\ \|_\infty$.

Παράδειγμα. *Αποδεικνύεται (άσκηση) ότι η απεικόνιση* $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *όπου, αν* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *τότε*

$$\|\mathbf{x}\| = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}$$

όπου $p \in \mathbb{N}^*$ *είναι μια norm επί του* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, *η οποία ονομάζεται p-**norm** και συμβολίζεται με* $\|\ \|_p$.

Παράδειγμα. *Η απεικόνιση* $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ *όπου* $(V, +, \cdot)$ *το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται*[α΄] *στο* $[a, b]$ *και αν* $f \in V$ *τότε*

$$\|f\| = \max\{\left|f(x)\right| : x \in [a, b]\},$$

είναι μια norm επί του V.

[α΄] Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Πράγματι, αν $f, g \in V$ τότε

i)

$$\|f\| = \max\{\left|f(x)\right| : x \in [a, b]\} \geqslant 0.$$

ii)

$$\begin{aligned} \|f\| = 0 &\Leftrightarrow \max\{\left|f(x)\right| : x \in [a, b]\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left|f(x)\right| = 0 \text{ για κάθε } x \in [a, b] \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \max\{\left|f(x) + g(x)\right| : x \in [a, b]\} \\ &\leqslant \max\{\left|f(x)\right| + \left|g(x)\right| : x \in [a, b]\} \\ &\leqslant \max\{\left|f(x)\right| : x \in [a, b]\} + \max\{\left|g(x)\right| : x \in [a, b]\} \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \|af\| &= \max\{\left|af(x)\right| : x \in [a, b]\} \\ &= \max\{|a| \left|f(x)\right| : x \in [a, b]\} \\ &= |a| \max\{\left|f(x)\right| : x \in [a, b]\} \\ &= |a|\,\|f\|. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα. *Έστω* $\|\ \|$ *οποιαδήποτε norm διανυσμάτων του* $\mathbb{R}^n$. *Η απεικόνιση* $\|\ \| : \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathbb{R}$, *όπου* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *και* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *με*

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

είναι μια norm επί του $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$.

Απόδειξη. Πράγματι, αν $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ τότε

i)

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geqslant 0.$$

ii)

$$\begin{aligned}
\|A\| = 0 &\Leftrightarrow \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0\\
&\Leftrightarrow \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \|A\mathbf{x}\| = 0\\
&\Leftrightarrow \|A\mathbf{x}\| = 0 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.\\
&\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbb{O} \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.\\
&\Leftrightarrow A = \mathbb{O}.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\|A + B\| &= \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\left\|(A+B)\mathbf{x}\right\|}{\|\mathbf{x}\|}\\
&= \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x} + B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\\
&\leqslant \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\\
&\leqslant \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\\
&= \|A\| + \|B\|.
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
\|aA\| &= \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|aA\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\\
&= \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{|a|\,\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\\
&= |a| \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\\
&= |a|\,\|A\|.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση: Οι norm μητρών που ορίζονται με βάση κάποια norm του $\mathbb{R}^n$, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αντιμετωπίζουν τις μήτρες ως τελεστές (γραμμικές απεικονίσεις). Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι να ορίσουμε norm μητρών, όπως για παράδειγμα η Frobenius norm που ορίζεται σε επόμενη ενότητα.

Επίσης για τις norm μητρών, που ορίζονται όπως στο παράδειγμα, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

Πρόταση 10.3. *Έστω $\|\ \|$ οποιαδήποτε norm διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ και*

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

η αντίστοιχη norm μήτρας. Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι:

(i) $\|A\mathbf{x}\| \leqslant \|A\|\,\|\mathbf{x}\|$.

(ii) $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

Απόδειξη.

(i) Αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ η ανισότητα ισχύει. Αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, προφανώς

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|}$$

οπότε

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|A\| \Leftrightarrow \|A\mathbf{x}\| \leqslant \|A\|\,\|\mathbf{x}\|\,.$$

(ii) Από την προηγούμενη ιδιότητα, για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \left\|A(B\mathbf{x})\right\| \leqslant \|A\|\,\|B\mathbf{x}\| \leqslant \|A\|\,\|B\|\,\|\mathbf{x}\| &\Leftrightarrow \frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|A\|\,\|B\| \\ &\Leftrightarrow \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|A\|\,\|B\| \\ &\Leftrightarrow \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|\,. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 10.4. *Έστω $\|\ \|$ οποιαδήποτε norm διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ και*

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

η αντίστοιχη norm μήτρας. Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι:

(i) Αν $\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$, τότε $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$.

(ii) Αν $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$, τότε $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{m} \left|a_{ij}\right|$.

(iii) Αν $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, τότε $\|A\|$ ισούται με την (θετική) τετραγωνική ρίζα της μεγαλύτερης ιδιοτιμής της μήτρας A^tA.

Επιπλέον, για τις norm εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

Πρόταση 10.5. *Έστω $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_{\mathbb{F}})$ ένας διανυσματικός χώρος με norm (όπου $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Τότε,*

(i) $\|\mathbf{0}\| = 0$.

(ii) $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\| > 0$.

(iii) $\|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

(iv) $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n\| \leqslant \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\| + \cdots + \|\mathbf{x}_n\|$.

(v) $\big|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,\big| \leqslant \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$.

(vi) $\big|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,\big| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

Παρατήρηση: Επειδή ορίζονται τόσες πολλές norm σε ένα διανυσματικό χώρο V (για παράδειγμα στον $\mathbb{R}^n$ ορίζονται άπειρες το πλήθος norm) τίθεται το ερώτημα κατά πόσον οι διαφορετικές norm είναι συμβατές μεταξύ τους. Το επόμενο αποτέλεσμα μας εξασφαλίζει ότι σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης όλες οι norm είναι κατά κάποιο τρόπο ισοδύναμες.

Πρόταση 10.6. *Αν $\|\ \|_a$ και $\|\ \|_b$ είναι δύο norm σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, τότε υπάρχουν σταθερές $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει ότι*

$$m\,\|\mathbf{x}\|_a \leqslant \|\mathbf{x}\|_b \leqslant M\,\|\mathbf{x}\|_a\,.$$

10.3 Εσωτερικό γινόμενο και norm

Στις προηγούμενες ενότητες, το εσωτερικό γινόμενο και η norm ορίσθηκαν ανεξάρτητα μεταξύ τους. Στην ενότητα αυτή θα δούμε ένα "φυσικό" τρόπο να ορίσουμε μια norm σε ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Έστω $\mathcal{V} = (V, +, \cdot)$ ένας πραγματικός δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο $\langle\rangle$. Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ ορίζουμε

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}.$$

Η απεικόνιση $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ είναι μια norm επί του V. Πράγματι, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ισχύει ότι

1. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} \geqslant 0$.

2. $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3. $$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle} = \sqrt{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}^2} \\ &\leqslant \sqrt{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}^2 + 2\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right| + \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}^2} \leqslant \sqrt{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}^2 + 2\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle} + \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} + \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}\right)^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} + \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.\end{aligned}$$

4. $\|a\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle a\mathbf{x}, a\mathbf{x}\rangle} = \sqrt{a^2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = |a|\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = |a|\,\|\mathbf{x}\|$.

Ο μη αρνητικός, πραγματικός αριθμός $\|\mathbf{x}\|$ ονομάζεται **norm** (ή **μήκος**) **του διανύσματος** $\mathbf{x}$. (Προφανώς, ισχύει ότι $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$.)

Παρατήρηση: Στα επόμενα, αν δεν αναφέρεται διαφορετικά, θα χρησιμοποιείται ο παραπάνω ορισμός της norm για τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$.

Παραδείγματα

1. Για τον $\mathbb{R}^n$ και το συνήθες εσωτερικό γινόμενο

$$\left\|(x_1, \ldots, x_n)\right\| = \sqrt{\langle (x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n)\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. Για τον $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ και το εσωτερικό γινόμενο $\langle\rangle : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, όπου αν $A, B \in \mathcal{M}_n$ τότε είναι $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$, έχουμε ότι

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2},$$

δηλαδή, η norm της μήτρας A είναι η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των στοιχείων της και ονομάζεται **Frobenius norm**.

Παρατήρηση: Η norm του Frobenius έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες: Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \right\|^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + (-1)^2 + 7^2 + 2^2 + 0^2 + 4^2 + (-4)^2 \\
&= (1^2 + 2^2 + 3^2) + ((-1)^2 + 7^2 + 2^2) + (0^2 + 4^2 + (-4)^2) \\
&= \left\|(1, 2, 3)\right\|^2 + \left\|(-1, 7, 2)\right\|^2 + \left\|(0, 4, -4)\right\|^2 \\
&= (1^2 + (-1)^2 + 0^2) + (2^2 + 7^2 + 4^2) + (3^2 + 2^2 + (-4)^2) \\
&= \left\|(1, -1, 0)\right\|^2 + \left\|(2, 7, 4)\right\|^2 + \left\|(3, 2, -4)\right\|^2
\end{aligned}$$

δηλαδή το τετράγωνο της norm της μήτρας είναι το άθροισμα των τετραγώνων των norm των διανυσμάτων που ορίζουν οι γραμμές της ή οι στήλες της.

Έστω $\mathbf{x} \in V$. Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ λέγεται **μοναδιαίο** αν και μόνο αν $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in V$, το διάνυσμα $\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$ είναι μοναδιαίο.

Πράγματι,

$$\left\|\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}\right\| = \left|\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right| \|\mathbf{x}\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\|\mathbf{x}\| = 1.$$

Αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και $\|\mathbf{x}\| \neq 1$, τότε η εύρεση του διανύσματος $\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$ λέγεται **κανονικοποίηση** του $\mathbf{x}$.

Παράδειγμα: Αν $\mathbf{x} = (2, 4, 4)$ τότε

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6.$$

Η κανονικοποίηση του $\mathbf{x}$ γίνεται βρίσκοντας το διάνυσμα

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} = \frac{1}{6}(2, 4, 4) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Το διάνυσμα $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ είναι μοναδιαίο. Πράγματι,

$$\left\|\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1.$$

Παρατήρηση: Προφανώς, για τη norm διανυσμάτων ισχύουν όλες οι ιδιότητες που προκύπτουν από τις προτάσεις 10.1 και 10.5.

Με τη βοήθεια αυτών, μπορούν να αποδειχθούν διάφορα αποτελέσματα:

Παραδείγματα

1. Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| .$$
Είναι
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2} = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
και
$$\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$
Άρα,
$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
(**Ανισότητα Minkowski**.)

2. Από την Πρόταση 10.2 προκύπτει μια μορφή της ανισότητας Cauchy - Schwarz, η οποία συνδέει εσωτερικό γινόμενο και norm διανυσμάτων. Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ισχύει ότι
$$\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\right| \leqslant \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| .$$
Η ισότητα ισχύει μόνο αν τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

10.4 Γωνία διανυσμάτων

Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Τότε, αφού
$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \leqslant 1,$$
υπάρχει $\theta \in [0, \pi]$, τέτοιο ώστε
$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$
Ο αριθμός θ ονομάζεται **γωνία** των διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ και το πηλίκο αυτό ονομάζεται **συνημίτονο της γωνίας των $\mathbf{x}, \mathbf{y}$**.

Παραδείγματα Για $\mathbf{x} = (1, 1, 4)$ και $\mathbf{y} = (2, 7, 7)$ είναι
$$\cos\theta = \frac{\langle (1,1,4), (2,7,7) \rangle}{\sqrt{\langle (1,1,4), (1,1,4) \rangle}\sqrt{\langle (2,7,7), (2,7,7) \rangle}} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 7}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}\,\sqrt{2^2 + 7^2 + 7^2}} = \frac{37}{6\sqrt{51}}$$
οπότε $\theta = \arccos \dfrac{37}{6\sqrt{51}} \simeq \dfrac{\pi}{5.943} \simeq \dfrac{\pi}{6}$.

Για $\mathbf{x} = (1, -1, 2)$ και $\mathbf{y} = (2, 6, 2)$ είναι
$$\cos\theta = \frac{\langle (1,-1,2), (2,6,2) \rangle}{\sqrt{\langle (1,-1,2), (1,-1,2) \rangle}\sqrt{\langle (2,6,2), (2,6,2) \rangle}} = \frac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\,\sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{6}\sqrt{44}}$$
οπότε $\theta = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Εφαρμογή 10.1. *Έστω ότι έχουμε μια συλλογή από n έγγραφα κειμένου D_1, D_2, …, D_n στην οποία πρόκειται να κάνουμε αρκετές αναζητήσεις με λέξεις κλειδιά (keywords) ή όρους (terms). Ένας κλασσικός τρόπος για να αυξήσουμε την ταχύτητα των αναζητήσεων είναι να κάνουμε προεπεξεργασία των εγγράφων και να φτιάξουμε μια μήτρα όρων – εγγράφων (term -by-document) D η οποία έχει διαστάσεις $m \times n$, όπου m είναι ο αριθμός των διαφορετικών λέξεων κλειδιών ή όρων, στην οποία το στοιχείο της i-γραμμής και j-στήλης είναι ο αριθμός των εμφανίσεων του όρου t_i στο έγγραφο D_j.*

Έτσι, για παράδειγμα σε μια συλλογή με 9 έγγραφα D_1, D_2, …, D_9 για την οποία μας ενδιαφέρει η αναζήτηση με λέξεις κλειδιά που μπορούν να επιλεγούν μεταξύ 5 όρων t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 δημιουργήθηκε η παρακάτω μήτρα όρων - εγγράφων:

$$D = \begin{array}{c|ccccccccc} & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 & D_8 & D_9 \\ \hline t_1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ t_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ t_5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(Σύμφωνα με την μήτρα D, το έγγραφο D_3 περιέχει δύο εμφανίσεις του όρου t_1, καμία εμφάνιση των όρων t_2, t_3 και από μια εμφάνιση των όρων t_4, t_5.)

Αν υποθέσουμε ότι αναζητούμε τους όρους t_2 και t_4 και t_5 ποιο έγγραφο από τα 9 ταιριάζει καλύτερα στην αναζήτησή μας;

Λύση. Εξετάζοντας μια-μία όλες τις στήλες της μήτρας D παρατηρούμε ότι κανένα έγγραφο δεν περιέχει ακριβώς αυτούς τους όρους.

Σύμφωνα με την αναπαράσταση αυτή καθένα από τα έγγραφα D_1, D_2, …, D_9 αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα που ανήκει σε ένα χώρο 5 διαστάσεων με άξονες τα t_1, t_2, …, t_5, ή ισοδύναμα ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^5$. Προκειμένου να επιλέξουμε ποιό από τα D_1, D_2, …, D_9 ταιριάζει καλύτερα στην αναζήτησή μας, θεωρουμε επίσης ότι η αναζήτησή μας αντιστοιχεί στο διάνυσμα

$$\mathbf{q} = (0, 1, 0, 1, 1)$$

(Στην θέση i του $\mathbf{q}$ εμφανίζεται 1 αν η αναζήτησή μας περιέχει τον όρο t_i, αλλιώς εμφανίζεται 0.)

Υπολογίζουμε την ομοιότητα ανάμεσα στο q και τα έγγραφα D_1, D_2, …, D_9 με βάση το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει διάνυσμα q με καθένα από τα διανύσματα-στήλες που αντιστοιχούν σε κάθε έγγραφο D_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$.

Έτσι, αν θ_1, θ_2, …, θ_9 είναι οι γωνίες μεταξύ του q και των D_1, D_2, …, D_9 αντίστοιχα, τότε

$$\cos\theta_1 = \frac{\langle \mathbf{q}, D_1\rangle}{||\mathbf{q}||\,||D_1||} = \frac{\langle (0,1,0,1,1), (1,0,0,1,1)\rangle}{||0,1,0,1,1||\,||1,0,0,1,1||} = \frac{2}{3} \simeq 0.666666$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\langle \mathbf{q}, D_2\rangle}{||\mathbf{q}||\,||D_2||} = \frac{\langle (0,1,0,1,1), (1,1,2,0,2)\rangle}{||0,1,0,1,1||\,||1,1,2,0,2||} = \frac{3}{\sqrt{30}} \simeq 0.547723$$

$$\cos\theta_3 = \frac{\langle \mathbf{q}, D_3\rangle}{||\mathbf{q}||\,||D_3||} = \frac{\langle (0,1,0,1,1), (2,0,0,1,1)\rangle}{||0,1,0,1,1||\,||2,0,0,1,1||} = \frac{2}{\sqrt{18}} \simeq 0.471405$$

$$\cos\theta_4 = \frac{\langle \mathbf{q}, D_4\rangle}{||\mathbf{q}||\,||D_4||} = \frac{\langle (0,1,0,1,1), (0,1,2,0,0)\rangle}{||0,1,0,1,1||\,||0,1,2,0,0||} = \frac{1}{\sqrt{15}} \simeq 0.258199$$

$$\cos\theta_5 = \frac{\langle \mathbf{q}, D_5\rangle}{||\mathbf{q}||\,||D_5||} = \frac{\langle (0,1,0,1,1), (1,0,0,1,0)\rangle}{||0,1,0,1,1||\,||1,0,0,1,0||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0.408248$$

$$\cos\theta_6 = \frac{\langle \mathbf{q}, D_6\rangle}{||\mathbf{q}||\,||D_6||} = \frac{\langle (0,1,0,1,1),(0,1,1,0,1)\rangle}{||0,1,0,1,1||\,||0,1,1,0,1||} = \frac{2}{3} \simeq 0.666666$$
$$\cos\theta_7 = \frac{\langle \mathbf{q}, D_7\rangle}{||\mathbf{q}||\,||D_7||} = \frac{\langle (0,1,0,1,1),(1,1,0,2,0)\rangle}{||0,1,0,1,1||\,||1,1,0,2,0||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707107$$
$$\cos\theta_8 = \frac{\langle \mathbf{q}, D_8\rangle}{||\mathbf{q}||\,||D_8||} = \frac{\langle (0,1,0,1,1),(0,0,1,1,0)\rangle}{||0,1,0,1,1||\,||0,0,1,1,0||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0.408248$$
$$\cos\theta_9 = \frac{\langle \mathbf{q}, D_9\rangle}{||\mathbf{q}||\,||D_9||} = \frac{\langle (0,1,0,1,1),(1,0,1,0,1)\rangle}{||0,1,0,1,1||\,||1,0,1,0,1||} = \frac{1}{3} \simeq 0.333333$$

Με βάση τους υπολογισμούς μας, η μικρότερη γωνία εμφανίζεται μεταξύ του $\mathbf{q}$ και του D_7 (διότι όσο μεγαλύτερο το συνημίτονο της γωνίας θ, τόσο μικρότερη η γωνία θ). Επομένως, το έγγραφο D_7 ταιριάζει καλύτερα στην αναζήτηση των όρων t_2, t_4 και t_5 σε σχέση με τα υπόλοιπα έγγραφα της συλλογής μας.

Επιπλέον, με βάση τα συνημίτονα που υπολογίσαμε μπορούμε να διάταξουμε σε φθίνουσα σειρά (ως προς το ταίριασμα με την αναζήτησή μας) τα έγγραφα της συλλογής ως εξής:

$$D_7, D_1, D_6, D_2, D_3, D_5, D_8, D_9, D_4.$$

Παρατήρηση: Αν δύο έγγραφα περιέχουν ακριβώς τις ίδιες εμφανίσεις που αφορούν όρους της αναζήτησής μας $\mathbf{q}$, αλλά περιέχουν επιπλέον όρους που δεν περιέχονται στην αναζήτησή μας (π.χ. τα D_1, D_3, όπου το D_1 περιέχει μια εμφάνιση του όρου t_1 που δεν εμφανίζεται στην αναζήτηση $\mathbf{q}$, ενώ το D_3 περιέχει δύο εμφανίσεις του όρου t_1), τότε προτιμάται αυτό που περιέχει λιγότερους επιπλέον όρους (αφού με βάση τον τύπο του συνημιτόνου, τα εσωτερικά γινόμενα με το q στον αριθμητή είναι ίσα για τα δύο έγγραφα (π.χ. $\langle \mathbf{q}, D_1\rangle = \langle \mathbf{q}, D_3\rangle = 2$), ενώ το έγγραφο που περιέχει περισσότερους επιπλέον όρους οι οποίοι δεν περιλαμβάνονται στην αναζήτηση θα έχει μεγαλύτερη νόρμα (π.χ. $||D_3|| = \sqrt{6} > \sqrt{3} = ||D_1||$), επομένως μεγαλύτερο παρανομαστή, οπότε και μικρότερο συνημίτονο (πράγματι, $\cos\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{9}} > \frac{2}{\sqrt{18}} = \cos\theta_3$.)). $\square$

10.5 Διανυσματικοί μετρικοί χώροι

Έστω $E \neq \varnothing$. Η απεικόνιση $d : E \times E \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **μετρική** επί του E αν και μόνο αν, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$ ισχύουν:

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$,
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
4. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (τριγωνική ανισότητα).

Ο αριθμός $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ονομάζεται **απόσταση** των $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Το ζεύγος (E, d) ονομάζεται **μετρικός χώρος** αν και μόνο αν η d είναι μια μετρική επί του E.

Επίσης, αν $\varnothing \neq E_1 \subseteq E$, d μια μετρική επί του E και d_1 ο περιορισμός της d στο $E_1 \times E_1$, τότε αποδεικνύεται ότι η d_1 είναι μια μετρική επί του E_1. Ο μετρικός χώρος (E_1, d_1) ονομάζεται **μετρικός υπόχωρος** του (E, d).

Αν $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_F)$, είναι ένας διανυσματικός χώρος και d είναι μια μετρική επί του V, το ζεύγος $(\mathcal{V}, d)$ ονομάζεται **διανυσματικός μετρικός χώρος**.

Παράδειγμα: Ένας διανυσματικός μετρικός χώρος, για τον $(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ δημιουργείται από τη μετρική

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

η οποία ορίζεται ως εξής:

Για $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \in \mathbb{R}$$

Πράγματι, ισχύει ότι

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geqslant 0$
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0 \Leftrightarrow$
   $x_1 - y_1 = 0$ και $x_2 - y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ και $x_2 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
4. Επίσης αποδεικνύεται (άσκηση) ότι
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

Η επόμενη πρόταση συνδέει το εσωτερικό γινόμενο και την norm διανυσμάτων με τις μετρικές.

Πρόταση 10.7. *Εστω $\mathcal{V} = (V, +, \cdot)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ \rangle$. Η απεικόνιση $d : V \times V \to \mathbb{R}$, με*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \qquad \text{για κάθε } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

είναι μια μετρική επί του V.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$. Ισχύει ότι

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geqslant 0$.
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left\|(-1)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\right\| = |-1|\, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
4. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. □

Πόρισμα 10.8. *Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι και μετρικός χώρος, αφού μπορούμε να ορίσουμε $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$.*

Εφαρμογή 10.2. *Έστω $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ένα σύνολο n σημείων του $\mathbb{R}^m$. Το **κέντρο βάρους των** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ορίζεται ως*

$$\mathbf{C} = \frac{1}{n}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n)$$

Για παράδειγμα, για τα σημεία $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (-1, 2, 2), \mathbf{v}_4 = (2, 1, -1)$ του $\mathbb{R}^3$ το κέντρο βάρους είναι το σημείο

$$\mathbf{C} = \frac{1}{4}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) = \left(\frac{3}{4}, \frac{6}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Δίδεται η 25×2 μήτρα P της οποίας οι γραμμές αναπαριστούν τις συντεταγμένες 25 σημείων του $\mathbb{R}^2$.

$$P = \begin{array}{c|cc}
\mathbf{v}_1 & 1.5 & 2.1 \\
\mathbf{v}_2 & 1.3 & 3.15 \\
\mathbf{v}_3 & 1.4 & 4.1 \\
\mathbf{v}_4 & 2.1 & 2.2 \\
\mathbf{v}_5 & 2.2 & 5.1 \\
\mathbf{v}_6 & 3.15 & 8.1 \\
\mathbf{v}_7 & 3.2 & 9.2 \\
\mathbf{v}_8 & 3.3 & 10.25 \\
\mathbf{v}_9 & 3.5 & 11.15 \\
\mathbf{v}_{10} & 3.1 & 12.1 \\
\mathbf{v}_{11} & 3.4 & 13.2 \\
\mathbf{v}_{12} & 4 & 10.2 \\
\mathbf{v}_{13} & 4.1 & 11.1 \\
\mathbf{v}_{14} & 4.15 & 12.5 \\
\mathbf{v}_{15} & 4.2 & 13.6 \\
\mathbf{v}_{16} & 5.1 & 9.7 \\
\mathbf{v}_{17} & 5.3 & 11.1 \\
\mathbf{v}_{18} & 6.1 & 1.4 \\
\mathbf{v}_{19} & 6.4 & 2.3 \\
\mathbf{v}_{20} & 6.2 & 3.8 \\
\mathbf{v}_{21} & 7.1 & 1.4 \\
\mathbf{v}_{22} & 7.2 & 2.5 \\
\mathbf{v}_{23} & 7.15 & 3.3 \\
\mathbf{v}_{24} & 8.1 & 3.1 \\
\mathbf{v}_{25} & 8.4 & 4.5
\end{array}$$

Να χωρισθούν τα 25 σημεία $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{25}$ σε 3 ομάδες (συστάδες) έτσι ώστε τα αθροίσματα των αποστάσεων κάθε σημείου από το κέντρο βάρους της ομάδας στην οποία ανήκει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο.

Λύση. Ένας απλός επαναληπτικός αλγόριθμος για την διαμέριση σημείων του $\mathbb{R}^n$ σε k ομάδες είναι ο λεγόμενος **αλγόριθμος K-means.**

Για την εφαρμογή του αλγορίθμου πρέπει να επιλέξουμε το αριθμό των ομάδων k καθώς επίσης και την μετρική που θα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό των αποστάσεων.

Η διατύπωση του αλγορίθμου K-means είναι πολύ απλή:

Είσοδος: Ένα σύνολο σημείων δεδομένων $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ του $\mathbb{R}^m$, ένας φυσικός αριθμός k

Έξοδος: Ένα σύνολο k σημείων κέντρων βαρών $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$.

Βήμα 1 Αρχικά επιλέγονται τυχαία k σημεία $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$ του $\mathbb{R}^m$, τα οποία αποτελούν τα προσωρινά κέντρα βάρους των ζητούμενων k ομάδων. Για κάθε σημείο $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ υπολογίζονται οι αποστάσεις του από τα k κέντρων βαρών $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$ και τοποθετείται στην ομάδα με το πλησιέστερο κέντρο βάρους.

Βήμα 2 Στην συνέχεια υπολογίζονται τα κέντρα βάρους $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$ κάθε ομάδας με βάση τα σημεία $\mathbf{v}_i$ που τοποθετήθηκαν σε αυτή.

Βήμα 3 Έπειτα υπολογίζονται εκ νέου οι αποστάσεις των σημείων $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$ από τα κέντρα βάρους $\mathbf{C}_j$, $j = 1, \ldots, k$ και το καθένα τοποθετείται στην ομάδα με το πλησιέστερο κέντρο βάρους.

Βήμα 4 Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 μέχρις ότου να μην υπάρχει καμία αλλαγή στις τοποθετήσεις των σημείων $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, ή μέχρις ότου τα κέντρα βάρους C_j, $j = 1, \ldots, k$ να αλλάζουν πολύ λίγο από την προηγούμενη επανάληψη.

Για παράδειγμα, έστω ότι επιλέγουμε ως προσωρινά κέντρα των 3 ζητούμενων ομάδων σημείων τα σημεία

$$\mathbf{C}_1 = (1,1), \mathbf{C}_2 = (5,5), \mathbf{C}_3 = (8,8)$$

και έστω ότι επιλέγουμε ως μετρική (απόσταση) στο $\mathbb{R}^2$ την συνάρτηση $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Τότε οι αποστάσεις κάθε σημείου $\mathbf{v}_i$ από κάθε ένα από τα κέντρα $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ είναι

$\mathbf{v}_i$	$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{C}_1)$	$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{C}_2)$	$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{C}_3)$	Ομάδα
$\mathbf{v}_1$	1.2083	4.54533	8.77838	1
$\mathbf{v}_2$	2.17083	4.13673	8.27118	1
$\mathbf{v}_3$	3.1257	3.7108	7.66616	1
$\mathbf{v}_4$	1.62788	4.03113	8.27345	1
$\mathbf{v}_5$	4.272	2.80179	6.4846	2
$\mathbf{v}_6$	7.41839	3.61006	4.85103	2
$\mathbf{v}_7$	8.48999	4.56946	4.94773	2
$\mathbf{v}_8$	9.53166	5.51838	5.21081	3
$\mathbf{v}_9$	10.4533	6.33028	5.49295	3
$\mathbf{v}_{10}$	11.2969	7.34983	6.38905	3
$\mathbf{v}_{11}$	12.4338	8.35464	6.94262	3
$\mathbf{v}_{12}$	9.67678	5.29528	4.56508	3
$\mathbf{v}_{13}$	10.565	6.16604	4.98197	3
$\mathbf{v}_{14}$	11.9236	7.54801	5.9222	3
$\mathbf{v}_{15}$	13.	8.63713	6.76757	3
$\mathbf{v}_{16}$	9.61769	4.70106	3.36155	3
$\mathbf{v}_{17}$	10.9772	6.10737	4.11096	3
$\mathbf{v}_{18}$	5.11566	3.76431	6.86804	2
$\mathbf{v}_{19}$	5.55428	3.04138	5.9203	2
$\mathbf{v}_{20}$	5.90593	1.69706	4.56946	2
$\mathbf{v}_{21}$	6.1131	4.16773	6.66108	2
$\mathbf{v}_{22}$	6.37887	3.33017	5.55788	2
$\mathbf{v}_{23}$	6.56601	2.74089	4.77624	2
$\mathbf{v}_{24}$	7.40405	3.63593	4.90102	2
$\mathbf{v}_{25}$	8.18596	3.43657	3.52278	2

Υπολογίζουμε ξανά τα κέντρα βαρών των 3 ομάδων με βάση την τοποθέτηση που κάναμε:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{4}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) = (1.575, 2.8875)$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{11}(\mathbf{v}_5 + \mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_7 + \mathbf{v}_{18} + \mathbf{v}_{19} + \mathbf{v}_{20} + \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{22} + \mathbf{v}_{23} + \mathbf{v}_{24} + \mathbf{v}_{25}) = (5.92727, 4.06364)$$

$$\mathbf{C}_3 = \frac{1}{10}(\mathbf{v}_8 + \mathbf{v}_9 + \mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_{11} + \mathbf{v}_{12} + \mathbf{v}_{13} + \mathbf{v}_{14} + \mathbf{v}_{15} + \mathbf{v}_{16} + \mathbf{v}_{17}) = (4.015, 11.49)$$

Υπολογίζουμε ξανά τις αποστάσεις κάθε σημείου $\mathbf{v}_i$ από κάθε ένα από τα (νέα) κέντρα $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$:

$\mathbf{v}_i$	$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{C}_1)$	$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{C}_2)$	$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{C}_3)$	Ομάδα
$\mathbf{v}_1$	0.791063	4.8432	9.72097	1
$\mathbf{v}_2$	0.380173	4.71661	8.77079	1
$\mathbf{v}_3$	1.22506	4.52742	7.83903	1
$\mathbf{v}_4$	0.865033	4.25689	9.48532	1
$\mathbf{v}_5$	2.29908	3.86867	6.64276	1
$\mathbf{v}_6$	5.44525	4.89953	3.49862	3
$\mathbf{v}_7$	6.5183	5.81551	2.4307	3
$\mathbf{v}_8$	7.56188	6.72113	1.43137	3
$\mathbf{v}_9$	8.48378	7.49054	0.61711	3
$\mathbf{v}_{10}$	9.33787	8.51919	1.09969	3
$\mathbf{v}_{11}$	10.4727	9.47946	1.81723	3
$\mathbf{v}_{12}$	7.70411	6.4319	1.29009	3
$\mathbf{v}_{13}$	8.5919	7.26975	0.399155	3
$\mathbf{v}_{14}$	9.95142	8.62153	1.01898	3
$\mathbf{v}_{15}$	11.0294	9.69152	2.11809	3
$\mathbf{v}_{16}$	7.67045	5.69675	2.09316	3
$\mathbf{v}_{17}$	9.0178	7.06426	1.34288	3
$\mathbf{v}_{18}$	4.76322	2.66923	10.3032	2
$\mathbf{v}_{19}$	4.86064	1.8259	9.49444	2
$\mathbf{v}_{20}$	4.71416	0.379325	7.99439	2
$\mathbf{v}_{21}$	5.72174	2.91037	10.5511	2
$\mathbf{v}_{22}$	5.63833	2.01614	9.53752	2
$\mathbf{v}_{23}$	5.59024	1.4416	8.76951	2
$\mathbf{v}_{24}$	6.52846	2.37684	9.33163	2
$\mathbf{v}_{25}$	7.0129	2.51094	8.25157	2

Παρατηρήστε ότι στην επανάληψη αυτή έγιναν ορισμένες αλλαγές: Στο σημείο $\mathbf{v}_5$ από την ομάδα 2 τοποθετήθηκε τώρα στην ομάδα 1, τα σημεία $\mathbf{v}_6$, $\mathbf{v}_7$ από την ομάδα 2 μετακινήθηκαν στην ομάδα 3.

Υπολογίζουμε ξανά τα κέντρα βαρών των 3 ομάδων με βάση την (νέα) τοποθέτηση που κάναμε:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{5}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5) = (1.7, 3.33)$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{8}(\mathbf{v}_{18} + \mathbf{v}_{19} + \mathbf{v}_{20} + \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{22} + \mathbf{v}_{23} + \mathbf{v}_{24} + \mathbf{v}_{25}) = (7.08125, 2.7875)$$

$$\mathbf{C}_3 = \frac{1}{12}(\mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_7 + \mathbf{v}_8 + \mathbf{v}_9 + \mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_{11} + \mathbf{v}_{12} + \mathbf{v}_{13} + \mathbf{v}_{14} + \mathbf{v}_{15} + \mathbf{v}_{16} + \mathbf{v}_{17}) = (3.875, 11.0167)$$

Υπολογίζουμε ξανά τις αποστάσεις κάθε σημείου $\mathbf{v}_i$ από κάθε ένα από τα (νέα) κέντρα $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$,

$\mathbf{C}_3$:

$\mathbf{v}_i$	$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{C}_1)$	$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{C}_2)$	$d(\mathbf{v}_i, \mathbf{C}_3)$	Ομάδα
$\mathbf{v}_1$	1.24615	5.62343	9.22758	1
$\mathbf{v}_2$	0.438634	5.7926	8.27741	1
$\mathbf{v}_3$	0.826378	5.83089	7.34618	1
$\mathbf{v}_4$	1.19871	5.01578	8.9936	1
$\mathbf{v}_5$	1.83927	5.40132	6.14922	1
$\mathbf{v}_6$	4.98552	6.60889	3.00546	3
$\mathbf{v}_7$	6.05862	7.49562	1.93805	3
$\mathbf{v}_8$	7.10256	8.36581	0.95836	3
$\mathbf{v}_9$	8.02449	9.09707	0.397987	3
$\mathbf{v}_{10}$	8.88104	10.1278	1.33198	3
$\mathbf{v}_{11}$	10.0153	11.0441	2.23437	3
$\mathbf{v}_{12}$	7.24478	8.02741	0.826211	3
$\mathbf{v}_{13}$	8.13221	8.83094	0.239925	3
$\mathbf{v}_{14}$	9.49165	10.1452	1.50858	3
$\mathbf{v}_{15}$	10.5699	11.1898	2.60366	3
$\mathbf{v}_{16}$	7.22059	7.19083	1.79842	3
$\mathbf{v}_{17}$	8.56346	8.50121	1.42743	3
$\mathbf{v}_{18}$	4.80467	1.69941	9.87074	2
$\mathbf{v}_{19}$	4.81154	0.83771	9.07505	2
$\mathbf{v}_{20}$	4.52448	1.3423	7.58198	2
$\mathbf{v}_{21}$	5.73454	1.38763	10.1431	2
$\mathbf{v}_{22}$	5.56227	0.311059	9.14275	2
$\mathbf{v}_{23}$	5.45008	0.517091	8.3829	2
$\mathbf{v}_{24}$	6.40413	1.0656	8.97356	2
$\mathbf{v}_{25}$	6.80139	2.16142	7.93366	2

Παρατηρήστε ότι στην επανάληψη αυτή δεν έγινε καμία αλλαγή στις ομάδες. Επομένως, ο αλγόριθμος ολοκληρώθηκε. Τα ζητούμενα κέντρα είναι τα σημεία

$$\mathbf{C}_1 = (1.7, 3.33), \mathbf{C}_2 = (7.08125, 2.7875), \mathbf{C}_3 = (3.875, 11.0167)$$

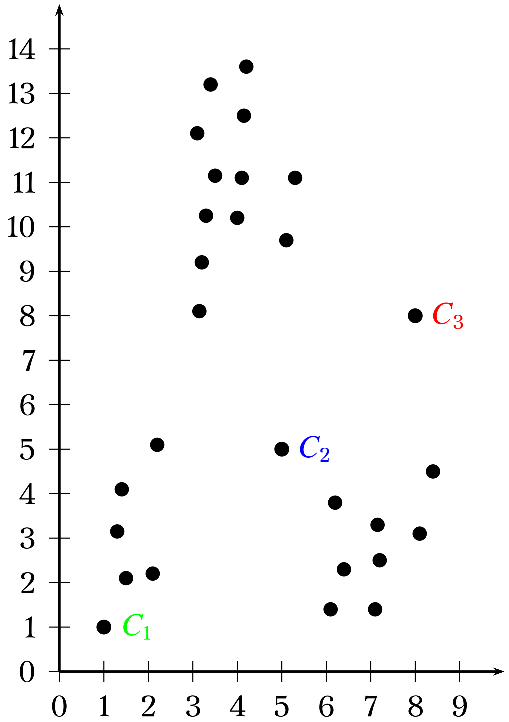
και οι 3 ομάδες είναι τα παρακάτω σύνολα:

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$$

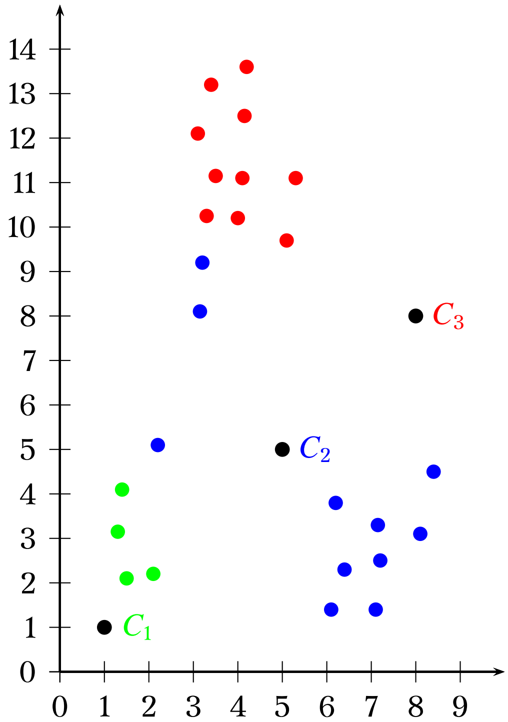
$$\{\mathbf{v}_8, \mathbf{v}_9, \mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{13}, \mathbf{v}_{14}, \mathbf{v}_{15}, \mathbf{v}_{16}, \mathbf{v}_{17}\}$$

$$\{\mathbf{v}_{18}, \mathbf{v}_{19}, \mathbf{v}_{20}, \mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \mathbf{v}_{23}, \mathbf{v}_{24}, \mathbf{v}_{25}\}$$

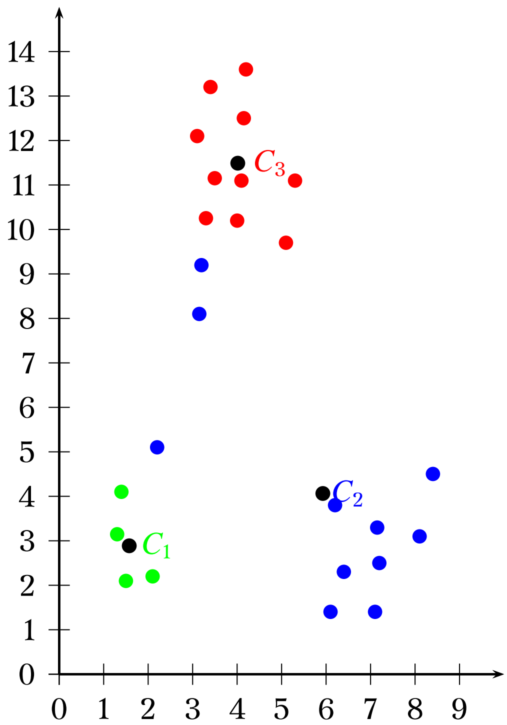
Επειδή τα σημεία $\mathbf{v}_i$ ανήκουν στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ μπορούμε να δούμε και οπτικά την διαδικασία εκτέλεσης του αλγορίθμου K-means



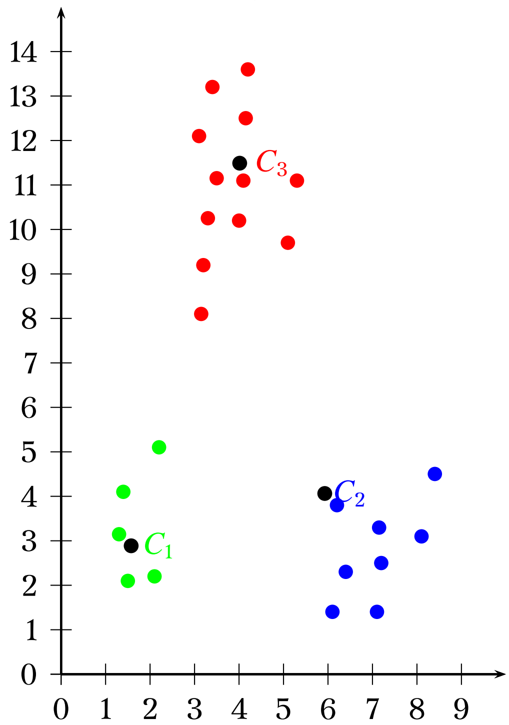
1. Επιλογή των $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$



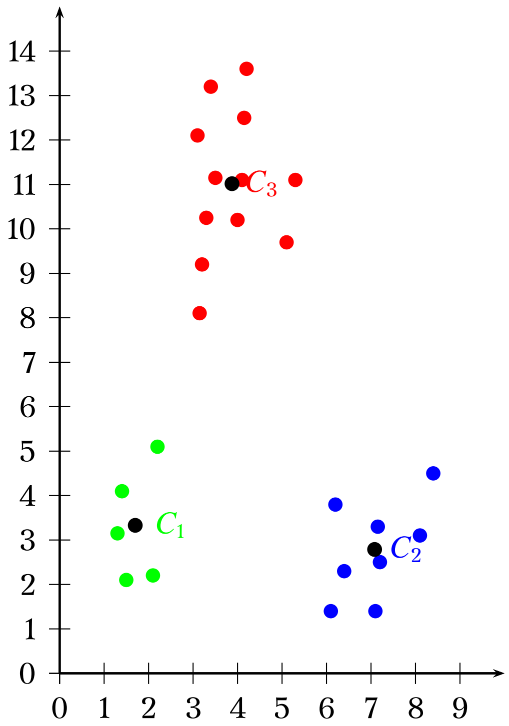
2. Δημιουργία ομάδων



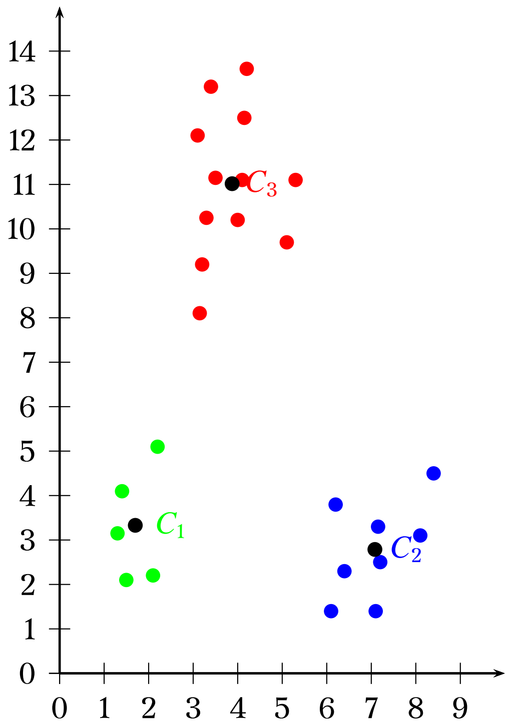
3. Νέος υπολογισμός των $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$



4. Δημιουργία νέων ομάδων



5. Νέος υπολογισμός των $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$



6. Δημιουργία τελικών ομάδων

Παρατηρήσεις: Ο αλγόριθμος K-means διαθέτει πολλές παραλλαγές.

Η απόδοση του εξαρτάται από την μορφή των δεδομένων, από την μετρική που επιλέγουμε και από την αρχική επιλογή των k κέντρων βαρών. Συνήθως, γίνονται πολλές εκτελέσεις του αλγορίθμου με διαφορετικές αρχικές επιλογές κέντρων βαρών και επιλέγεται η διαμέριση που έχει το μικρότερο συνολικό άθροισμα αποστάσεων κάθε σημείου από το κέντρο βάρους της ομάδας στην οποία ανήκει.

Το οπτικό πλεονέκτημα που είχαμε στο παράδειγμα μας δεν υφίσταται σε χώρους με διάσταση 4 ή παραπάνω. $\square$

10.6 Ορθογωνιότητα

Στα επόμενα θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle\rangle$. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Το $\mathbf{x}$ ονομάζεται **ορθογώνιο** (ή **κάθετο**) στο $\mathbf{y}$ αν και μόνο αν

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

(άρα και $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$, δηλαδή και το $\mathbf{y}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{x}$).

Άρα, λέμε ότι τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα**, και γράφουμε $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Προφανώς, αν $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι ορθογώνια τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και τα $a\mathbf{x}$ και $b\mathbf{y}$ είναι επίσης ορθογώνια.

Παράδειγμα: Τα διανύσματα $(1, -1, 1)$, $(-2, -1, 1)$ του $\mathbb{R}^3$, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, είναι ορθογώνια. Πράγματι, ισχύει ότι $\langle (1, -1, 1), (-2, -1, 1) \rangle = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$.

Έστω $\varnothing \neq A \subseteq V$.

(1) Το σύνολο A ονομάζεται **ορθογώνιο** αν και μόνο αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

(Ένα μονοσύνολο θεωρείται πάντα ορθογώνιο.)

(2) Το A ονομάζεται **ορθοκανονικό** αν και μόνο αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ ισχύει ότι

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \text{ και } \|\mathbf{x}\| = 1.$$

Πρόταση 10.9. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ και $\varnothing \neq A \subseteq V \backslash \{\mathbf{0}\}$. Αν A είναι ορθογώνιο, τότε είναι και ελεύθερο, (δηλαδή τα στοιχεία του είναι γραμμικά ανεξάρτητα).*

Απόδειξη. Έστω ότι το A αποτελείται από τα ορθογώνια (ανά δύο) διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ με $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ για κάθε $k \in [n]$. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Για κάθε $k \in [n]$ ισχύει ότι

$$\langle \mathbf{v}_k, \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{0} \rangle$$

ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_k, \lambda_1 \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_k, \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{v}_k, \lambda_k \mathbf{v}_k \rangle + \cdots + \langle \mathbf{v}_k, \lambda_n \mathbf{v}_n \rangle = 0 \Leftrightarrow \\
\lambda_1 \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_2 \rangle + \cdots + \lambda_k \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle + \cdots + \lambda_n \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_n \rangle = 0 \overset{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle = 0,\ k \neq j}{\Longleftrightarrow} \\
\lambda_k \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = 0 \Leftrightarrow \\
\lambda_k \|\mathbf{v}_k\|^2 = 0 \overset{\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}}{\Rightarrow} \\
\lambda_k = 0
\end{aligned}$$

Επομένως, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Άρα, τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Πόρισμα 10.10. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ και $\varnothing \neq A \subseteq V \backslash \{\mathbf{0}\}$. Αν A είναι ορθοκανονικό, τότε είναι και ελεύθερο.*

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι η ορθογωνιότητα συνεπάγεται την γραμμική ανεξαρτησία, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Επίσης, σε χώρους με πεπερασμένη διάσταση προκύπτει ότι υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των ορθογώνιων διανυσμάτων. Συγκεκριμένα:

Πόρισμα 10.11. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ και $\dim V = n$. Για κάθε ορθογώνιο σύνολο $A \subseteq V$ ισχύει ότι $|A| \leqslant n$.*

Πρόταση 10.12 (Πυθαγόρειο Θεώρημα). *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ με $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Τότε*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 .$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 .
\end{aligned}$$

□

10.7 Ορθοκανονικές βάσεις

Έστω ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $(\mathcal{V},\langle\rangle)$ και $\varnothing \neq B \subseteq V$.

Το σύνολο B λέγεται **ορθογώνια βάση του** V αν B είναι βάση του V και B είναι ορθογώνιο σύνολο.

Αντίστοιχα, το σύνολο B λέγεται **ορθοκανονική βάση του** V αν B είναι βάση του V και B ορθοκανονικό σύνολο.

Παράδειγμα: Η *κανονική* βάση $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ του $(\mathbb{R}^n, \langle\rangle)$, όπου $\langle\rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο είναι ορθοκανονική.

(Υπενθύμιση: $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, …, $e_n = (0,0,0,\dots,1)$ και $\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.)

Πράγματι, για κάθε $i \in [n]$ ισχύει ότι

$$\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i\rangle} = \sqrt{\left\langle (\underbrace{0,0,\dots,1}_{i \text{ θέσεις}},\dots,0),(\underbrace{0,0,\dots,1}_{i \text{ θέσεις}},\dots,0)\right\rangle} = \sqrt{0+0+\cdots+1+\cdots+0} = \sqrt{1} = 1,$$

ενώ για $i \neq j$ (με $i < j$)

$$\langle e_i, e_j\rangle = \left\langle (\overbrace{\underbrace{0,\dots,1}_{i \text{ θέσεις}},\dots,0}^{j \text{ θέσεις}},\dots,0),(\overbrace{\underbrace{0,\dots,0}_{i \text{ θέσεις}},\dots,1}^{j \text{ θέσεις}},\dots,0)\right\rangle = 0{\cdot}0 + 0{\cdot}0 + \cdots 1\cdot 0 + \cdots + 0{\cdot}1 + \cdots + 0{\cdot}0 = 0.$$

Επομένως, πράγματι η βάση αυτή είναι ορθοκανονική.

Η απόδειξη μπορεί να γίνει και χρησιμοποιώντας το σύμβολο δέλτα του Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

ως εξής: Για κάθε $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$,

$$\begin{aligned} e_i &= (\delta_{1,i}, \delta_{2,i}, \dots, \delta_{n,i}),\\ e_j &= (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \dots, \delta_{n,j}), \end{aligned}$$

οπότε

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{1,i}\cdot\delta_{1,j} + \delta_{2,i}\cdot\delta_{2,j} + \cdots + \delta_{n,i}\cdot\delta_{n,j}.$$

Άρα, για $i \neq j$, είναι $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ (αφού, για κάθε $k = 1,2,\dots,n$, τουλάχιστον ένα από τα $\delta_{k,i}, \delta_{k,j}$ είναι ίσο με μηδέν και άρα

$$\delta_{1,i}\delta_{1,j} = \delta_{2,i}\delta_{2,j} = \cdots = \delta_{k,i}\delta_{k,j} = 0,$$

οπότε $\langle e_i, e_j\rangle = 0$).

Επίσης, $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ και άρα

$$\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i\rangle} = \sqrt{1} = 1$$

(αφού $\langle e_i, e_i\rangle = \delta_{1,i}^2 + \delta_{2,i}^2 + \cdots + \delta_{n,i}^2$ και μόνο το $\delta_{i,i}^2 = 1$ ενώ όλα τα άλλα είναι ίσα με 0).

Παρατήρηση: Έστω $(\mathcal{V},\langle\rangle)$ και $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$. Το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ είναι ορθοκανονικό αν και μόνο αν για κάθε i, j είναι

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Δηλαδή, είναι $\langle v_i, v_i\rangle = 1$, ενώ $i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j\rangle = 0$.

Πρόταση 10.13. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq V$ και*

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n.$$

όπου a_1, a_2, …, $a_n \in \mathbb{R}$. Αν το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι ορθοκανονικό, τότε ισχύει ότι

$$a_k = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle, \quad \text{για κάθε } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle &= \langle a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + \cdots + a_n\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k \rangle \\
&= a_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle + a_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle + \cdots + a_k \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle + \cdots + a_n \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k \rangle \\
&= a_1\delta_{1,k} + a_2\delta_{2,k} + \cdots + a_k\delta_{k,k} + \cdots + a_n\delta_{n,k} \\
&= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 0 \\
&= a_k.
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 10.14. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ με $\dim \mathcal{V} = n$ και $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$. Τότε, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ισχύει ότι*

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{x}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle \mathbf{x}_n.$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 10.15. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq V$ και*

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n.$$

όπου a_1, a_2, …, $a_n \in \mathbb{R}$. Αν το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι ορθογώνιο, τότε ισχύει ότι

$$a_k = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle}{\|\mathbf{x}_k\|^2}, \quad \text{για κάθε } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Παράδειγμα: Στο διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, όπου $\mathbf{x}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{x}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\mathbf{x}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ είναι ορθοκανονικό (Άσκηση). Άρα, αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Το διάνυσμα $\mathbf{x} = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ γράφεται λοιπόν, ως προς την παραπάνω βάση, ως εξής:

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{x}_2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_3 \rangle \mathbf{x}_3,$$

όπου

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle &= \left\langle (1, -1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = 0, \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle &= \left\langle (1, -1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_3 \rangle &= \left\langle (1, -1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{6}},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(1, -1, 1) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{4}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Πρόταση 10.16. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq V \backslash \{\mathbf{0}\}$, και $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ορθογώνιο. Για κάθε $\mathbf{x} \in V$, ισχύει ότι το διάνυσμα*

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle}{\|\mathbf{x}_1\|^2}\mathbf{x}_1 - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle}{\|\mathbf{x}_2\|^2}\mathbf{x}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2}\mathbf{x}_n,$$

είναι ορθογώνιο με κάθε $\mathbf{x}_k$, $k \in [n]$, δηλαδή $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_k \rangle = 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$.

Απόδειξη. Πράγματι, για κάθε $k \in [n]$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_k \rangle &= \left\langle \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle}{\|\mathbf{x}_1\|^2}\mathbf{x}_1 - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle}{\|\mathbf{x}_2\|^2}\mathbf{x}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle}{\|\mathbf{x}_k\|^2}\mathbf{x}_k - \cdots - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2}\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle}{\|\mathbf{x}_1\|^2} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle}{\|\mathbf{x}_2\|^2} \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle - \cdots - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle}{\|\mathbf{x}_k\|^2} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle - \cdots - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle}{\|\mathbf{x}_n\|^2} \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle}{\|\mathbf{x}_k\|^2} \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle}{\|\mathbf{x}_k\|^2} \|\mathbf{x}_k\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση: Αν το $\mathbf{x} \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από τα ορθογώνια διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, τότε το διάνυσμα $\mathbf{y}$ είναι διάφορο του μηδενικού διανύσματος, επομένως το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\}$ είναι επίσης ορθογώνιο σύνολο με $n+1$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Αντίθετα, αν το $\mathbf{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ τότε $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (βλέπε Πρόταση 10.15).

Πόρισμα 10.17. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq V \backslash \{\mathbf{0}\}$, και $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ορθοκανονικό. Για κάθε $\mathbf{x} \in V$, το διάνυσμα*

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{x}_2 - \cdots - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle \mathbf{x}_n,$$

είναι ορθογώνιο με κάθε $\mathbf{x}_k$, $k \in [n]$, δηλαδή $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_k \rangle = 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$.

Παρατήρηση: Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε πεπερασμένης διάστασης, μη μηδενικός, πραγματικός ή μιγαδικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, έχει μια ορθοκανονική βάση.

Πρόταση 10.18 (Διαδικασία ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt). *Έστω $(V, \langle\rangle)$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ελεύθερο υποσύνολο του V. Αν*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1, \ \textit{όπου } \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1, \\
\mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|}\mathbf{y}_2, \ \textit{όπου } \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1, \\
\mathbf{v}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|}\mathbf{y}_3, \ \textit{όπου } \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1, \\
\mathbf{v}_4 &= \frac{1}{\|\mathbf{y}_4\|}\mathbf{y}_4, \ \textit{όπου } \mathbf{y}_4 = \mathbf{x}_4 - \langle \mathbf{x}_4, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{x}_4, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{x}_4, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1, \\
&\ \vdots \\
\mathbf{v}_n &= \frac{1}{\|\mathbf{y}_n\|}\mathbf{y}_n, \textit{όπου } \mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n - \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_{n-1} \rangle \mathbf{v}_{n-1} - \cdots - \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1,
\end{aligned}$$

τότε το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι ορθοκανονικό υποσύνολο του V και, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$, είναι

$$< \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\} >=< \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} > .$$

Απόδειξη. Επειδή τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι και τα διανύσματα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ είναι μη μηδενικά, άρα και τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι επίσης μη μηδενικά και ειδικότερα μοναδιαία. Επίσης, από την Πρόταση 10.16 έπεται ότι το διάνυσμα $\mathbf{y}_k$ είναι ορθογώνιο με τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ και άρα και το διάνυσμα $\mathbf{v}_k$ είναι επίσης ορθογώνιο με τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$, για κάθε $k \in [n]$. Επομένως, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι ορθοκανονικά διανύσματα.

Τέλος, αφού ο χώρος $< \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} >$ που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ έχει διάσταση n και τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ανήκουν στο χώρο αυτό και είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του χώρου $< \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} >$. □

Πρόταση 10.19. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$, με $\dim \mathcal{V} = n$. Τότε υπάρχει ορθοκανονικό υποσύνολο B του V το οποίο είναι βάση του $\mathcal{V}$.*

Απόδειξη. Πράγματι, από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι αν $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, τότε το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ που κατασκευάζεται με τη διαδικασία Gram-Schmidt θα είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$. □

Παράδειγμα: Έστω $(\mathbb{R}^3, \langle\rangle)$ όπου $\langle\rangle$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, με $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 0, 1)$ είναι προφανώς μια βάση του $\mathbb{R}^3$

Η βάση αυτή **δεν** είναι ορθογώνια, αφού $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

Η βάση αυτή **δεν** είναι κανονική, αφού $||\mathbf{x}_1|| = \sqrt{\langle x_1, x_1\rangle} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \neq 1$.

Από τη βάση αυτή, προκύπτει (χρησιμοποιώντας τη διαδικασία ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt) μια **ορθοκανονική βαση** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ ως εξής:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{||\mathbf{y}_1||}\mathbf{y}_1, \text{ όπου } \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1.$$

Αλλά $\mathbf{y}_1 = (1, 1, 0)$. Επομένως,

$$||\mathbf{y}_1|| = \sqrt{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1\rangle} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Στην συνέχεια,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{||\mathbf{y}_2||}\mathbf{y}_2, \text{ όπου } \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1.$$

Αλλά

$$\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1\rangle = \left\langle (0, 1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\rangle = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

οπότε

$$\mathbf{y}_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (0, 1, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Επομένως,

$$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Τέλος,

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|}\mathbf{y}_3, \text{ όπου } \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$$

Αλλά

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \left\langle (1,0,1), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle = 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 1\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

οπότε

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right).$$

Επίσης

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle (1,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\rangle = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

οπότε

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_3 &= (1,0,1) - \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}, 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}, 1 - \frac{2}{6} - 0\right)\\ &= \left(\frac{4}{6}, -\frac{4}{6}, \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

Επομένως

$$\|\mathbf{y}_3\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Τελικά

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Άρα, η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι το σύνολο

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

(Πράγματι, $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$, δηλαδή η βάση αυτή είναι κανονική. Επίσης,

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + 0 = 0.$$

Ομοίως, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$, δηλαδή η βάση αυτή είναι ορθογώνια.)

10.8 Ορθογώνια συμπληρώματα

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq V$. Το σύνολο

$$A^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \text{ για κάθε } \mathbf{y} \in A\}$$

ονομάζεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα του** A.

Στην επόμενη πρόταση συνοψίζονται οι βασικές ιδιότητες των ορθογωνίων συμπληρωμάτων.

Πρόταση 10.20. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ και W υπόχωρος του V. Ισχύουν τα παρακάτω:*

(1) $W^{\perp}$ είναι υπόχωρος του V.

(2) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

(3) Έστω S μια βάση του W. Τότε

$$W^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \textit{ για κάθε } \mathbf{y} \in S\}.$$

(4) $V = W + W^{\perp}$ και για κάθε $\mathbf{v} \in V$ υπάρχουν μοναδικά $\mathbf{w} \in W$ και $\mathbf{x} \in W^{\perp}$ ώστε

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{x}.$$

(5) Έστω S μια βάση του W και S' μια βάση του $W^{\perp}$. Το σύνολο $S \cup S'$ αποτελεί βάση του V.

(6) Αν $\dim V = n$ και $\dim W = k$ τότε $\dim W^{\perp} = n - k$.

(7) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(8) Έστω S' μια βάση του $W^{\perp}$. Τότε

$$W = \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle = 0 \textit{ για κάθε } \mathbf{y}' \in S'\}.$$

Απόδειξη.

(1) Επειδή $\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{w} \in W$ έπεται ότι $W^{\perp} \neq \emptyset$.
Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W^{\perp}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ισχύει ότι $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{w} \in W$.
Επομένως, για κάθε $\mathbf{w} \in W$ ισχύει ότι

$$\langle \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, w \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle = 0$$

άρα, $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in W^{\perp}$, δηλαδή το $W^{\perp}$ είναι υπόχωρος του V.

(2) Προφανώς $\mathbf{0} \in W \cap W^{\perp}$. Έστω $\mathbf{x} \in W \cap W^{\perp}$. Επειδή $\mathbf{x} \in W^{\perp}$ έπεται ότι $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{w} \in W$. Όμως, $\mathbf{x} \in W$, οπότε για $\mathbf{w} = \mathbf{x}$ ισχύει ότι

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(3) Έστω S μια βάση του W. Αν $\mathbf{x} \in W^{\perp}$ τότε για κάθε $\mathbf{y} \in S \subseteq W$ έπεται ότι $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Αντίστροφα, αν $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{y} \in S$, τότε $\mathbf{x} \in W^{\perp}$. Πράγματι, επειδή κάθε στοιχείο $\mathbf{w} \in W$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $\mathbf{y}$ της S έπεται ότι

$$\mathbf{w} = \sum_{\mathbf{y} \in S} \lambda_{\mathbf{y}} \mathbf{y} \text{ όπου } \lambda_{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}$$

επομένως

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \left\langle \mathbf{x}, \sum_{\mathbf{y} \in S} \lambda_{\mathbf{y}} \mathbf{y} \right\rangle = \sum_{\mathbf{y} \in S} \lambda_{\mathbf{y}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0,$$

άρα, $\mathbf{w} \in W^{\perp}$.

(4) Έστω $\mathbf{v} \in V$ και S μια *ορθοκανονική βάση* του W. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\mathbf{w} = \sum_{\mathbf{y} \in S} \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} \text{ και } \mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{w}.$$

Προφανώς $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{x}$ και $\mathbf{w} \in W$ αφού το $\mathbf{w}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $\mathbf{y}$ της βάσης του W. Επίσης $\mathbf{x} \in W^{\perp}$. Πράγματι για κάθε $\mathbf{y}_0 \in S$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_0 \rangle = \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{y}_0 \rangle &= \left\langle \mathbf{v} - \sum_{\mathbf{y} \in S} \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \right\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{y}_0 \rangle - \left\langle \sum_{\mathbf{y} \in S} \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{y}_0 \rangle - \sum_{\mathbf{y} \in S} \langle \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{y}_0 \rangle - \sum_{\mathbf{y} \in S} \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{y}_0 \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{y}_0 \rangle \langle \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0 \rangle = 0.\end{aligned}$$

αφού $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{y} \in S$ με $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}_0$ και $\langle \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0 \rangle = 1$. Επομένως, από την προηγούμενη ιδιότητα προκύπτει ότι $\mathbf{x} \in W^{\perp}$.

Έστω ότι $\mathbf{v} = \mathbf{w}' + \mathbf{x}'$ με $\mathbf{w}' \in W$ και $\mathbf{x}' \in W^{\perp}$, τότε $\mathbf{w} + \mathbf{x} = \mathbf{w}' + \mathbf{x}'$ επομένως, $\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$, όμως $\mathbf{w} - \mathbf{w}' \in W$ και $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \in W^{\perp}$ επομένως, $\mathbf{w} - \mathbf{w}', \mathbf{x}' - \mathbf{x} \in W \cap W^{\perp}$ επομένως, $\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{0}$ και $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \mathbf{0}$, δηλαδή $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ και $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

(5) Άσκηση.

(6) Άσκηση.

(7) Έστω $\mathbf{w} \in W$ τότε $\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in W^{\perp}$, άρα $\mathbf{w} \in (W^{\perp})^{\perp}$, οπότε $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$.

Έστω $\mathbf{v} \in (W^{\perp})^{\perp}$ τότε από την ιδιότητα (4) υπάρχουν μοναδικά $\mathbf{w} \in W$ και $\mathbf{x} \in W^{\perp}$ ώστε

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{x}.$$

Ισχύει ότι

$$0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{w} + \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Επομένως,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w} \in W$$

άρα, $(W^{\perp})^{\perp} \subseteq W$, δηλαδή $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(8) Άσκηση. □

Παράδειγμα: Έστω

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
Για κάθε $(x, y, z) \in W$ ισχύει ότι

$$(x, y, z) = (x, y, x + 2y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2).$$

Άρα, το σύνολο $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ αποτελεί βάση του W. Επομένως, $\dim W = 2$.

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W είναι το σύνολο των διανυσμάτων $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία

$$\langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle = 0 \text{ και } \langle (x, y, z), (0, 1, 2) \rangle = 0.$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z. \end{cases}$$

Επομένως, για κάθε $(x, y, z) \in W^\perp$ ισχύει ότι

$$(x, y, z) = (-z, -2z, z) = z(-1, -2, 1).$$

Άρα, το σύνολο $\{-1, -2, 1\}$ είναι βάση του $W^\perp$. Επομένως $\dim W^\perp = 1 = 3 - 2 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim W$, επαληθεύοντας την Πρόταση 10.20 (6).

Επιπλέον, τα διανύσματα $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, -2, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αφού

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Άρα, αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Επομένως κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ εκφράζεται ως

$$\mathbf{x} = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(-1, -2, 1).$$

Αν τεθούν

$$\mathbf{y} = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 2) \in W,$$
$$\mathbf{y}' = \lambda_3(-1, -2, 1) \in W^\perp,$$

τότε

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}',$$

όπου $\mathbf{y} \in W$ και $\mathbf{y} \in W^\perp$, επαληθεύοντας την Πρόταση 10.20 (4).

Βάσει της Πρότασης 10.20 (8), το διάνυσμα $(3, 3, 3)$ δεν ανήκει στον W, διότι

$$\langle (3, 3, 3), (-1, -2, 1) \rangle = 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 6 \neq 0,$$

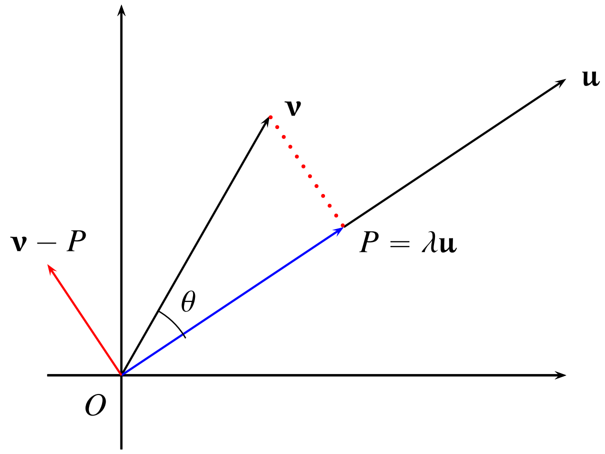
ενώ, το διάνυσμα $(4, -3, -2)$ ανήκει στον W, διότι

$$\langle (4, -3, -2), (-1, -2, 1) \rangle = 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = 0.$$

10.9 Προβολές

Υπενθυμίζεται ότι αν $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ τότε η **προβολή του $\mathbf{v}$ πάνω στο $\mathbf{u}$** είναι ένα διάνυσμα P το οποίο

- είναι πολλαπλάσιο του $\mathbf{u}$, δηλαδή $P = \lambda\mathbf{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τα διανύσματα $\mathbf{v} - P$ και $\mathbf{u}$ είναι ορθογώνια.



Έχοντας ως υπόδειγμα τον ορισμό αυτό μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της προβολής σε οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο.

Έστω $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \in V$ με $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ τότε η **προβολή του $\mathbf{v}$ πάνω στο $\mathbf{u}$** είναι ένα διάνυσμα P το οποίο

- είναι πολλαπλάσιο του $\mathbf{u}$, δηλαδή $P = \lambda\mathbf{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τα διανύσματα $\mathbf{v} - P$ και $\mathbf{u}$ είναι ορθογώνια, δηλαδή $\langle \mathbf{v} - P, \mathbf{u} \rangle = 0$.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι

$$\langle \mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

Άρα,

Η προβολή P του $\mathbf{v}$ πάνω στο $\mathbf{u}$ δίδεται από τον τύπο:

$$P = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}\mathbf{u}.$$

Παράδειγμα: Η προβολή του $\mathbf{v} = (1, 1, 4)$ στο $\mathbf{u} = (2, 7, 7)$ είναι το διάνυσμα

$$P = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}\mathbf{u} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 7}{2^2 + 7^2 + 7^2}(2, 7, 7) = \frac{37}{102}(2, 7, 7) = \left(\frac{74}{102}, \frac{259}{102}, \frac{259}{102} \right).$$

Τα διανύσματα $(2, 7, 7)$ και $(1, 1, 4) - \left(\frac{74}{102}, \frac{259}{102}, \frac{259}{102}\right) = \left(\frac{28}{102}, -\frac{157}{102}, -\frac{149}{102}\right)$ είναι ορθογώνια. Πράγματι

$$\left\langle (2, 7, 7), \left(\frac{28}{102}, -\frac{157}{102}, \frac{149}{102} \right) \right\rangle = 2 \cdot \frac{28}{102} + 7 \cdot (-\frac{157}{102}) + 7 \cdot \frac{149}{102} = \frac{56 - 1099 + 1043}{102} = 0.$$

Βασικές ιδιότητες προβολής

- Η προβολή του P πάνω στο $\mathbf{u}$ είναι το P

  Πράγματι, η προβολή του P πάνω στο $\mathbf{u}$ δίνεται από το τύπο:
$$\frac{\langle P,\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} = \frac{\left\langle \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u},\mathbf{u}\right\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} = P$$

- Το μήκος του P ισούται με $\dfrac{\left|\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\right|}{\|\mathbf{u}\|} = \|\mathbf{v}\|\,|\cos\theta|$.

  Πράγματι,
$$\|P\| = \left\|\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}\right\| = \frac{\left|\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\right|}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\|\mathbf{u}\| = \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\|\mathbf{u}\| = \frac{\left|\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\right|}{\|\mathbf{u}\|}$$
  Επιπλέον,
$$\|P\| = \frac{\left|\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\right|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\left|\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\right|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|\,|\cos\theta|\,.$$

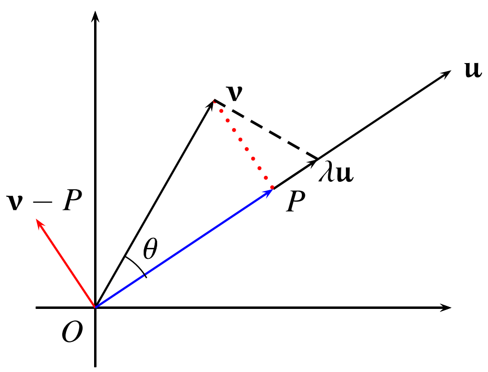
- Το διάνυσμα $\mathbf{v} - P$ είναι ορθογώνιο σε κάθε πολλαπλάσιο του $\mathbf{u}$.

  Πράγματι,
$$\langle \mathbf{v} - P, k\mathbf{u}\rangle = k\langle \mathbf{v} - P,\mathbf{u}\rangle = 0.$$

- Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι
$$\|\mathbf{v} - P\| \leqslant \|\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}\|$$
  Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $P = \lambda\mathbf{u}$.

  Πράγματι, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{v} - P$ και $\underbrace{P - \lambda\mathbf{u}}_{\text{πολλαπλάσιο του } \mathbf{u}}$ είναι ορθογώνια, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει ότι
$$\|\mathbf{v} - P\|^2 + \|P - \lambda\mathbf{u}\|^2 = \left\|(\mathbf{v} - P) + (P - \lambda\mathbf{u})\right\|^2 = \|v - \lambda\mathbf{u}\|^2$$
  Επειδή $\|P - \lambda\mathbf{u}\|^2 \geqslant 0$ έπεται ότι
$$\|\mathbf{v} - P\|^2 \leqslant \|\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}\|^2 \Leftrightarrow \|\mathbf{v} - P\| \leqslant \|\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}\|$$
  Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $P = \lambda\mathbf{u}$.

  Η ιδιότητα αυτή εκφράζει το ενδιαφέρον γεγονός ότι η προβολή P του $\mathbf{v}$ πάνω στο u έχει την μικρότερη δυνατή απόσταση από το $\mathbf{v}$ σε σύγκριση με όλα τα υπόλοιπα πολλαπλάσια του u.



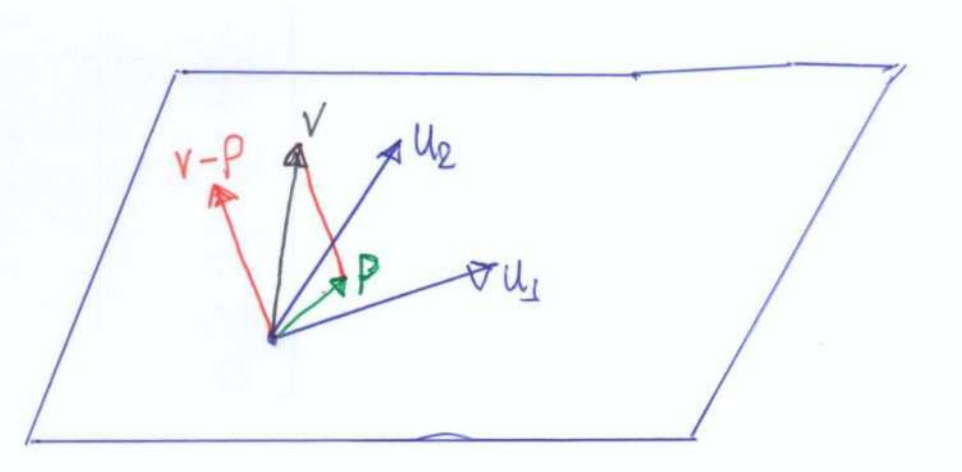
  Η ανισότητα $\|\mathbf{v} - P\| \leqslant \|\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}\|$ γίνεται "φανερή" αν παρατηρήσουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}$ αποτελεί την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές $\mathbf{v} - P$ και $P - \lambda\mathbf{u}$.

- Συχνά για λόγους σαφήνειας θα συμβολίζουμε την προβολή του $\mathbf{v}$ πάνω στο $\mathbf{u}$ με $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.

10.9.1 Προβολές σε υπόχωρο W

Υπενθυμίζεται ότι $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ είναι τρία μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τότε η **προβολή του $\mathbf{v}$ πάνω στο επίπεδο που ορίζουν τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$** είναι ένα διάνυσμα P το οποίο:

- ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ δηλαδή
$$P = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
- τα διανύσματα $\mathbf{v} - P$ και $\mathbf{u}_1$ είναι ορθογώνια, ομοίως τα διανύσματα $\mathbf{v} - P$ και $\mathbf{u}_2$ είναι ορθογώνια και γενικότερα το διάνυσμα $\mathbf{v} - P$ είναι ορθογώνιο με κάθε διάνυσμα που ανήκει στο επίπεδο.



Έχοντας ως υπόδειγμα τον ορισμό αυτό μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της προβολής διανύσματος $\mathbf{v}$ πάνω σε ένα διανυσματικό υπόχωρο.

Έστω $\mathbf{v} \in V$ και W υπόχωρος του V και $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_k$ είναι μια βάση του W.

Η προβολή του V πάνω στον W (δηλαδή τον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_k$) είναι το διάνυσμα P το οποίο:

- ανήκει στο χώρο W δηλαδή
$$P = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$
- το διάνυσμα $\mathbf{v} - P$ είναι ορθογώνιο στα διανύσματα $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ και άρα και σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{u}$ που ανήκει στον χώρο W, δηλαδή
$$\left\langle \mathbf{v} - P, \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k \right\rangle = 0$$
για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι η προβολή P ικανοποιεί το σύστημα

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} - P \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} - P \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} - P \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \mathbf{u}_1, P \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u}_2, P \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, P \rangle = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \mathbf{u}_1, \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{u}_2, \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(\Sigma)\begin{cases}\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1\rangle\lambda_1+\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle\lambda_2+\cdots+\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_k\rangle\lambda_k=\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{v}\rangle\\ \langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1\rangle\lambda_1+\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2\rangle\lambda_2+\cdots+\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_k\rangle\lambda_k=\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{v}\rangle\\ \vdots\\ \langle \mathbf{u}_k,\mathbf{u}_1\rangle\lambda_1+\langle \mathbf{u}_k,\mathbf{u}_2\rangle\lambda_2+\cdots+\langle \mathbf{u}_k,\mathbf{u}_k\rangle\lambda_k=\langle \mathbf{u}_k,\mathbf{v}\rangle\end{cases}$$

Άρα, οι συντελεστές λ_1, λ_2, …, λ_k που εκφράζουν την προβολή P του $\mathbf{v}$ πάνω στην θήκη που παράγουν τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k$ προκύπτουν από την λύση του συστήματος (Σ).

Παρατηρήστε ότι αν η βάση $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k$ είναι ορθογώνια ή ορθοκανονική τότε $\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\rangle$ ανν $i \neq j$, οπότε το σύστημα (Σ') γράφεται ισοδύναμα

$$(\Sigma)\begin{cases}\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1\rangle\lambda_1=\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{v}\rangle\\ \langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2\rangle\lambda_2=\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{v}\rangle\\ \vdots\\ \langle \mathbf{u}_k,\mathbf{u}_k\rangle\lambda_k=\langle \mathbf{u}_k,\mathbf{v}\rangle\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1\rangle}\\ \lambda_2=\dfrac{\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2\rangle}\\ \vdots\\ \lambda_k=\dfrac{\langle \mathbf{u}_k,\mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}_k,\mathbf{u}_k\rangle}\end{cases}$$

οπότε

αν $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k$ είναι ορθογώνια ή ορθοκανονική βάση του W, τότε η προβολή του $\mathbf{v}$ στο W ισούται με

$$P=\frac{\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{u}_1+\frac{\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2\rangle}\mathbf{u}_2+\cdots+\frac{\langle \mathbf{u}_k,\mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{u}_k,\mathbf{u}_k\rangle}\mathbf{u}_n$$

Παράδειγμα. *Να βρεθεί η προβολή του* $(1,2,3)$ *στον υπόχωρο* W *του* $\mathbb{R}^3$ *όπου*

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}.$$

Λύση. Μια βάση του W είναι τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1=(1,0,1) \text{ και } \mathbf{x}_2=(0,1,2)$$

Από τη βάση αυτή, προκύπτει (εφαρμόζοντας τη διαδικασία Gram - Schmidt) μια ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ του W ως εξής:

$$\mathbf{v}_1=\frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1,\ \text{όπου } \mathbf{y}_1=\mathbf{x}_1.$$

Αλλά $\mathbf{y}_1=(1,0,1)$. Επομένως,

$$\|\mathbf{y}_1\|=\sqrt{\langle \mathbf{y}_1,\mathbf{y}_1\rangle}=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Επίσης,

$$\mathbf{v}_2=\frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|}\mathbf{y}_2,\ \text{όπου } \mathbf{y}_2=\mathbf{x}_2-\langle x_2,\mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1.$$

Αλλά
$$\langle x_2, \mathbf{v}_1\rangle = \left\langle (0,1,2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$
Επομένως,
$$\mathbf{y}_2 = (0,1,2) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0,1,2) - (1,0,1) = (-1,1,1),$$
οπότε
$$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$
Άρα,
$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$
Άρα, μια ορθοκανονική βάση του W είναι το σύνολο
$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\}.$$

Άρα, η προβολή του $\mathbf{x} = (1,2,3)$ στον υπόχωρο W είναι το διάνυσμα
$$P = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_2$$
Αλλά
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\rangle = \left\langle (1,2,3), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}}$$
και
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2\rangle = \left\langle (1,2,3), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\rangle = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$
Άρα,
$$P = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (2,0,2) + \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right). \quad \square$$

Βασικές ιδιότητες προβολής

- Η προβολή του P πάνω στο W είναι το P
- Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} \in W$ ισχύει ότι
$$\|\mathbf{v} - P\| \leqslant \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$
Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $P = \mathbf{u}$.
Πράγματι, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{v} - P$ και $\underbrace{P - \mathbf{u}}_{\text{στοιχείο του } W}$ είναι ορθογώνια, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει ότι
$$\|\mathbf{v} - P\|^2 + \|P - \mathbf{u}\|^2 = \left\|(\mathbf{v} - P) + (P - \mathbf{u})\right\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2$$
Επειδή $\|P - \mathbf{u}\|^2 \geqslant 0$ έπεται ότι
$$\|\mathbf{v} - P\|^2 \leqslant \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 \Leftrightarrow \|\mathbf{v} - P\| \leqslant \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$
Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $P = \mathbf{u}$.
Η ιδιότητα αυτή εκφράζει το σημαντικό γεγονός ότι η προβολή P του $\mathbf{v}$ πάνω στο W έχει την μικρότερη δυνατή απόσταση από το $\mathbf{v}$ σε σύγκριση με όλα τα υπόλοιπα $\mathbf{u} \in W$.
- Συχνά για λόγους σαφήνειας θα συμβολίζουμε την προβολή του $\mathbf{v}$ πάνω στο W με $P_W\mathbf{v}$.

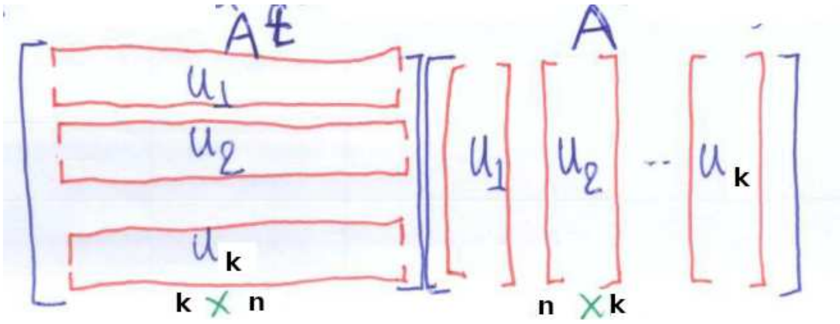
10.9.2 Προβολές στον $\mathbb{R}^n$

Στην περίπτωση που δουλεύουμε με διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να δώσουμε έναν επιπλέον τύπο για την προβολή P ενός διανύσματος $v \in \mathbb{R}^n$ στον χώρο W που παράγουν τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k$.

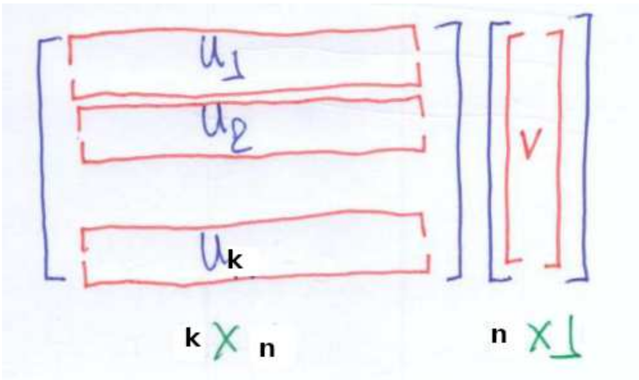
Παρατηρήστε ότι η μήτρα των συντελεστών του συστήματος (Σ)

$$(\Sigma)\begin{cases}\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle \lambda_1 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \lambda_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k\rangle \lambda_k = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}\rangle \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1\rangle \lambda_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2\rangle \lambda_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_k\rangle \lambda_k = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1\rangle \lambda_1 + \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_2\rangle \lambda_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k\rangle \lambda_k = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\rangle \end{cases}$$

ισούται με A^tA όπου A είναι η μήτρα με στήλες τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k$.



Επίσης, η μήτρα των σταθερών του συστήματος (Σ) ισούται με A^tV όπου V είναι η μήτρα στήλη που ισούται με το $\mathbf{v}$.



Επομένως,

Η προβολή P του διανύσματος $\mathbf{v}$ στον χώρο που παράγουν τα διανύσματα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ δίδεται από τον τύπο:

$$P = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k$$

όπου λ_1, λ_2, …, λ_k είναι λύση του (συμβιβαστού) συστήματος

$$A^tAX = A^tV$$

όπου

- A η $n \times k$ μήτρα με στήλες τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k$
- V η $n \times 1$ μήτρα στήλη ίση με $\mathbf{v}$

- X η $k \times 1$ μήτρα στήλη ίση με $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$.

Παρατήρηση: Αν τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_k$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις για τα λ_1, λ_2, …, λ_k.

Παράδειγμα. *Να λυθεί το γραμμικό σύστημα*

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Λύση. Από τις 2 πρώτες εξισώσεις προκύπτει ότι $x = 4$, $y = 1$ τα οποία δεν επαληθεύουν την 3η εξίσωση. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στην μορφή

$$x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1} + y \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}$$

Το σύστημα θα είχε λύση αν το $\mathbf{v}$ περιέχονταν στην θήκη που παράγουν τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, τότε θα υπήρχαν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$V = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow V - \lambda_1 \mathbf{u}_1 - \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

Στο σύστημα (Σ) δεν υπάρχουν τέτοια x, y και το διάνυσμα

$$\mathbf{e} = \mathbf{v} - x\mathbf{u}_1 - y\mathbf{u}_2$$

δεν γίνεται ποτέ μηδενικό.

Η ιδέα είναι ότι το $\mathbf{e}$ μπορεί να θεωρηθεί ως σφάλμα το οποίο θέλουμε να ελαχιστοποίησουμε.

Αν χρησιμοποιήσουμε ως κριτήριο ελαχιστοποίησης το μήκος του $\mathbf{e}$, τότε η παράσταση

$$||\mathbf{e}|| = ||\mathbf{v} - x\mathbf{u}_1 - y\mathbf{u}_2||$$

γίνεται ελάχιστη αν και μόνο αν τα $x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2$ ισούνται με την προβολή P του $\mathbf{v}$ στην θήκη που παράγουν τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$.

Έστω $A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{u}_1 \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2 \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ και $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Τότε η ζητούμενη λύση είναι η λύση του (συμβιβαστού) συστήματος

$$A^t A X = A^t V$$

Έχουμε ότι

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

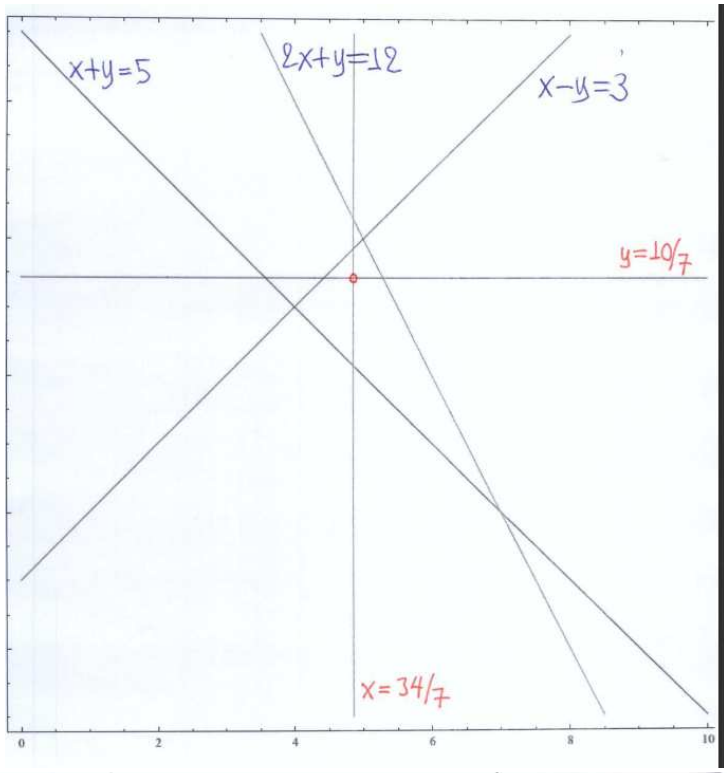
$$A^t V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 14 \end{bmatrix}$$

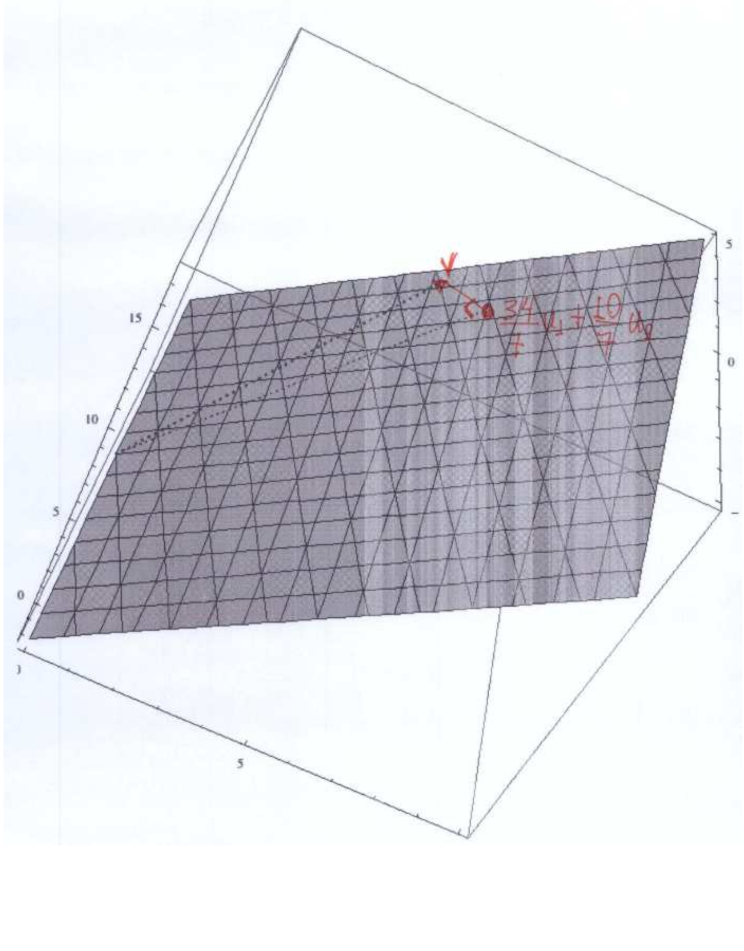
Άρα,

$$
\begin{aligned}
A^t A X = A^t V \Leftrightarrow \\
\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 14 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{cases} 6x + 2y = 32 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{34}{7} \\ y = \dfrac{10}{7} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Τότε

$$
\begin{aligned}
\|e\| &= \|\mathbf{v} - x\mathbf{u}_1 - y\mathbf{u}_2\| \\
&= \left\|(5,3,12) - \frac{34}{7}(1,1,2) - \frac{10}{7}(1,-1,1)\right\| \\
&= \left\|(-\frac{9}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right\| = \sqrt{\frac{18}{7}} \simeq 1.60357
\end{aligned}
$$


x+y=5
2x+y=12
x-y=3
y=10/7
x=34/7
0
2
4
6
8
10


v
c
34/7 u1 + 10/7 u2
5
0
15
10
5
0
5

□

10.10 Το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων

Έστω $AX = B$, όπου $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1} \simeq \mathbb{R}^n$ και $B \in \mathcal{M}_{m\times 1} \simeq \mathbb{R}^m$.

Το πρόβλημα της εύρεσης του $X \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο η norm

$$\|AX - B\|_2$$

γίνεται ελάχιστη ονομάζεται **πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων** (least squares problem).

Αν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι οι στήλες της μήτρας A και $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ τότε το γινόμενο AX αντιστοιχεί στον γραμμικό συνδυασμό των στηλών της A με συντελεστές τα στοιχεία του X:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

Αν $B \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ τότε $\min_X \|AX - B\|_2 = 0$ και X είναι οι λύσεις του γραμμικού συστήματος $AX = B$.

Αν $B \notin \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ τότε

$$\|P_A B - B\|_2 \leqslant \|AX - B\|_2$$

όπου $P_A B$ είναι η προβολή του B στην θήκη που παράγουν οι στήλες της A.

Επομένως, οι λύσεις X του προβλήματος είναι οι λύσεις του γραμμικού συστήματος

$$AX = P_A B$$

δηλαδή, το X είναι οι συντελεστές των γραμμικών συνδυασμών των στηλών της A με τους οποίους παράγεται το $P_A B$. Αν οι στήλες της A είναι γραμμικώς ανεξάρτητές, τότε η λύση X είναι μοναδική, αλλιώς υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Ισοδύναμα, το διάνυσμα X είναι λύση του προβλήματος, αν και μόνο αν το διάνυσμα $AX - B$ είναι ορθογώνιο στα διανύσματα που παράγονται από τις στήλες του A, δηλαδή

$$A^t(AX - B) = \mathbb{O}_n \Leftrightarrow A^tAX = A^tB$$

Συνοψίζοντας,

Πρόταση 10.21. *Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, τότε οι λύσεις $\mathbf{x}$ του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων ικανοποιεί την σχέση*

$$A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}.$$

Επιπλέον, αν οι στήλες της A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε η λύση είναι μοναδική.

Για την προβολή $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

Πρόταση 10.22. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\rangle)$ πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in V$ και $y \in V\backslash\{\mathbf{0}\}$. Τότε*

(i) $P_{\mathbf{y}}(P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}) = P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$.

(ii) $\left\|P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\| = \frac{|\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle|}{\|\mathbf{y}\|} = \|\mathbf{x}\|\,|\cos\theta|$, *όπου θ η γωνία των* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$

(iii) Το διάνυσμα $\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ είναι ορθογώνιο στο $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ (άρα και σε κάθε διάνυσμα που παράγεται από το $\mathbf{y}$).

(iv) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left\|\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\|.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\lambda\mathbf{y} = P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$.

Απόδειξη.

(i) Πράγματι,

$$P_{\mathbf{y}}(P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}) = \frac{\left\langle P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle}{\|\mathbf{y}^2\|}\mathbf{y} = \frac{\left\langle \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}, \mathbf{y}\right\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} = \frac{\frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\left\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\right\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} = \frac{\frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} = \frac{\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} = P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$$

(ii) Πράγματι,

$$\left\|P_{\mathbf{y}}x\right\| = \left\|\frac{\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}\right\| = \left|\frac{\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\right|\|\mathbf{y}\| = \frac{\left|\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle\right|}{\|\mathbf{y}\|}.$$

Επιπλέον

$$\left\|P_{\mathbf{y}}x\right\| = \frac{\left|\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle\right|}{\|\mathbf{y}\|} = \|\mathbf{x}\| \frac{\left|\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle\right|}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} = \|\mathbf{x}\|\,|\cos\theta|.$$

(iii) Πράγματι,

$$\left\langle \mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}, P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\rangle - \left\langle P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}, P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\rangle = \left\langle \mathbf{x}, \frac{\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}\right\rangle - \left\|P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\|^2 = \frac{\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle - \frac{\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\right\rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^2} = 0,$$

άρα, τα $\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ και $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ είναι ορθογώνια.

(iv) Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$ παράγεται από το $\mathbf{y}$ και επομένως είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα $\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι

$$\left\|\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\|^2 + \left\|P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\right\|^2 = \left\|\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} + P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\right\|^2 = \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\|^2$$

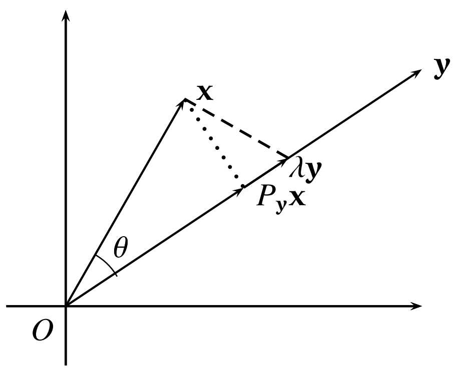
επομένως, επειδή $\left\|P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\right\|^2 \geqslant 0$, έπεται ότι

$$\left\|\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\|^2 \leqslant \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\|^2$$

ή, ισοδύναμα

$$\left\|\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\|.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\left\|P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\right\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda\mathbf{y} = P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$.



Η ανισότητα $\left\|\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\|$ γίνεται "φανερή" αν παρατηρήσουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$ αποτελεί την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές $\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ και $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$. □

Παρατηρήσεις:

1. Η ιδιότητα (i) πολλές φορές χρησιμοποιείται και ως ορισμός της έννοιας της προβολής σε γενικότερους χώρους: Λέμε για παράδειγμα, ότι μια απεικόνιση $f : A \to B$, όπου $B \subseteq A$, είναι προβολή του A στο B όταν $f(f(x)) = f(x)$ για κάθε $x \in A$, ή ισοδύναμα όταν για κάθε $y \in B$ με ισχύει ότι $f(y) = y$.

2. Η ιδιότητα (iv) εκφράζει το γεγονός ότι η προβολή του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ είναι το μοναδικό διάνυσμα που παράγεται από το $\mathbf{y}$ το οποίο έχει την ελάχιστη απόσταση από το $\mathbf{x}$.

3. Στην ιδιότητα (iii) αποδείξαμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ και $P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}$ είναι ορθογώνια, δηλαδή

$$\langle \mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}\mathbf{x}, P_{\mathbf{y}}\mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}, \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y} \right\rangle = 0$$

   Πολλαπλασιάζοντας με $\|\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ προκύπτει ότι

$$\left\langle \|\mathbf{y}\|^2 \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} \rangle = 0$$

   Αν εναλλάξουμε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ τότε προκύπτει η σχέση που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της ανισότητας Cauchy - Schwarz.

4. Η ιδιότητα (iv) εκφράζει το γεγονός ότι η προβολή του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ είναι το μοναδικό διάνυσμα που παράγεται από το $\mathbf{y}$ το οποίο έχει την ελάχιστη απόσταση από το $\mathbf{x}$.

Παράδειγμα. *Να βρεθεί η προβολή του* $(1,1,4)$ *στο* $(2,7,7)$

Λύση. Η προβολή του $(1,1,4)$ στο $(2,7,7)$ είναι το διάνυσμα

$$\frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 7}{2^2 + 7^2 + 7^2}(2,7,7) = \frac{37}{102}(2,7,7) = \left(\frac{74}{102}, \frac{259}{102}, \frac{259}{102}\right).$$

Τα διανύσματα $(2,7,7)$ και $(1,1,4) - \left(\frac{74}{102}, \frac{259}{102}, \frac{259}{102}\right) = \left(\frac{28}{102}, -\frac{157}{102}, -\frac{149}{102}\right)$ είναι ορθογώνια. Πράγματι

$$\left\langle (2,7,7), \left(\frac{28}{102}, -\frac{157}{102}, \frac{149}{102}\right) \right\rangle = 2 \cdot \frac{28}{102} + 7 \cdot (-\frac{157}{102}) + 7 \cdot \frac{149}{102} = \frac{56 - 1099 + 1043}{102} = 0.$$ □

Η έννοια της προβολής ενός διανύσματος $\mathbf{x}$ στο διάνυσμα $\mathbf{y}$ γενικεύεται αν αντί για το διάνυσμα $\mathbf{y}$ έχουμε έναν υπόχωρο W.

Έστω W υπόχωρος του $V \backslash \{0\}$. Από την Πρόταση 10.20 ισχύει ότι $V = W + W^{\perp}$ και επιπλέον για κάθε $\mathbf{x} \in V$ υπάρχουν μοναδικά $\mathbf{y} \in W$ και $\mathbf{y}' \in W^{\perp}$ ώστε

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}'.$$

Το διάνυσμα $\mathbf{y}$ ονομάζεται **προβολή του x στον υπόχωρο** W και συμβολίζεται με $P_W\mathbf{x}$, ενώ το διάνυσμα $\mathbf{y}'$ ονομάζεται **προβολή του x στον υπόχωρο** $W^{\perp}$ και συμβολίζεται με $P_{W^{\perp}}\mathbf{x}$.

Πρόταση 10.23. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, W υπόχωρος του $V\backslash\{0\}$ και $\mathbf{x} \in V$.*

(i) $P_W(P_W\mathbf{x}) = P_W\mathbf{x}$.

(ii) *Για κάθε $\mathbf{x} \in V$, τα διανύσματα $P_W\mathbf{x}$ και $\mathbf{x} - P_W\mathbf{x}$ και είναι ορθογώνια. Επιπλέον, το διάνυσμα $\mathbf{x} - P_W\mathbf{x}$ είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} \in W$.*

(iii) *Για κάθε $\mathbf{y} \in W$ ισχύει ότι*

$$\|\mathbf{x} - P_W\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\mathbf{y} = P_W\mathbf{x}$.

Παράδειγμα. *Να βρεθεί η προβολή του $(1,2,3)$ στον υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$ όπου*

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}.$$

Λύση. Όπως είδαμε, το σύνολο $\{(1,0,1),(0,1,2)\}$ αποτελεί βάση του W και το σύνολο $\{-1,-2,1\}$ αποτελεί βάση του $W^\perp$. Επιπλέον, τα διανύσματα $(1,0,1)$, $(0,1,2)$, $(-1,-2,1)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Το διάνυσμα $(1,2,3)$ εκφράζεται στη βάση αυτή ως εξής:

$$(1,2,3) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3(-1,-2,1)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{3} \\ \lambda_2 = \frac{4}{3} \\ \lambda_3 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}(1,2,3) &= \frac{2}{3} \cdot (1,0,1) + \frac{4}{3} \cdot (0,1,2) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-1,-2,1) \\ &= \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) + \left(0, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

Προφανώς, $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right) \in W$ και $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \in W^\perp$, οπότε είναι ορθογώνια.

Άρα, η προβολή του $(1,2,3)$ στο W είναι το διάνυσμα

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right),$$

ενώ, η προβολή του $(1,2,3)$ στο $W^\perp$ είναι το διάνυσμα

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Επιπρόσθετα, για κάθε $(x, y, z) \in W$ ισχύει ότι

$$\left\|(1,2,3) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)\right\| \leqslant \left\|(1,2,3) - (x,y,z)\right\|$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} \left\|\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\| &\leqslant \left\|(1,2,3) - (x,y,x+2y)\right\| \Leftrightarrow \\ \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} &\leqslant (1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-x-2y)^2 \Leftrightarrow \\ \frac{2}{3} &\leqslant (1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-x-2y)^2. \end{aligned}$$

Πράγματι, από την ανισότητα Cauchy - Schwarz για τα διανύσματα $(1-x, 2-y, 3-x-2y)$ και $(1,2,-1)$ προκύπτει ότι

$$\left((1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-x-2y)^2\right)\left(1^2 + 2^2 + (-1)^2\right) \geqslant \left((1-x)\cdot 1 + (2-y)\cdot 2 + (3-x-2y)\cdot(-1)\right)^2 = 4,$$

από όπου έπεται ότι

$$(1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-x-2y)^2 \geqslant \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$ □

Ο υπολογισμός της προβολής του διανύσματος $\mathbf{x}$ στον χώρο W μπορεί να απλοποιηθεί με τη βοήθεια της επόμενης πρότασης, η οποία αποτελεί πόρισμα της Πρότασης 10.14.

Πρόταση 10.24. *Έστω $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, W υπόχωρος του $V \backslash \{0\}$ και $\mathbf{x} \in V$. Αν $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του W, τότε η προβολή του $\mathbf{x}$ στον W δίδεται από τη σχέση*

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{x}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle \mathbf{x}_n.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 7.4 υπάρχει μια βάση B του $\mathcal{V}$ η οποία περιέχει τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ καθώς και m επιπλέον διανύσματα, όπου $m \geqslant 0$. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία Gram-Schmidt στο σύνολο B προκύπτει μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}$ η οποία αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ και τα διανύσματα $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m$. Τα διανύσματα $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m$ ανήκουν στον χώρο $W^\perp$ και αποτελούν μια (ορθοκανονική) βάση του $W^\perp$.

Από την Πρόταση 10.14 κάθε $\mathbf{x} \in V$ εκφράζεται ως εξής:

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{x}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle \mathbf{x}_n + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}_1 \rangle \mathbf{z}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}_2 \rangle \mathbf{z}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}_m \rangle \mathbf{z}_m.$$

Αφού $\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{x}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle \mathbf{x}_n \in W$ και $\mathbf{y}' = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}_1 \rangle \mathbf{z}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}_2 \rangle \mathbf{z}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}_m \rangle \mathbf{z}_m \in W^\perp$ από την μοναδικότητα των $\mathbf{y}, \mathbf{y}'$ έπεται ότι η προβολή του $\mathbf{x}$ στον W είναι το διάνυσμα $\mathbf{y}$. □

Παράδειγμα. *Να βρεθεί η προβολή του $(1,2,3)$ στον υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$ όπου*

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}.$$

Λύση. Όπως είδαμε, το σύνολο $\{\mathbf{x}_1 = (1,0,1), \mathbf{x}_2 = (0,1,2)\}$ αποτελεί βάση του W.

Από τη βάση αυτή, προκύπτει (εφαρμόζοντας τη διαδικασία Gram - Schmidt) μια ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ του W ως εξής:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1, \text{ όπου } \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1.$$

Αλλά $\mathbf{y}_1 = (1, 0, 1)$. Επομένως,

$$\|\mathbf{y}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Επίσης,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|}\mathbf{y}_2, \text{ όπου } \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle x_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1.$$

Αλλά

$$\langle x_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle (0, 1, 2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Επομένως,

$$\mathbf{y}_2 = (0, 1, 2) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0, 1, 2) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 1),$$

οπότε

$$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Άρα, μια ορθοκανονική βάση του W είναι το σύνολο

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\}.$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, η προβολή του $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ στον υπόχωρο W είναι το διάνυσμα

$$P_W\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2$$

Αλλά

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle (1, 2, 3), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

και

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle = \left\langle (1, 2, 3), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Άρα,

$$P_W\mathbf{x} = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (2, 0, 2) + \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right). \quad \square$$

Εφαρμογή 10.3. *Το διάγραμμα ενός κτηρίου ορίζεται από τα παρακάτω 14 σημεία του $\mathbb{R}^3$:*

$A(0, 0, 0)$	$B(12, 0, 0)$	$C(12, 10, 0)$	$D(6, 17, 0)$
$E(0, 10, 0)$	$F(4.8, 2.8, 0)$	$G(6.4, 0, 0)$	$H(12, 0, 20)$
$I(12, 10, 20)$	$J(6, 17, 20)$	$K(0, 10, 20)$	$L(0, 0, 20)$
$M(6.4, 2.8, 0)$	$N(4.8, 0, 0)$		

Εκ των οποίων τα επόμενα ζεύγη σημείων συνδέονται με 20 ευθύγραμμα τμήματα: $\{A, B\}$, $\{A, E\}$, $\{A, L\}$, $\{B, C\}$, $\{B, H\}$, $\{C, D\}$, $\{C, E\}$, $\{C, I\}$, $\{D, E\}$, $\{D, J\}$, $\{E, K\}$, $\{F, M\}$, $\{F, N\}$, $\{G, M\}$, $\{H, I\}$, $\{H, L\}$, $\{I, J\}$, $\{I, K\}$, $\{J, K\}$, $\{K, L\}$.

Να βρεθεί η προβολή του διαγράμματος του κτηρίου στο επίπεδο $x + y - z = 0$ του $\mathbb{R}^3$.

Λύση. Κάθε $\mathbf{v} = (x, y, z)$ που ανήκει στο επίπεδο $x + y - z = 0$ ισχύει ότι

$$\mathbf{v} = (x, y, z) = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$$

οπότε τα $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$ και $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)$ αποτελούν μια βάση των διανυσμάτων του επιπέδου $x + y - z = 0$.

Εφαρμόζοντας την διαδικασία ορθοκανονικοποίησης των Gram - Schmidt προκύπτει ότι μια ορθοκανονική βάση του επιπέδου $x + y - z = 0$ αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ και $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$

Για την αναπαράσταση των προβολών των 14 σημείων στο επίπεδο $x+y-z = 0$ μας ενδιαφέρουν μόνο οι συντεταγμένες της προβολής κάθε σημείου (δηλαδή οι συντελεστές που εκφράζουν την προβολή κάθε σημείου ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$).

Επειδή η βάση $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ είναι ορθοκανονική γνωρίζουμε ότι η προβολή στο επίπεδο κάθε διανύσματος $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ δίνεται από την σχέση

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{x}_2$$

επομένως, οι συντεταγμένες της προβολής κάθε διανύσματος $\mathbf{v}$ στο επίπεδο $x + y - z = 0$ είναι:

$$(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_2 \rangle)$$

Οι συντεταγμένες κάθε σημείου είναι:

Για το A: $(\langle (0, 0, 0), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (0, 0, 0), \mathbf{x}_2 \rangle) = (0, 0)$

Για το B: $(\langle (12, 0, 0), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (12, 0, 0), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{12}{\sqrt{2}}, -\frac{12}{\sqrt{6}})$.

Για το C: $(\langle (12, 10, 0), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (12, 10, 0), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{12}{\sqrt{2}}, \frac{8}{\sqrt{6}})$.

Για το D: $(\langle (6, 18, 0), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (6, 18, 0), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{30}{\sqrt{6}})$.

Για το E: $(\langle (0, 10, 0), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (0, 10, 0), \mathbf{x}_2 \rangle) = (0, \frac{20}{\sqrt{6}})$.

Για το F: $(\langle (4.8, 2.8, 0), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (4.8, 2.8, 0), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{24}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{6}})$.

Για το G: $(\langle (6.4, 0, 0), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (6.4, 0, 0), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{32}{5\sqrt{2}}, -\frac{32}{5\sqrt{6}})$.

Για το H: $(\langle (12, 0, 20), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (12, 0, 20), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{32}{\sqrt{2}}, \frac{18}{\sqrt{6}})$.

Για το I: $(\langle (12, 10, 20), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (12, 10, 20), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{32}{\sqrt{2}}, \frac{28}{\sqrt{6}})$.

Για το J: $(\langle (6, 18, 20), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (6, 18, 20), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{26}{\sqrt{2}}, \frac{50}{\sqrt{6}})$.

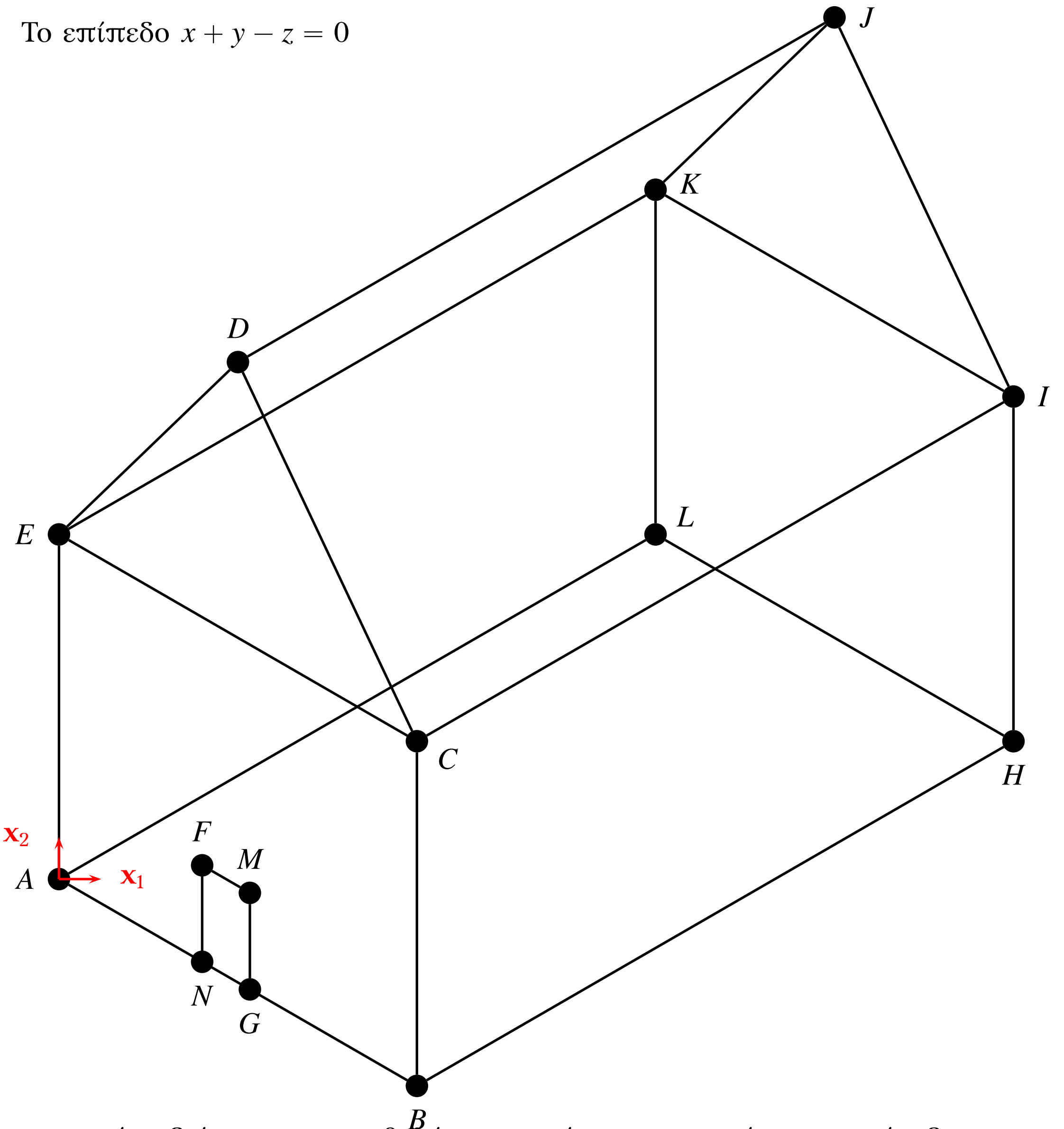
Για το K: $(\langle (0, 10, 20), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (0, 10, 20), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{20}{\sqrt{2}}, \frac{40}{\sqrt{6}})$.

Για το L: $(\langle (0, 0, 20), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (0, 0, 20), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{20}{\sqrt{2}}, \frac{20}{\sqrt{6}})$.

Για το M: $(\langle (6.4, 2.8, 0), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (6.4, 2.8, 0), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{32}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{6}})$.

Για το N: $(\langle (4.8, 0, 0), \mathbf{x}_1 \rangle, \langle (4.8, 0, 0), \mathbf{x}_2 \rangle) = (\frac{24}{5\sqrt{2}}, -\frac{24}{5\sqrt{6}})$.

Σχηματικά, ενώνοντας τα αντίστοιχα σημεία, η προβολή του διαγράμματος του κτηρίου στο επίπεδο $x + y - z = 0$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα:



Οι ετικέτες στο σχήμα δείχνουν τις προβολές των αντίστοιχων σημείων στο επίπεδο $x+y-z=0$. □

10.11 Το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων

Έστω $AX = B$, όπου $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X \in \mathcal{M}_{n\times 1} \simeq \mathbb{R}^n$ και $B \in \mathcal{M}_{m\times 1} \simeq \mathbb{R}^m$.

Το πρόβλημα της εύρεσης του $X \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο η 2-norm

$$\|AX - B\|_2$$

γίνεται ελάχιστη ονομάζεται **πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων** (least squares problem).

Αν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι οι στήλες της μήτρας A και $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ τότε το γινόμενο AX αντιστοιχεί στον γραμμικό συνδυασμό των στηλών της A με συντελεστές τα στοιχεία του X:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

Αν $B \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ τότε $\min\limits_X \|AX - B\|_2 = 0$ και X είναι οι λύσεις του γραμμικού συστήματος $AX = B$.

Αν $B \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ τότε

$$\|P_A B - B\|_2 \leqslant \|AX - B\|_2$$

όπου $P_A B$ είναι η προβολή του B στον χώρο που παράγουν οι στήλες της A.

Επομένως, οι λύσεις X του προβλήματος είναι οι λύσεις του γραμμικού συστήματος

$$AX = P_A B$$

δηλαδή, το X είναι οι συντελεστές των γραμμικών συνδυασμών των στηλών της A με τους οποίους παράγεται το $P_A B$. Αν οι στήλες της A είναι γραμμικώς ανεξάρτητές, τότε η λύση X είναι μοναδική, αλλιώς υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Ισοδύναμα, το διάνυσμα X είναι λύση του προβλήματος, αν και μόνο αν το διάνυσμα $AX - B$ είναι ορθογώνιο στα διανύσματα που παράγονται από τις στήλες του A, δηλαδή

$$A^t(AX - B) = \mathbb{O}_n \Leftrightarrow A^t A X = A^t B$$

Συνοψίζοντας,

Πρόταση 10.25. *Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, τότε οι λύσεις $\mathbf{x}$ του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων ικανοποιούν τις ισοδύναμες σχέσεις:*

i) $A\mathbf{x} = P_A\mathbf{b}$.

ii) $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$.

Επιπλέον, αν οι στήλες της A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε η λύση είναι μοναδική.

Παράδειγμα. *Να βρεθεί η λύση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων*

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$$

όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *και* $\mathbf{b} = (1, 2, 1, 2)$.

Λύση. i) (1ος τρόπος) Πρώτα θα βρούμε μια ορθοκανονική βάση του χώρου των στηλών της A.

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram - Schmidt προκύπτει ότι μια ορθοκανονική βάση του χώρου των στηλών της A είναι τα διανύσματα:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2, 2)$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{410}}(13, -3, -14, 6)$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{39073}}(76, 178, 38, 13)$$

Επομένως,

$$P_A\mathbf{b} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_3\rangle \mathbf{v}_3$$

όπου

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{82}}.$$

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{496}{\sqrt{39073}}.$$

οπότε

$$P_A \mathbf{b} = \left(\frac{1547}{953}, \frac{1642}{953}, \frac{1250}{953}, \frac{1180}{953} \right)$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Gauss για το σύστημα

$$A\mathbf{x} = P_A \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_3 = \frac{1547}{953} \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = \frac{1642}{953} \\ 2x_1 + 4x_3 = \frac{1250}{953} \\ 2x_1 + 2x_3 + 3x_3 = \frac{1180}{953} \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$x_1 = -\frac{367}{953}, x_2 = \frac{213}{953}, x_3 = \frac{496}{953}.$$

οπότε

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (-\frac{367}{953}, \frac{213}{953}, \frac{496}{953})$$

ii) (2ος τρόπος) Ισχύει ότι

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \\ 14 & 9 & 43 \end{bmatrix}$$

και

$$A^t b = (5, 4, 19).$$

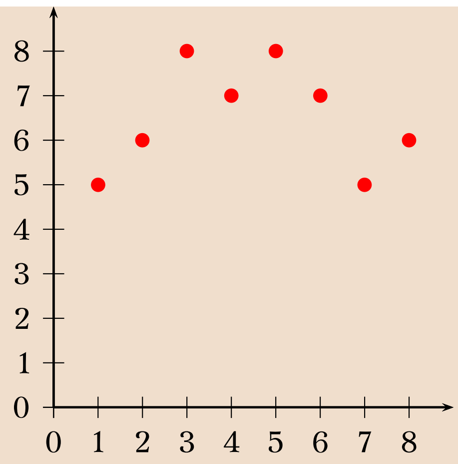
Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Gauss για το σύστημα

$$A^t A\mathbf{x} = A^t b \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 14x_3 = 5 \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 4 \\ 14x_1 + 9x_2 + 43x_3 = 19 \end{cases}$$

προκύπτει και πάλι ότι

$$x_1 = -\frac{367}{953}, x_2 = \frac{213}{953}, x_3 = \frac{496}{953}. \qquad \square$$

Εφαρμογή 10.4. *Δίδονται τα σημεία* $A(1,5)$, $B(2,6)$, $C(3,8)$, $D(4,7)$, $E(5,8)$, $F(6,7)$, $G(7,5)$, $H(8,6)$.



Να βρεθεί η εξίσωση $y = ax^2 + bx + c$ του πολυώνυμου παρεμβολής αυτών των σημείων για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων από τα σημεία είναι ελάχιστο.

Λύση. Έστω $y = ax^2 + bx + c$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Στην ιδανική περίπτωση, θα έπρεπε κάθε σημείο να ικανοποιεί την εξίσωση του πολυωνύμου.

Για το σημείο $A(1,5)$:
$$5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$$
Για το σημείο $B(2,6)$:
$$6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$$
Για το σημείο $C(3,8)$:
$$8 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c$$
Για το σημείο $D(4,7)$:
$$7 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 16a + 4b + c$$
Για το σημείο $E(5,8)$:
$$8 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 25a + 5b + c$$
Για το σημείο $F(6,7)$:
$$7 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 36a + 6b + c$$
Για το σημείο $G(7,5)$:
$$5 = a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = 49a + 7b + c$$
Για το σημείο $H(8,6)$:
$$6 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 64a + 8b + c$$
Ισοδύναμα προκύπτει ότι
$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \\ 36 \\ 49 \\ 64 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Όμως, το σύστημα αυτό είναι αδύνατο, αφού το διάνυσμα $\mathbf{v} = (5,6,8,7,8,7,5,6)$ δεν ανήκει στο χώρο που παράγουν τα διανύσματα $\mathbf{x}_3 = (1,4,9,16,25,36,49,64)$, $\mathbf{x}_2 = (1,2,3,4,5,6,7,8)$ και

$\mathbf{x}_1 = (1,1,1,1,1,1,1,1)$ (η αρίθμηση αυτή είναι πιο βολική). (Άσκηση. Επιβεβαιώστε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.)

Το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων από το πολυώνυμο $y = ax^2 + bx + c$ ισούται με

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{z}\|^2 = (d(\mathbf{v}, \mathbf{z}))^2$$

όπου $\mathbf{z} = a\mathbf{x}_3 + b\mathbf{x}_2 + c\mathbf{x}_1$.

Από όλα τα διανύσματα που ανήκουν στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ η προβολή του $\mathbf{v}$ στο χώρο αυτό απέχει την μικρότερη απόσταση από το $\mathbf{v}$.

(1ος τρόπος υπολογισμού). Πρώτα θα βρούμε ην προβολή του $\mathbf{v}$ στο χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ και $\mathbf{x}_3$ και έπειτα θα υπολογίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές. Προκειμένου να βρούμε την προβολή εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο των Gram - Schmidt στα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ προκειμένου να βρούμε μια ορθοκανονική βάση γι΄ αυτόν.

Έχουμε ότι

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1, \text{ όπου } \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1.$$

Αλλά $\mathbf{y}_1 = (1,1,1,1,1,1,1,1)$. Επομένως,

$$\|\mathbf{y}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle} = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1).$$

Επίσης,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|}\mathbf{y}_2, \text{ όπου } \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1.$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle &= \left\langle (1,2,3,4,5,6,7,8), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 + 7\cdot 1 + 8\cdot 1\right) = \frac{18}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_2 &= (1,2,3,4,5,6,7,8) - 9\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1) \\ &= (1,2,3,4,5,6,7,8) - \frac{9}{2}(1,1,1,1,1,1,1,1) = \frac{1}{2}(-7,-5,-3,-1,1,3,5,7).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|\mathbf{y}_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{168} = \sqrt{42}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2\sqrt{42}}(-7,-5,-3,-1,1,3,5,7).$$

Τέλος,

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|}\mathbf{y}_3, \text{ όπου } \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2\rangle &= \left\langle (1,4,9,16,25,36,49,64), \frac{1}{2\sqrt{42}}(-7,-5,-3,-1,1,3,5,7)\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{42}}(1\cdot(-7)+4\cdot(-5)+9\cdot(-3)+16\cdot(-1)+25\cdot 1+36\cdot 3+49\cdot 5+64\cdot 7) \\ &= \frac{378}{\sqrt{42}} = 9\sqrt{42},\end{aligned}$$

οπότε

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 = 9\sqrt{42}\cdot\frac{1}{2\sqrt{42}}(-7,-5,-3,-1,1,3,5,7) = \frac{9}{2}(-7,-5,-3,-1,1,3,5,7).$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1\rangle &= \left\langle (1,4,9,16,25,36,49,64), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1)\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1\cdot 1+4\cdot 1+9\cdot 1+16\cdot 1+25\cdot 1+36\cdot 1+49\cdot 1+64\cdot 1) = \frac{102}{\sqrt{2}} = 51\sqrt{2},\end{aligned}$$

οπότε

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 = 51\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1) = \frac{51}{2}(1,1,1,1,1,1,1,1).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_3 &= (1,4,9,16,25,36,49,64) - \frac{9}{2}(-7,-5,-3,-1,1,3,5,7) - \frac{51}{2}(1,1,1,1,1,1,1,1) \\ &= (7,1,-3,-5,-5,3,1,7)\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|\mathbf{y}_3\| = \sqrt{7^2+1^2+(-3)^2+(-5)^2+(-5)^2+(-3)^2+1^2+7^2} = 2\sqrt{42}.$$

Τελικά

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2\sqrt{42}}(7,1,-3,-5,-5,3,1,7).$$

Άρα, η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι το σύνολο

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = $$
$$\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1), \frac{1}{2\sqrt{42}}(-7,-5,-3,-1,1,3,5,7), \frac{1}{2\sqrt{42}}(7,1,-3,-5,-5,3,1,7)\}$$

Η προβολή του $\mathbf{v}$ στο σύνολο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι ίση με

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2\rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3\rangle \mathbf{v}_3.$$

Συγκεκριμένα,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1\rangle = \left\langle (5,6,8,7,8,7,5,6), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1)\right\rangle = \frac{52}{2\sqrt{2}} = 13\sqrt{2}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = \left\langle (5,6,8,7,8,7,5,6), \frac{1}{2\sqrt{42}}(-7,-5,-3,-1,1,3,5,7) \right\rangle = 0.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle = \left\langle (5,6,8,7,8,7,5,6), \frac{1}{2\sqrt{42}}(7,1,-3,-5,-5,3,1,7) \right\rangle = -\frac{16}{\sqrt{42}}$$

Επομένως, η προβολή του $\mathbf{v}$ στο χώρο που παράγουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι ίση με

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 13\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,1,1,1,1,1,1,1) - \frac{16}{\sqrt{42}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{42}}(7,1,-3,-5,-5,3,1,7) \\ &= \left(\frac{31}{6}, \frac{265}{42}, \frac{99}{14}, \frac{313}{42}, \frac{313}{42}, \frac{99}{14}, \frac{265}{42}, \frac{31}{6} \right). \end{aligned}$$

Προκειμένου να βρούμε τους συντελεστές του πολυωνύμου $y = ax^2 + bx + c$ θα λύσουμε το (νέο) συμβιβαστό σύστημα

$$\begin{bmatrix} \frac{31}{6} \\ \frac{265}{42} \\ \frac{99}{14} \\ \frac{313}{42} \\ \frac{313}{42} \\ \frac{99}{14} \\ \frac{265}{42} \\ \frac{31}{6} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \\ 36 \\ 49 \\ 64 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ή, ισοδύναμα, το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{31}{6} &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c \\ \frac{265}{42} &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c \\ \frac{99}{14} &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c \\ \frac{313}{42} &= a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 16a + 4b + c \\ \frac{313}{42} &= a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 25a + 5b + c \\ \frac{99}{14} &= a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 36a + 6b + c \\ \frac{265}{42} &= a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = 49a + 7b + c \\ \frac{31}{9} &= a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 64a + 8b + c \end{aligned}$$

Επειδή η λύση υπάρχει και είναι μοναδική, από τις 3 πρώτες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$a = -\frac{4}{21}, b = \frac{12}{7}, c = \frac{51}{14}$$

Επομένως, το ζητούμενο πολυώνυμο $y = ax^2+bx+c$ το οποίο παρεμβάλει τα σημεία A, B, C, D, E, F, G, H με το ελάχιστο σφάλμα (ως προς το άθροισμα των κατακόρυφων αποστάσεων) είναι το

$$y = -\frac{4}{21}x^2 + \frac{12}{7}x + \frac{51}{14}.$$

(2ος τρόπος υπολογισμού). Θεωρούμε την μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

με στήλες τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ και $\mathbf{x}_3$. Το ζητούμενο είναι η λύση του συστήματος

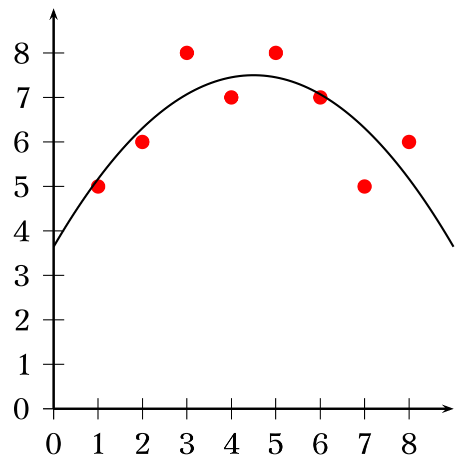
$$A^t A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A^t \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8772 & 1296 & 204 \\ 1296 & 204 & 36 \\ 204 & 36 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1294 \\ 234 \\ 52 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8772a + 1296b + 204c = 1294 \\ 1296a + 204b + 36c = 234 \\ 204a + 36b + 8c = 52 \end{cases}$$

Από τον αλγόριθμο του Gauss προκύπτει και πάλι ότι

$$a = -\frac{4}{21}, \; b = \frac{12}{7}, \; c = \frac{51}{14},$$

οπότε, το ζητούμενο πολυώνυμο $y = ax^2+bx+c$ το οποίο παρεμβάλει τα σημεία A, B, C, D, E, F, G, H με το ελάχιστο σφάλμα (ως προς το άθροισμα των κατακόρυφων αποστάσεων) είναι το

$$y = -\frac{4}{21}x^2 + \frac{12}{7}x + \frac{51}{14}.$$



□

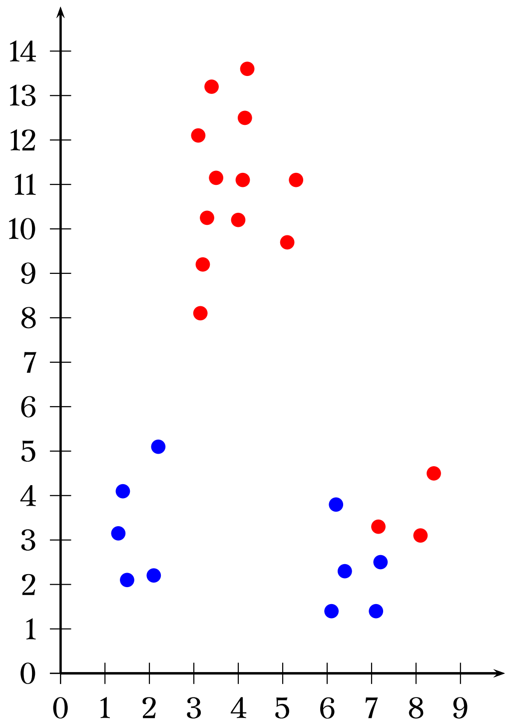
Εφαρμογή 10.5. *Δίδεται η 25×2 μήτρα P της οποίας οι γραμμές αναπαριστούν τις συντεταγ-*

μένες 25 σημείων του $\mathbb{R}^2$.

$\mathbf{v}_1$	1.5	2.1	*Type Blue*
$\mathbf{v}_2$	1.3	3.15	*Type Blue*
$\mathbf{v}_3$	1.4	4.1	*Type Blue*
$\mathbf{v}_4$	2.1	2.2	*Type Blue*
$\mathbf{v}_5$	2.2	5.1	*Type Blue*
$\mathbf{v}_6$	3.15	8.1	*Type Red*
$\mathbf{v}_7$	3.2	9.2	*Type Red*
$\mathbf{v}_8$	3.3	10.25	*Type Red*
$\mathbf{v}_9$	3.5	11.15	*Type Red*
$\mathbf{v}_{10}$	3.1	12.1	*Type Red*
$\mathbf{v}_{11}$	3.4	13.2	*Type Red*
$\mathbf{v}_{12}$	4	10.2	*Type Red*
$P = \mathbf{v}_{13}$	4.1	11.1	*Type Red*
$\mathbf{v}_{14}$	4.15	12.5	*Type Red*
$\mathbf{v}_{15}$	4.2	13.6	*Type Red*
$\mathbf{v}_{16}$	5.1	9.7	*Type Red*
$\mathbf{v}_{17}$	5.3	11.1	*Type Red*
$\mathbf{v}_{18}$	6.1	1.4	*Type Blue*
$\mathbf{v}_{19}$	6.4	2.3	*Type Blue*
$\mathbf{v}_{20}$	6.2	3.8	*Type Blue*
$\mathbf{v}_{21}$	7.1	1.4	*Type Blue*
$\mathbf{v}_{22}$	7.2	2.5	*Type Blue*
$\mathbf{v}_{23}$	7.15	3.3	*Type Red*
$\mathbf{v}_{24}$	8.1	3.1	*Type Red*
$\mathbf{v}_{25}$	8.4	4.5	*Type Red*

Κάθε σημείο έχει χαρακτηρισθεί είτε ως μπλε *(blue) είτε ως* κόκκινο *(red). Με βάση τα δεδομένα που μας δίδονται μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα τρόπο να "χαρακτηρίζουμε" οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^2$ ως μπλε ή κόκκινο.*

Λύση. Μια απλή προσέγγιση στο πρόβλημα αυτό είναι η εύρεση ενός **γραμμικού διαχωριστή**, δηλαδή η εύρεση της εξίσωσης μιας ευθείας (ή γενικότερα ενός υπερεπιπέδου) η οποία, στην ιδανική περίπτωση, έχει την ιδιότητα ότι τα δεδομένα που ανήκουν στη κάθε κατηγορία βρίσκονται όλα στο ίδιο ημιεπίπεδο από τα δύο ημιεπιπέδα που ορίζονται από την ευθεία (ή γενικότερα το υπερεπιπέδου).



Αν αναπαραστήσουμε γραφικά τα σημεία αυτά παρατηρούμε ότι η ζητούμενη ευθεία δεν μπορεί να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, επομένως η εξίσωσή της έχει την μορφή

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 = 0$$

Γενικότερα, αν τα δεδομένα μας ανήκουν στον $\mathbb{R}^m$ τότε στην περίπτωση όπου διέρχεται από την αρχή των αξόνων η εξίσωση της ευθείας που αναζητούμε έχει την μορφή:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m = 0$$

και την εξίσωση

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m + a_{m+1} = 0$$

στην περίπτωση όπου δεν διέρχεται υποχρεωτικά από την αρχή των αξόνων. Γενικά, μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι η ευθεία μας δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να υπολογίζουμε πάντα την γενικότερη εξίσωση.

Η εύρεση του ημιεπιπέδου στο οποίο ανήκει κάποιο σημείο $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ το οποίο βρίσκεται εκτός της ευθείας $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m + a_{m+1} = 0$ μπορεί να γίνει εύκολα χρησιμοποιώντας την εξής ιδιότητα: Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ αν

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle + a_{n+1} > 0$$

τότε το σημείο $\mathbf{y}$ ανήκει στο ένα ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία, ενώ αν

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle + a_{n+1} < 0$$

τότε το σημείο $\mathbf{y}$ ανήκει στο άλλο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία.

Επειδή η εύρεση της άγνωστης ευθείας με βάση το πρόσημο δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμη, αντί αυτού θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω τεχνική:

Θα βρούμε 3 σταθερές a_1, a_2, a_3 έτσι ώστε για κάθε σημείο $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ να ισχύει

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 = +1$$

αν το **y** χαρακτηρίζεται μπλε, και

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3 = -1$$

αν το **y** χαρακτηρίζεται κόκκινο.

Για τον υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε ως δεδομένα "εκπαίδευσης" τα 25 σημεία για τα οποία γνωρίζουμε τους χαρακτηρισμούς τους. Κατόπιν τούτου προκύπτει το μη συμβιβαστό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 2.1 \\ 1.3 & 3.15 \\ 1.4 & 4.1 \\ 2.1 & 2.2 \\ 2.2 & 5.1 \\ 3.15 & 8.1 \\ 3.2 & 9.2 \\ 3.3 & 10.25 \\ 3.5 & 11.15 \\ 3.1 & 12.1 \\ 3.4 & 13.2 \\ 4 & 10.2 \\ 4.1 & 11.1 \\ 4.15 & 12.5 \\ 4.2 & 13.6 \\ 5.1 & 9.7 \\ 5.3 & 11.1 \\ 6.1 & 1.4 \\ 6.4 & 2.3 \\ 6.2 & 3.8 \\ 7.1 & 1.4 \\ 7.2 & 2.5 \\ 7.15 & 3.3 \\ 8.1 & 3.1 \\ 8.4 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1.5 & 2.1 & 1 \\ 1.3 & 3.15 & 1 \\ 1.4 & 4.1 & 1 \\ 2.1 & 2.2 & 1 \\ 2.2 & 5.1 & 1 \\ 3.15 & 8.1 & 1 \\ 3.2 & 9.2 & 1 \\ 3.3 & 10.25 & 1 \\ 3.5 & 11.15 & 1 \\ 3.1 & 12.1 & 1 \\ 3.4 & 13.2 & 1 \\ 4 & 10.2 & 1 \\ 4.1 & 11.1 & 1 \\ 4.15 & 12.5 & 1 \\ 4.2 & 13.6 & 1 \\ 5.1 & 9.7 & 1 \\ 5.3 & 11.1 & 1 \\ 6.1 & 1.4 & 1 \\ 6.4 & 2.3 & 1 \\ 6.2 & 3.8 & 1 \\ 7.1 & 1.4 & 1 \\ 7.2 & 2.5 & 1 \\ 7.15 & 3.3 & 1 \\ 8.1 & 3.1 & 1 \\ 8.4 & 4.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Έστω $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ τα διανύσματα του $\mathbb{R}^{25}$ που αντιστοιχουν στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη της μήτρας A των συντελεστών του συστήματος και $\mathbf{b} = (1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,$ $-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1)$ το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην μήτρα στήλη των σταθερών του συστήματος.

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, αρκεί να υπολογίσουμε τα a_1, a_2, a_3 ώστε ο γραμμικός συνδυασμός $a_1\mathbf{C}_1 + a_2\mathbf{C}_2 + a_3\mathbf{C}_3$ να ισούται με την προβολή του διανύσματος $\mathbf{b}$ στο χώρο που παράγουν οι στήλες $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$. Το ζητούμενο είναι η λύση του συστήματος

$$A^tA \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = A^t\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 607.548 & 703.89 & 111.65 \\ 703.89 & 1618.69 & 171.15 \\ 111.65 & 171.15 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28.65 \\ -115.05 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 607.548a_1 + 703.89a_2 + 111.65a_3 = -28.65 \\ 703.89a_1 + 1618.69a_2 + 171.15a_3 = -115.05 \\ 111.65a_1 + 171.15a_2 + 25a_3 = -5 \end{cases}$$

Από τον αλγόριθμο του Gauss προκύπτει ότι

$$a_1 = -0.171261, a_2 = -0.203974, a_3 = 1.96126$$

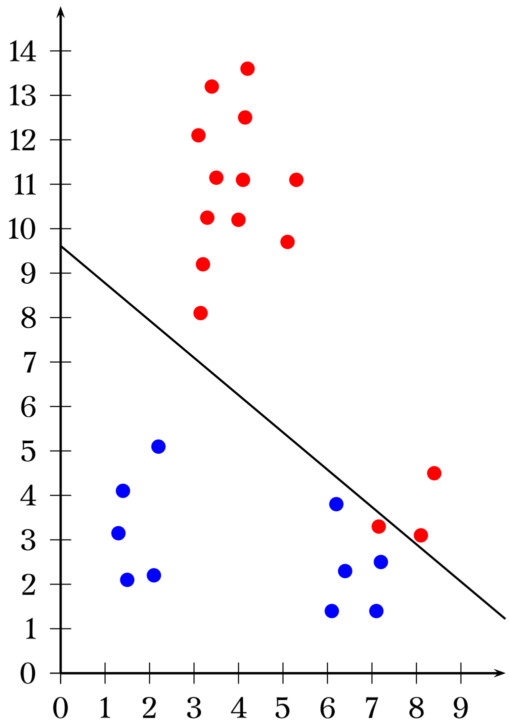
οπότε η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση

$$-0.171261x_1 - 0.203974x_2 + 1.96126 = 0$$

ή, ισοδύναμα

$$x_2 = 9.61523 - 0.83962x_1$$

Όπως μπορούμε να δούμε γραφικά η ευθεία αυτή είναι πολύ καλός διαχωριστής για τα 25 σημεία των δεδομένων μας.



Προκειμένου να χαρακτηρίσουμε ένα άλλο σημείο $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ελέγχουμε αν βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ένα από τα σημεία που ήδη γνωρίζουμε τον χαρακτηρισμό του. Π.χ. για το σημείο $\mathbf{v}_1 = (1.5, 2.1)$ έχουμε

$$-0.171261 \cdot 1.5 - 0.203974 \cdot 2.1 + 1.96126 = 1.27602 > 0$$

επομένως τα μπλε σημεία βρίσκονται στο θετικό ημιεπίπεδο.

Για το σημείο $\mathbf{y} = (2, 3)$ ισχύει ότι

$$-0.171261 \cdot 2 - 0.203974 \cdot 3 + 1.96126 = 1.00681 > 0$$

οπότε το σημείο αυτό βρίσκεται στο θετικό ημιεπίπεδο (των μπλε σημείων), άρα το χαρακτηρίζουμε μπλε.

Για το σημείο $\mathbf{y} = (8, 5)$ ισχύει ότι

$$-0.171261 \cdot 8 - 0.203974 \cdot 5 + 1.96126 = -0.428699 < 0$$

οπότε το σημείο αυτό βρίσκεται στο αρνητικό ημιεπίπεδο (των κόκκινων σημείων), άρα το χαρακτηρίζουμε κόκκινο. $\square$

10.12 Ορθογώνια διαγωνιοποίηση

Η μήτρα $A \in \mathcal{M}_n$ λέγεται **ορθογωνίως διαγωνιοποίησιμη** αν υπάρχει ορθογώνια μήτρα P τέτοια ώστε

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

όπου D είναι διαγώνια μήτρα. Επειδή η P είναι ορθογώνια ισχύει ότι $P^{-1} = P^t$, οπότε

$$P^t \cdot A \cdot P = D.$$

Πρόταση 10.26. *Η μήτρα A είναι ορθογωνίως διαγωνιοποίησιμη αν και μόνο αν είναι συμμετρική.*

Παρατήρηση: (Μέθοδος για ορθογώνια διαγωνιοποίηση). Αν η $P \in \mathcal{M}_n$ σχηματίζεται από τις στήλες $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, οι οποίες αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$, τότε η P είναι ορθογώνια.

Πράγματι, αφού η i-γραμμή της P^t ισούται με την i-στήλη της P (δηλαδή με $\mathbf{v}_i$), τότε το στοιχείο b_{ii} της μήτρας $B = P^tP$ θα είναι το $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$, ενώ το στοιχείο b_{ij} για $i \neq j$ θα είναι το $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$. Άρα

$$B = P^tP = I$$

δηλαδή η P είναι ορθογώνια.

Για παράδειγμα, είδαμε ότι το σύνολο

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Τότε η μήτρα

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνια.

Πράγματι,

$$P^tP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = I.$$

Για να διαγωνιοποίησουμε ορθογωνίως λοιπόν μια μήτρα A, αρκεί να βρούμε μια μήτρα P που να την διαγωνιοποιεί και στη συνέχεια να ορθοκανονικοποίησουμε τις στήλες της μήτρας P.

Παράδειγμα (Ορθογώνια διαγωνιοποίηση). *Έστω η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν ορθογώνια P και διαγώνια D ώστε $P^{-1}AP = D$.

Λύση. Η A είναι συμμετρική, επομένως είναι ορθογωνίως διαγωνιοποιήσιμη.

1. Εύρεση των ιδιοτιμών:

$$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2(8-\lambda) = 0,$$

   οπότε βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ (διπλή) και $\lambda_2 = 8$ (απλή).

2. Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοχώρων:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + (4-\lambda)w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + (4-\lambda)w_3 = 0 \end{cases}$$

   Για $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 0 \Leftrightarrow w_1 = -w_2 - w_3.$$

   Άρα

$$X = \begin{bmatrix} -w_2 - w_3 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_2 \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -w_3 \\ 0 \\ w_3 \end{bmatrix} = w_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, |w_2| + |w_3| \neq 0.$$

   Η αντίστοιχη βάση είναι η

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = \{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

   Για $\lambda = 8$:

$$\begin{cases} -4w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + -4w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + -4w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w_1 = w_2 = w_3.$$

   Άρα $X = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 \in \mathbb{R}^*.$

   Η αντίστοιχη βάση είναι η

$$\{\mathbf{x}_3\} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

Παρατήρηση: Αν ζητούσαμε να διαγωνιοποιήσουμε απλά (και όχι ορθογωνίως) την A, θα τελειώναμε εδώ, με

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

και

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Για την ορθογώνια διαγωνιοποίηση, συνεχίζουμε ορθοκανονικοποιώντας το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

σύμφωνα με την μέθοδο Gram-Schmidt

Έχουμε $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ και

$$\|\mathbf{y}_1\| = \|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2},$$

οπότε

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$. Αλλά,

$$\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Άρα,

$$\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

με

$$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|}\mathbf{y}_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1.$$

Αλλά,

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

και

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\rangle = 0,$$

οπότε

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - 0 \cdot \mathbf{v}_2 - 0 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και συνεπώς $\|\mathbf{y}_3\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, δίνοντας τελικά

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|}\mathbf{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Τελικά, η ζητούμενη **ορθογώνια** μήτρα P είναι η μήτρα με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Πράγματι, η P είναι ορθογώνια (άσκηση) και

$$P^{-1}AP = P^tAP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Παρατηρήσεις:

i) Όπως στην (απλή) διαγωνιοποίηση, έτσι και στην ορθογώνια διαγωνιοποίηση, η διαγώνια μήτρα $D = P^{-1}AP (= P^tAP)$ έχει ως στοιχεία της διαγωνίου της τις αντίστοιχες ιδιοτιμές της μήτρας A.

ii) Η διαδικασία ορθογώνιας διαγωνιοποίησης μιας μήτρας A, (η οποία, όπως ήδη αναφέραμε, είναι αναγκαίο να είναι συμμετρική) μπορεί να διευκολυνθεί με την χρήση του παρακάτω αποτελέσματος.

Πρόταση 10.27. *Αν μια μήτρα είναι συμμετρική, τότε τα ιδιοδιανύσματά της, που ανήκουν σε διαφορετικούς ιδιόχωρους είναι ορθογώνια.*

Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα, για την εύρεση του $\mathbf{v}_3$, γνωρίζουμε εκ των προτέρων, βάσει της τελευταίας πρότασης, ότι $\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 \rangle = 0$ (και άρα $\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$) και άρα γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι ο τύπος

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$$

θα έδινε τελικά $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3$ (οπότε μπορούσαμε να συνεχίσουμε κατευθείαν από το

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

10.13 Διάσπαση ιδιαζουσών τιμών

Μια από τις πιο χρήσιμες διασπάσεις μητρών που **ορίζονται και για μη τετραγωνικές μήτρες** είναι η **διάσπαση ιδιαζουσών τιμών** (singular value decomposition (**SVD**)).

Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Η **διάσπαση ιδιαζουσών τιμών** της A είναι το γινόμενο

$$A = U\Sigma V^t$$

όπου $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $p = \min\{m, n\}$, είναι μια διαγώνια $m \times n$ μήτρα [1] με διαγώνιες τιμές $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_p \geqslant 0$ και $U \in \mathcal{M}_{m\times m}$ και $V \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι ορθογώνιες μήτρες. Τα σ_i ονομάζονται **ιδιάζουσες τιμές** (singular values) της A. Οι στήλες των U, V ονομάζονται **αριστερά** και **δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα** (singular vectors) της A αντίστοιχα.

Παρατήρηση: Για την διάσπαση ιδιαζουσών τιμών έχουν καθιερωθεί τα σύμβολα U, Σ και V.

Αποδεικνύεται ότι κάθε πραγματική μήτρα A έχει διάσπαση ιδιαζουσών τιμών και ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 10.28. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ με διάσπαση ιδιαζουσών τιμών $A = U\Sigma V^t$, όπου $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$ και $p = \min\{m, n\}$. Τότε*

i) Οι ιδιάζουσες τιμές της A ισούνται με τις (μη αρνητικές) τετραγωνικές ρίζες των p μεγαλύτερων ιδιοτιμών της $n \times n$ μήτρας A^tA, (ή της $m \times m$ μήτρας AA^t). Ανάλογα με το p, οι επιπλέον ιδιοτιμές της A^tA ή της A^tA είναι 0.

ii) Οι στήλες v_i της ορθογώνιας μήτρας V είναι τα ιδιοδιανύσματα της $n \times n$ μήτρας A^tA.

iii) Οι στήλες u_i της ορθογώνιας μήτρας U είναι τα ιδιοδιανύσματα της $m \times m$ μήτρας AA^t.

iv) Για $i = 1, 2, \ldots, p$, οι i-οστές στήλες u_i και v_i των U και V αντίστοιχα συνδέονται με τις σχέσεις:

$$Av_i = \sigma_i u_i \text{ και } A^t u_i = \sigma_i v_i$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $m \geqslant n$, οπότε $p = n$.

Υπενθυμίζεται ότι μια τετραγωνική μήτρα B ονομάζεται ορθογωνίως διαγωνιοποιήσιμη αν $B = PDP^t$ όπου P είναι ορθογώνια μήτρα (δηλαδή $P^{-1} = P^t$). Μια τετραγωνική μήτρα είναι ορθογωνίως διαγωνιοποιήσιμη ανν είναι συμμετρική. Για κάθε μήτρα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ οι μήτρες A^tA, AA^t είναι συμμετρικές, επομένως είναι ορθογώνιως διαγωνοποιήσιμες.

Ισχύει ότι $A^tA \in \mathcal{M}_n$ με

$$A^tA = (U\Sigma V^t)^t(U\Sigma V^t) = V\Sigma^t U^t U\Sigma V^t = V(\Sigma^t\Sigma)V^t$$

όπου $\Sigma^t\Sigma \in \mathcal{M}_{n\times n}$ με $\Sigma^t\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$, δηλαδή οι στήλες της V είναι ιδιοδιανύσματα της μήτρας A^tA με αντίστοιχες ιδιοτιμές τα τετράγωνα των ιδιαζουσών τιμών της A.

[1] Στις μη τετραγωνικές διαγώνιες $m \times n$ μήτρες τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στην i-οστή γραμμή και i-οστή στήλη όπου $i \leqslant \min\{m, n\}$ και ανάλογα με τα m, n έχουν τις μορφές $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ όταν $n < m$ και $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ όταν $m < n$.

Ομοίως, ισχύει ότι $AA^t \in \mathcal{M}_{m\times m}$ με

$$AA^t = (U\Sigma V^t)(U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U(\Sigma\Sigma^t)U^t$$

όπου $\Sigma\Sigma^t \in \mathcal{M}_{m\times m}$ με $\Sigma\Sigma^t = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2, 0, \ldots, 0)$, δηλαδή οι στήλες της U είναι ιδιοδιανύσματα της μήτρας AA^t με αντίστοιχες ιδιοτιμές τα τετράγωνα των ιδιαζουσών τιμών της A και $m - n$ επιπλεον μηδενικές ιδιοτιμές της AA^t.

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$AV = U\Sigma V^t V \Leftrightarrow AV = U\Sigma$$

και

$$U^t A = U^t U \Sigma V^t \Leftrightarrow U^t A = \Sigma V^t \Leftrightarrow (U^t A)^t = (\Sigma V^t)^t \Leftrightarrow A^t U = V\Sigma^t.$$

Άρα, οι i-οστές στήλες u_i και v_i των U και V αντίστοιχα συνδέονται με τις σχέσεις:

$$Av_i = \sigma_i u_i \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, p$$

και

$$A^t u_i = \sigma_i v_i \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, p.$$ □

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει το επόμενο πόρισμα:

Πόρισμα 10.29. *Η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών μιας συμμετρικής τετραγωνικής $n \times n$ μήτρας A με μη αρνητικές ιδιοτιμές ταυτίζεται με την ορθογώνια διαγωνιοποίηση της μήτρας A, όπου οι ιδιοτιμές της A εμφανίζονται στην D σε φθίνουσα σειρά.*

Παράδειγμα. *Να βρεθεί η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών της μήτρας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Εδώ $p = \min\{3, 2\} = 2$. Άρα, η A έχει δυο ιδιάζουσες τιμές. Μας συμφέρει να τις υπολογίσουμε από τις ιδιοτιμές της 2×2 μήτρας AA^t. Έχουμε ότι

$$AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Από την χαρακτηριστική εξίσωση της AA^t:

$$\begin{vmatrix} 14 - \lambda & 6 \\ 6 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (14 - \lambda)(9 - \lambda) - 6^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 23\lambda + 90 = 0$$

προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές της AA^t σε φθίνουσα σειρά είναι

$$\lambda_1 = 18 \text{ και } \lambda_2 = 5$$

Επομένως, οι ιδιάζουσες τιμές της A είναι

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{18} \text{ και } \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{5}.$$

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 18$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, ενώ στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Κανονικοποιώντας τα δύο ιδιοδιανύσματα προκύπτουν αντίστοιχα τα διανύσματα $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$ και $u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$, τα οποία αποτελούν τις στήλες της ορθογώνιας μήτρας U, δηλαδή

$$U = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}.$$

Απομένει να βρούμε τις στήλες της ορθογώνιας μήτρας V. Οι στήλες της V είναι τα ιδιοδιανύσματα της 3×3 μήτρας $A^t A$.

Τις δύο πρώτες στήλες της V μπορούμε να τις υπολογίσουμε από την σχέση

$$A^t u_i = \sigma_i v_i$$

Πράγματι,

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A^t u_1 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{13}} \\ \frac{4}{\sqrt{13}} \\ \frac{13}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{234}} \\ \frac{4}{\sqrt{234}} \\ \frac{13}{\sqrt{234}} \end{bmatrix}$$

και

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A^t u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{13}} \\ -\frac{7}{\sqrt{13}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{65}} \\ -\frac{7}{\sqrt{65}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Την τρίτη στήλη της V θα την υπολογίσουμε βρίσκοντας το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί την ιδιοτιμή 0 της μήτρας $A^t A$:

Έχουμε ότι

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 13 \end{bmatrix}.$$

Στην ιδιοτιμή 0 αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$. Κανονικοποιώντας, προκύπτει το διάνυσμα $v_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{3\sqrt{10}} \\ \frac{4}{3\sqrt{10}} \\ -\frac{5}{3\sqrt{10}} \end{bmatrix}$. Επομένως, η ορθογώνια 3×3 μήτρα V ισούται με

$$V = \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{234}} & \frac{4}{\sqrt{65}} & \frac{7}{3\sqrt{10}} \\ \frac{4}{\sqrt{234}} & -\frac{7}{\sqrt{65}} & \frac{4}{3\sqrt{10}} \\ \frac{13}{\sqrt{234}} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας, η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών της A είναι

$$A = U\Sigma V^t = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{234}} & \frac{4}{\sqrt{234}} & \frac{13}{\sqrt{234}} \\ \frac{4}{\sqrt{65}} & -\frac{7}{\sqrt{65}} & 0 \\ \frac{7}{3\sqrt{10}} & \frac{4}{3\sqrt{10}} & -\frac{5}{3\sqrt{10}} \end{bmatrix} \qquad \square$$

Παρατήρηση: Η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών ανακαλύφθηκε το 1873 από τον Beltrami αλλά ο πρώτος πρακτικός τρόπος υπολογισμού της για μεγάλες μήτρες δόθηκε το 1965 από τους Golub και Kahan: Η μέθοδός τους υπολογίζει την διάσπαση ιδιαζουσών τιμών χωρίς να χρειαστεί η χρονοβόρα διαδικασία υπολογισμού της ορθογώνιας διαγωνιοποίησης της μήτρας AA^t ή A^tA.

Η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών δίνει πολλές πληροφορίες για την μήτρα A και τους βασικούς υποχώρους που σχετίζονται με αυτή.

Πρόταση 10.30. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $A = U\Sigma V^t$ η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών της A. Τότε*

i) Το rank της A ισούται με τον αριθμό των μη μηδενικών ιδιαζουσών τιμών της.

ii) Η εικόνα της A παράγεται από τις πρώτες r στήλες της U.

iii) Ο πυρήνας της A παράγεται από τις τελευταίες $n - r$ στήλες της V.

Πρόταση 10.31. *Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $A = U\Sigma V^t$ η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών της A, με $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$, όπου $p = \min\{m, n\}$, U ορθογώνια $m \times m$ μήτρα με στήλες $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_m$, V ορθογώνια $n \times n$ μήτρα με στήλες $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$. Τότε*

$$A = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^t + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^t + \cdots + \sigma_p\mathbf{u}_p\mathbf{v}_p^t \tag{10.1}$$

Με άλλα λόγια, η μήτρα A εκφράζεται ως άθροισμα μητρών που έχουν rank 1 (οι οποίες προκύπτουν από τις στήλες των μητρών U και V.

Κάποιες φορές αντί της γραφής $A = U\Sigma V^t$ η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών της A ορίζεται ως το (ισοδύναμο) άθροισμα (10.1)

Παράδειγμα. *Δίδεται η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να εκφραστεί ως άθροισμα μητρών που έχουν rank 1.

Λύση. Η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών της A είναι

$$A = U\Sigma V^t = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{234}} & \frac{4}{\sqrt{234}} & \frac{13}{\sqrt{234}} \\ \frac{4}{\sqrt{65}} & \frac{-7}{\sqrt{65}} & 0 \\ \frac{7}{3\sqrt{10}} & \frac{4}{3\sqrt{10}} & \frac{-5}{3\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

Επομένως, η A εκφράζεται ως άθροισμα μητρών που έχουν rank 1 ως εξής:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \sigma_1 u_1 v_1^t + \sigma_2 u_2 v_2^t \\
&= \sqrt{18} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{234}} & \frac{4}{\sqrt{234}} & \frac{13}{\sqrt{234}} \end{bmatrix} + \sqrt{5} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{65}} & \frac{-7}{\sqrt{65}} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{13 \cdot 234}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 13 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13 \cdot 65}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -7 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 21 & 12 & 39 \\ 14 & 8 & 26 \end{bmatrix} + \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -8 & 14 & 0 \\ 12 & -21 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{21}{13} & \frac{12}{13} & 3 \\ \frac{14}{13} & \frac{8}{13} & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-8}{13} & \frac{14}{13} & 0 \\ \frac{12}{13} & \frac{-21}{13} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1.61538 & 0.92308 & 3 \\ 1.07692 & 0.61538 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.61538 & 1.07692 & 0 \\ 0.92308 & -1.61538 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση: Έστω μια μήτρα A με $\text{rank}(A) = r$, δηλαδή η διάσταση του χώρου των στηλών (ή των γραμμών) της A είναι r. Σε πολλές εφαρμογές όπου η διάσταση r είναι πολύ μεγάλη, ψάχνουμε μια άλλη μήτρα B η οποία διαφέρει όσο το δυνατόν "λιγότερο" από την A, αλλά έχει μικρότερο rank. Η επόμενη πρόταση μας δείχνει πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διάσπαση ιδιαζουσών τιμών της A για να βρούμε την "πλησιέστερη" μήτρα B η οποία έχει rank k, όπου $k < r$.

Πρόταση 10.32 (Θεώρημα Eckart - Young). *Έστω $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ με rank r και διάσπαση ιδιαζουσών τιμών*

$$A = U\Sigma V^t = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^t + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^t + \cdots + \sigma_p \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^t$$

όπου $p = \min\{m, n\}$.

Για κάθε $k < r = \text{rank}(A)$ η μήτρα

$$A_k = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^t + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^t + \cdots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^t$$

έχει rank k και για οποιαδήποτε άλλη μήτρα B με rank k ισχύει ότι

$$\|A - A_k\| \leqslant \|A - B\|$$

ή ισοδύναμα

$$\min_{\text{rank}(B)=k} \|A - B\| = \|A - A_k\|$$

όπου $\|P\|$ είναι οποιαδήποτε άλλη norm μητρών.

Με άλλα λόγια, η μήτρα A_k είναι η πλησιέστερη μήτρα με rank k στην A από όλες τις μήτρες B που έχουν rank k.

Ειδικότερα, για τις παρακάτω συνηθισμένες norm η απόσταση αυτή είναι:

Αν $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ *(Frobenius norm) τότε*

$$\|A - A_k\| = \min_{\mathrm{rank}(B)=k} \|A - B\| = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2}.$$

Αν $\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ *όπου* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$ *(2-norm) τότε*

$$\|A - A_k\| = \min_{\mathrm{rank}(B)=k} \|A - B\| = \sigma_{k+1}.$$

Παρατηρήσεις:

i) Η μήτρα A_k μπορεί να υπολογισθεί και από το γινόμενο

$$A_k = UD_kV^t$$

όπου

$$D_k = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0).$$

ii) Η μήτρα A_k του θεωρήματος Eckart - Young ονομάζεται **βέλτιστη rank κ προσέγγιση** της A

iii) Σε πολλές περιπτώσεις, ενώ οι μήτρες που αντιστοιχούν στα δεδομένα έπρεπε να έχουν υποχρεωτικά μικρό rank, όμως εξαιτίας σφαλμάτων στα παρατηρούμενα δεδομένα τελικά καταλήγουμε με μήτρες που έχουν μεγάλο rank. Το θεώρημα Eckart - Young μας εξασφαλίζει ότι για να λάβουμε μια μήτρα μικροτέρου rank μπορούμε δικαιολογημένα να αγνοήσουμε τις ιδιάζουσες τιμές που είναι της ίδιας τάξης με τα σφάλματα στα δεδομένα μας (δηλαδή να τις θέσουμε ίσες με μηδέν) και να υπολογίσουμε εκ νέου το γινόμενο $U\Sigma V$.

Παράδειγμα. *Να βρεθεί η βέλτιστη* rank 1 *προσέγγιση της μήτρας* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *του προηγούμενου παραδείγματος.*

Απόδειξη. Προηγουμένως βρήκαμε ότι η μήτρα A έχει διάσπαση ιδιαζουσών τιμών

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^t = \sigma_1 u_1 v_1^t + \sigma_2 u_2 v_2^t \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{234}} & \frac{4}{\sqrt{234}} & \frac{13}{\sqrt{234}} \\ \frac{4}{\sqrt{65}} & -\frac{7}{\sqrt{65}} & 0 \\ \frac{7}{3\sqrt{10}} & \frac{4}{3\sqrt{10}} & -\frac{5}{3\sqrt{10}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{21}{13} & \frac{12}{13} & 3 \\ \frac{14}{13} & \frac{8}{13} & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-8}{13} & \frac{14}{13} & 0 \\ \frac{12}{13} & \frac{-21}{13} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Με βάση το Θεώρημα Eckart - Young, η βέλτιστη rank 1 προσέγγιση A_1 της A προκύπτει κρατώντας μόνο την μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή της, και θέτωντας ίσες με 0 τις υπόλοιπες. Οπότε

$$A_1 = \sigma_1 u_1 v_1^t = \sqrt{18} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{234}} & \frac{4}{\sqrt{234}} & \frac{13}{\sqrt{234}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{13} & \frac{12}{13} & 3 \\ \frac{14}{13} & \frac{8}{13} & 2 \end{bmatrix}$$

Ή, ισοδύναμα

$$A_1 = UD_1V^t = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{234}} & \frac{4}{\sqrt{234}} & \frac{13}{\sqrt{234}} \\ \frac{4}{\sqrt{65}} & -\frac{7}{\sqrt{65}} & 0 \\ \frac{7}{3\sqrt{10}} & \frac{4}{3\sqrt{10}} & -\frac{5}{3\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{13} & \frac{12}{13} & 3 \\ \frac{14}{13} & \frac{8}{13} & 2 \end{bmatrix}$$

□

Παράδειγμα. *Να βρεθούν οι βέλτιστες rank 1,2 και 3 προσέγγισεις της 17×4 μήτρας A με*

$$A = \begin{bmatrix} 5.1 & 3.5 & 1.4 & 0.2 \\ 4.9 & 3.0 & 1.4 & 0.2 \\ 4.7 & 3.2 & 1.3 & 0.2 \\ 4.6 & 3.1 & 1.5 & 0.2 \\ 5.0 & 3.6 & 1.4 & 0.2 \\ 5.4 & 3.9 & 1.7 & 0.4 \\ 4.6 & 3.4 & 1.4 & 0.3 \\ 5.0 & 3.4 & 1.5 & 0.2 \\ 4.4 & 2.9 & 1.4 & 0.2 \\ 4.9 & 3.1 & 1.5 & 0.1 \\ 5.4 & 3.7 & 1.5 & 0.2 \\ 4.8 & 3.4 & 1.6 & 0.2 \\ 4.8 & 3.0 & 1.4 & 0.1 \\ 4.3 & 3.0 & 1.1 & 0.1 \\ 5.8 & 4.0 & 1.2 & 0.2 \\ 5.7 & 4.4 & 1.5 & 0.4 \\ 5.4 & 3.9 & 1.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Λύση. Αρχικά, υπολογίζουμε την διάσπαση ιδιαζουσών τιμών της A από την οποία προκύπτει

$$A = U\Sigma V^t$$

όπου U έχει διαστάσεις 17×17, Σ έχει διαστάσεις 17×4 και V έχει διαστάσεις 4×4. Οι ιδιάζουσες τιμές της A είναι $\sigma_1 = 25.7804$, $\sigma_2 = 0.823796$, $\sigma_3 = 0.588009$ και $\sigma_4 = 0.218905$. Άρα, η A έχει rank 4.

Μηδενίζοντας την σ_4 και υπολογίζοντας εκ νέου το γινόμενο $U\Sigma V^t$ προκύπτει ότι η βέλτιστη rank 3 προσέγγιση της A είναι η μήτρα

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5.10347 & 3.49462 & 1.39846 & 0.215215 \\ 4.87826 & 3.03376 & 1.40968 & 0.104607 \\ 4.69864 & 3.2021 & 1.3006 & 0.194054 \\ 4.60012 & 3.09981 & 1.49995 & 0.200537 \\ 5.01464 & 3.57728 & 1.39349 & 0.26421 \\ 5.38496 & 3.92334 & 1.70669 & 0.334034 \\ 4.59936 & 3.401 & 1.40029 & 0.29718 \\ 5.003 & 3.39534 & 1.49867 & 0.213155 \\ 4.39334 & 2.91034 & 1.40296 & 0.170785 \\ 4.90619 & 3.09039 & 1.49724 & 0.127164 \\ 5.40587 & 3.69088 & 1.49739 & 0.225773 \\ 4.8137 & 3.37874 & 1.5939 & 0.26009 \\ 4.80183 & 2.99716 & 1.39919 & 0.108015 \\ 4.31786 & 2.97227 & 1.09205 & 0.178361 \\ 5.80291 & 3.99549 & 1.19871 & 0.212758 \\ 5.70191 & 4.39704 & 1.49915 & 0.408359 \\ 5.37717 & 3.93544 & 1.31016 & 0.299859 \end{bmatrix}$$

η οποία απέχει απόσταση $\sigma_4 = 0.218905$ από την A αν χρησιμοποιήσουμε την 2-norm

Μηδενίζοντας τις σ_3, σ_4 και υπολογίζοντας πάλι το γινόμενο $U\Sigma V^t$ προκύπτει ότι η βέλτιστη rank 2 προσέγγιση της A είναι η μήτρα

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5.07927 & 3.51279 & 1.43699 & 0.231072 \\ 4.81528 & 3.08107 & 1.50996 & 0.145878 \\ 4.67784 & 3.21774 & 1.33374 & 0.207691 \\ 4.65511 & 3.0585 & 1.41237 & 0.164499 \\ 5.0291 & 3.56641 & 1.37045 & 0.254731 \\ 5.49528 & 3.84046 & 1.531 & 0.261733 \\ 4.68341 & 3.33784 & 1.26642 & 0.242091 \\ 5.01945 & 3.38299 & 1.47247 & 0.202375 \\ 4.42415 & 2.88719 & 1.3539 & 0.150591 \\ 4.88049 & 3.1097 & 1.53817 & 0.144007 \\ 5.38378 & 3.70748 & 1.53257 & 0.240251 \\ 4.90944 & 3.3068 & 1.44142 & 0.197337 \\ 4.74646 & 3.03876 & 1.48736 & 0.144301 \\ 4.2674 & 3.01018 & 1.17241 & 0.21143 \\ 5.63682 & 4.12028 & 1.46322 & 0.321613 \\ 5.75862 & 4.35443 & 1.40883 & 0.371189 \\ 5.34688 & 3.9582 & 1.35841 & 0.319714 \end{bmatrix}$$

η οποία απέχει απόσταση $\sigma_3 = 0.588009$ από την A αν χρησιμοποιήσουμε την 2-norm.

Τέλος, μηδενίζοντας τις σ_2, σ_3 και σ_4 και υπολογίζοντας ξανά το γινόμενο $U\Sigma V^t$ προκύπτει ότι η βέλτιστη rank 1 προσέγγιση της A είναι η μήτρα

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5.07871 & 3.51403 & 1.43586 & 0.231524 \\ 4.72891 & 3.272 & 1.33697 & 0.215578 \\ 4.67132 & 3.23215 & 1.32068 & 0.212952 \\ 4.59914 & 3.18221 & 1.30028 & 0.209662 \\ 5.05897 & 3.50038 & 1.43028 & 0.230625 \\ 5.50844 & 3.81137 & 1.55736 & 0.251114 \\ 4.71694 & 3.26372 & 1.33358 & 0.215032 \\ 4.98842 & 3.45156 & 1.41034 & 0.227408 \\ 4.36422 & 3.01967 & 1.23386 & 0.198953 \\ 4.78844 & 3.31319 & 1.3538 & 0.218291 \\ 5.37771 & 3.72091 & 1.5204 & 0.245155 \\ 4.8784 & 3.37543 & 1.37923 & 0.222392 \\ 4.66192 & 3.22565 & 1.31803 & 0.212524 \\ 4.28722 & 2.96639 & 1.21209 & 0.195442 \\ 5.71265 & 3.95266 & 1.61509 & 0.260424 \\ 5.88609 & 4.07267 & 1.66413 & 0.26833 \\ 5.43598 & 3.76123 & 1.53687 & 0.247811 \end{bmatrix}$$

η οποία απέχει απόσταση $\sigma_2 = 0.823796$ από την A αν χρησιμοποιήσουμε την 2-norm. □

Παράδειγμα. *Οι εικόνες με γκρι παλέττα και διαστάσεις $m \times n$ μπορούν να θεωρηθούν ως $m \times n$ μήτρες στις οποίες κάθε στοιχείο αντιστοιχεί σε ένα pixel της εικόνας και τα στοιχεία λαμβάνουν τιμές από 0 εως 255 ανάλογα με την αντίστοιχη τιμή του γκρι που έχει το pixel.*

Μια εποπτική εφαρμογή του θεωρήματος Eckart - Young είναι η προσέγγιση της μήτρας μιας γκρι εικόνας με μεγάλο rank από μήτρες (και άρα αντίστοιχες εικόνες) με μικρότερο rank.

Να βρεθούν προσεγγίσεις μικροτέρου rank για την εικόνα (unipi_rank310.eps):

Λύση. Η εικόνα αυτή έχει διαστάσεις 361×310. Για τους υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε το **Octave**. (Το ερωτηματικό στο τέλος των εντολών που ακολουθούν έχει ως συνέπεια να εκτελεστεί η εντολή αλλά να μην εμφανισθεί το αποτέλεσμα της στην οθόνη).

Πρώτα φορτώνουμε την εικόνα με την εντολή

```
A = imread("unipi_rank310.eps");
```

Επειδή η εικόνα είναι ήδη γκρι δεν χρειάζεται να κάνουμε κάποια μετατροπή, αν ήταν έγχρωμη θα την μετατρέπαμε σε γκρι με την εντολή

```
Agray = rgb2gray(A);
```

Πρώτα θα μετατρέψουμε τα στοιχεία της σε double με την εντολή

```
Adouble = im2double(A);
```

Μπορούμε να δούμε το rank της Adouble με την εντολή

```
rank(Adouble)
ans = 310
```

Η απάντηση μας λέει ότι η μήτρα Adouble έχει rank 310.

Επίσης, μπορούμε να δούμε την εικόνα που αντιστοιχεί την μήτρα Adouble με την εντολή

```
imshow(Adouble);
```

Έπειτα θα υπολογίσουμε την διάσπαση ιδιαζουσών τιμών (SVD) της Adouble με την εντολή

```
[U, S, V] = svd(Adouble);
```

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την βέλτιστη rank k προσέγγιση της Adouble, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εντολές

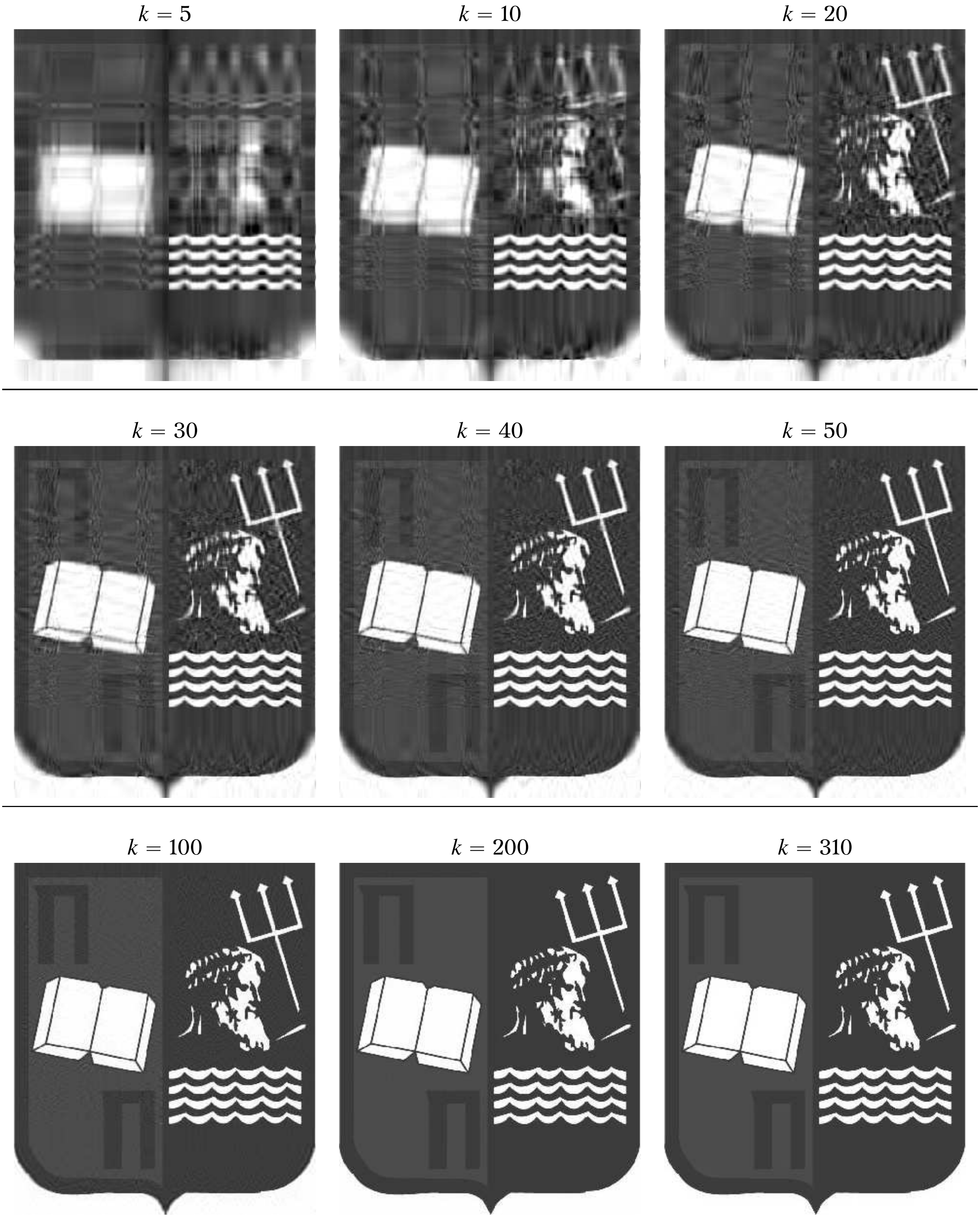
```
C=S; N=k; C(N+1:end,:)=0; C(:,N+1:end)=0; D=U*C*V'; imshow(D)
```

Η D είναι η βέλτιστη rank k προσέγγιση της Adouble.

Για να αποθηκεύσουμε την D σε αρχείο εικόνας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή

```
imwrite(D,"mypic.jpg");
```

Ακολουθούν ορισμένες rank k προσεγγίσεις της αρχικής εικόνας:



Παρατήρηση: Μπορούμε να βρούμε προσεγγίσεις μικροτέρου rank και για έγχρωμες εικόνες. Οι έγχρωμες εικόνες με παλέττα rgb αντιστοιχούν σε 3 διαφορετικές μήτρες (μια για κάθε ένα από τα χρώματα της παλέττας red, green και blue).

Για να βρεθούν προσεγγίσεις μικροτέρου rank για την εικόνα (unipic_rank310.eps)

όπως προηγουμένως φορτώνουμε την εικόνα σε μια μήτρα με την εντολή

```
A = imread("unipi_rank310.eps");
```

Και πάλι, πρώτα θα μετατρέψουμε τα στοιχεία της σε double με την εντολή

```
Adouble = im2double(A);
```

Στην συνέχεια, θα υπολογίσουμε ξεχωριστά την διάσπαση ιδιαζουσών τιμών (SVD) κάθε χρώματος της Adouble με τις εντολές

```
[U1, S1, V1] = svd(Adouble(:,:,1);
[U2, S2, V2] = svd(Adouble(:,:,2);
[U3, S3, V3] = svd(Adouble(:,:,3);
```

Για να υπολογίσουμε την βέλτιστη rank k προσέγγιση της Adouble, θα υπολογίσουμε την βέλτιστη rank k προσέγγιση κάθε χρώματος με τις εντολές

```
C=S1; N=k; C(N+1:end,:)=0; C(:,N+1:end)=0; D1=U1*C*V1';
C=S2; N=k; C(N+1:end,:)=0; C(:,N+1:end)=0; D2=U2*C*V2';
C=S3; N=k; C(N+1:end,:)=0; C(:,N+1:end)=0; D3=U3*C*V3';
```

Οι $D1$, $D2$, $D3$ είναι οι βέλτιστες rank k προσεγγίσεις κάθε χρώματος της Adouble.

Τέλος, θα ανασυνθέσουμε τις 3 προσεγγίσεις σε μια μήτρα ώστε να προκύψει και πάλι έγχρωμη εικόνα χρησιμοποιώντας τις εντολές:

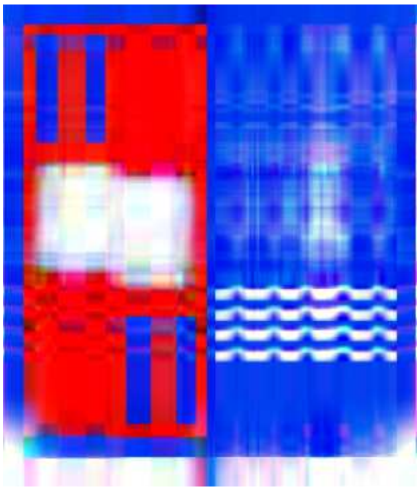
```
Anew = zeros(size(Adouble));
Anew(:,:,1) = D1;
Anew(:,:,2) = D2;
Anew(:,:,3) = D3;
```

Για να δούμε την εικόνα της προσέγγισης και πάλι χρησιμοποιούμε την εντολή:

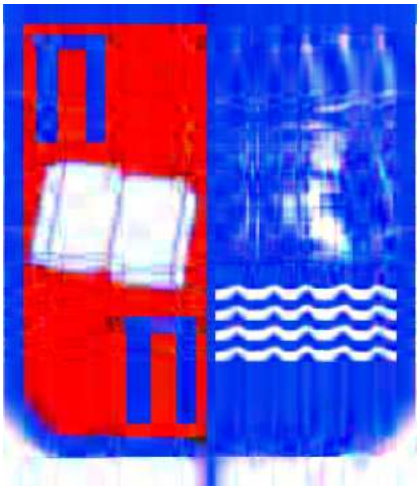
```
imshow(Anew);
```

Ακολουθούν ορισμένες rank k προσεγγίσεις της αρχικής εικόνας:

$k = 5$



$k = 10$



$k = 20$

$k = 30$

$k = 40$

$k = 50$

$k = 100$

$k = 200$

$k = 310$

□

Παρατήρηση: Μια καλή ιδιότητα της διάσπασης ιδιαζουσών τιμών είναι ότι οι ιδιάζουσες τιμές της A δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες σε μικρές αλλαγές των στοιχείων της A. Συγκεριμένα, οι ιδιάζουσες τιμές των A και $A + E$ διαφέρουν το πολύ κατά $\|E\|$ (όπου $\|E\|$ είναι η 2-norm).

10.14 Συμπληρωματικές λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 10.1. *Έστω η μήτρα*

$$A = \begin{bmatrix} -11/14 & 3/7 & 9/14 \\ 3/7 & -1/7 & 9/7 \\ 9/14 & 9/7 & 13/14 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν ορθογώνια P και διαγώνια D ώστε $P^{-1}AP = D$.

Λύση. Η A είναι συμμετρική, επομένως είναι ορθογωνίως διαγωνιοποιήσιμη.

1. Εύρεση των ιδιοτιμών:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -11/14-\lambda & 3/7 & 9/14 \\ 3/7 & -1/7-\lambda & 9/7 \\ 9/14 & 9/7 & 13/14-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0,$$

οπότε βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$ (διπλή) και $\lambda_2 = 2$ (απλή).

2. Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοχώρων:

$$\begin{bmatrix} -11/14-\lambda & 3/7 & 9/14 \\ 3/7 & -1/7-\lambda & 9/7 \\ 9/14 & 9/7 & 13/14-\lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + (4-\lambda)w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + (4-\lambda)w_3 = 0 \end{cases}$$

Για $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w_1 + w_2 + w_3 = 0 \Leftrightarrow w_1 = -w_2 - w_3.$$

Άρα

$$X = \begin{bmatrix} -w_2 - w_3 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_2 \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -w_3 \\ 0 \\ w_3 \end{bmatrix} = w_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, |w_2| + |w_3| \neq 0.$$

Η αντίστοιχη βάση είναι η

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = \{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

Για $\lambda = 8$:

$$\begin{cases} -4w_1 + 2w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + -4w_2 + 2w_3 = 0 \\ 2w_1 + 2w_2 + -4w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w_1 = w_2 = w_3.$$

Άρα $X = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 \in \mathbb{R}^*.$

Η αντίστοιχη βάση είναι η

$$\{\mathbf{x}_3\} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

Παρατήρηση: Αν ζητούσαμε να διαγωνιοποιήσουμε απλά (και όχι ορθογωνίως) την A, θα τελειώναμε εδώ, με

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

και

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Για την ορθογώνια διαγωνιοποίηση, συνεχίζουμε ορθοκανονικοποιώντας το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

σύμφωνα με την μέθοδο Gram-Schmidt

Έχουμε $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ και

$$\|\mathbf{y}_1\| = \|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2},$$

οπότε

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1$. Αλλά,

$$\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Άρα,

$$\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

με

$$\|\mathbf{y}_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Άρα,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2\|}\mathbf{y}_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1.$$

Αλλά,

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

και

$$\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\rangle = 0,$$

οπότε

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - 0 \cdot \mathbf{v}_2 - 0 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και συνεπώς $\|\mathbf{y}_3\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, δίνοντας τελικά

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_3\|}\mathbf{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Τελικά, η ζητούμενη **ορθογώνια** μήτρα P είναι η μήτρα με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Πράγματι, η P είναι ορθογώνια (άσκηση) και

$$P^{-1}AP = P^tAP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Άσκηση 10.2. *Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\rangle$. Να αποδειχθεί ότι*

1. $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$.
2. $\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$.
3. $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$.

Λύση. Ισχύει ότι

1. $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$.
2. $\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$.
3. $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$. $\square$

Άσκηση 10.3. *Έστω* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του εσωτερικού γινομένου*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

για όλες τις δυνατές μεταθέσεις των συντεταγμένων των $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Λύση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.

Έστω $x \leqslant x'$ και $y \leqslant y'$ τότε

$$xy + x'y' \geqslant xy' + x'y.$$

Πράγματι,

$$(xy + x'y') - (xy' + x'y) = x(y - y') + x'(y' - y) = (x - x')(y - y') \geqslant 0.$$

Έστω $(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(n)})$ μια μετάθεση των συντεταγμένων του y.

Αν $k < \lambda$ και $y_{\sigma(k)} \leqslant y_{\sigma(\lambda)}$ τότε από τα προηγούμενα

$$\left\langle \mathbf{x}, \left(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(k)}, \ldots, y_{\sigma(\lambda)}, \ldots, y_{\sigma(n)}\right)\right\rangle \geqslant \left\langle \mathbf{x}, \left(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \ldots, y_{\sigma(\lambda)}, \ldots, y_{\sigma(k)}, \ldots, y_{\sigma(n)}\right)\right\rangle$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή του $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ προκύπτει όταν οι συντεταγμένες του $\mathbf{x}$ είναι σε αύξουσα σειρά ενώ οι συντεταγμένες του $\mathbf{y}$ είναι σε φθίνουσα σειρά. □

Παρατήρηση: Η άσκηση αυτή έχει τεθεί ως πρόβλημα στον πρώτο γύρο του διαγωνισμού Google Code Jam 2008. Περισσότερα στοιχεία σχετικά με τον διαγωνισμό βλέπε στον σύνδεσμο: https://code.google.com/codejam/contest/32016/dashboard.

Άσκηση 10.4 (Γραμμικές απεικονίσεις). *Έστω* $(V, +, \cdot)$ *ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο* $\langle \rangle$.

i) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $f : V \to \mathbb{R}$ *με* $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$ *είναι γραμμική, όπου* $\mathbf{v} \in V$.

ii) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $g : V \to \mathbb{R}^n$ *με* $g(\mathbf{x}) = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle)$ *είναι γραμμική, όπου* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$.

Λύση.

i) Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ και $k, \lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned} f(k\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) &= \langle k\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle k\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + \langle \lambda\mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle \\ &= k \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle \\ &= kf(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι γραμμική απεικόνιση από το V στο $\mathbb{R}$.

ii) Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ και $k, \lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned} g(k\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) &= (\langle k\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle k\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \langle k\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{v}_k \rangle) \\ &= (k \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle + \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \rangle, k \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle + \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, k \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle + \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_k \rangle) \\ &= (k \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle, k \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, k \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle) + (\lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \rangle, \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_k \rangle) \\ &= k(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle) + \lambda(\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_k \rangle) \\ &= kg(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Άρα, η g είναι γραμμική απεικόνιση από το V στο $\mathbb{R}^n$. □

Άσκηση 10.5. *Να δειχθεί ότι κάθε norm επί του $\mathbb{R}^n$ είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Προφανώς,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

και

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Ισχύει ότι

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left\|(x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n\right\|$$

Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant |x_1 - y_1|\,\|\mathbf{e}_1\| + |x_2 - y_2|\,\|\mathbf{e}_2\| + \cdots + |x_n - y_n|\,\|\mathbf{e}_n\|$$

Επομένως, όταν $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \to 0$. □

10.15 Ασκήσεις προς επίλυση

1. (Εσωτερικά γινόμενα στον $\mathbb{R}^2$) Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω απεικονίσεις ορίζουν εσωτερικό γινόμενο στον $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

   i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$.

   ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$.

   iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

2. (Εσωτερικά γινόμενα στον $\mathbb{R}^2$) Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Να εξετασθεί ποιες από τις επόμενες απεικονίσεις ορίζουν ε-σωτερικά γινόμενα επί του $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

   i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2$.

   ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2$.

   iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$.

   iv) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2$.

3. (Εσωτερικά γινόμενα στον $\mathbb{R}^4$) Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Να εξετασθε-ί ποιες από τις επόμενες απεικονίσεις ο-ρίζουν εσωτερικά γινόμενα επί του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

   i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$.

   ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 4x_2y_3$.

   iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_3y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

4. (Εσωτερικά γινόμενα στον $\mathbb{R}^n$) Έστω c_1, c_2, $\ldots$, c_n θετικοί αριθμοί, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Να δειχθεί ότι η παρακάτω απεικόνιση ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = c_1v_1u_1 + c_2v_2u_2 + \cdots + c_nv_nu_n.$$

5. (Εσωτερικά γινόμενα στο P_n) Έστω P_n το σύνολο των πολυωνύμων του x με βαθμό το πολύ n, $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0$ και $q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x^1 + b_0$. Να δειχθεί ότι η παρακάτω απεικόνιση ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $(P_n, +, \cdot)$.

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

6. (Εσωτερικά γινόμενα στο P_n) Έστω P_n το σύνολο των πολυωνύμων του x με βαθμό το πολύ n. Να δειχθεί ότι η παρακάτω απεικόνιση ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $(P_n, +, \cdot)$.

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

7. (Εσωτερικά γινόμενα στον $C[a, b]$) Έστω p μια συνεχής και θετική συνάρτηση στο $[a, b]$ (δηλαδή $p(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$) και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$. Να δειχθεί ότι η παρακάτω απεικόνιση ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx.$$

8. (Εσωτερικά γινόμενα στον $\mathcal{M}_n$) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Να εξετασθεί ποιες από τις επόμε-νες απεικονίσεις ορίζουν εσωτερικά γινόμε-να επί του $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$

   i) $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB)$.

   ii) $\langle A, B \rangle = \det(AB)$.

9. (Εσωτερικά γινόμενα σε μιγαδικούς διανυ-σματικούς χώρους) Έστω $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_{\mathbb{C}})$ ένας **μιγαδικός** διανυσματικός χώρος. Η απεικόνιση $\langle\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ ονομάζεται ε-σωτερικό γινόμενο επί του $\mathcal{V}$ αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ και για κάθε $a \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι

   (i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$,

   (ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

   (iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$,

   (iv) $\langle a\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

   Να δειχθεί ότι για την $\langle\rangle$ ισχύουν οι παρα-κάτω ιδιότητες:

   (i) $\langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} \rangle = \overline{a} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

   (ii) $\langle a\mathbf{x}, a\mathbf{x} \rangle = |a|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$.

   (iii) $\langle \mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{z} \rangle = \overline{a} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{b} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$.

   (iv) $\langle a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2, b_1\mathbf{y}_1 + b_2\mathbf{y}_2 \rangle = a_1\overline{b_1} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \rangle + a_1\overline{b_2} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 \rangle + a_2\overline{b_1} \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle + a_2\overline{b_2} \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \rangle$.

(v) $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}\rangle =$
$|a|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + a\overline{b}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \overline{a}b\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + |b|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$.

(vi) $\langle \mathbf{x} - a\mathbf{y}, \mathbf{x} - a\mathbf{y}\rangle =$
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \overline{a}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - a\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + |a|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$.

(vii) $\left\langle \sum_{p\in[n]} a_p\mathbf{x}_p, \sum_{q\in[m]} b_q\mathbf{y}_q \right\rangle =$
$\sum_{(p,q)\in[n]\times[m]} a_p\overline{b_q}\langle \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_q\rangle$.

Επίσης, να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\langle\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, όπου

$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$,

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο επί του C^n.

10. (Ανισότητα Cauchy - Schwarz) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy - Schwarz να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι επόμενες παραστάσεις λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή.

(i) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (2x+3y-4)^2$
(Απ. $x = -1$, $y = 2$, $\min = 0$)

(ii) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (3x+4y-2)^2 + 1$
(Απ. $x = -\frac{35}{26}$, $y = \frac{40}{26}$, $\min = \frac{35}{26}$)

(iii) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (3x+4y-2)^2 - 2$
(Απ. $x = -\frac{35}{26}$, $y = \frac{40}{26}$, $\min = -\frac{43}{26}$)

(iv) $(2x+3)^2 + (3y-4)^2 + (5x-2y+5)^2$
(Απ. $x = -\frac{183}{277}$, $y = \frac{328}{277}$, $\min = \frac{961}{277}$)

(v) $(x+y+2)^2 + (x-2y+5)^2 + (2x+5y-8)^2$
(Απ. $x = -\frac{18}{11}$, $y = \frac{23}{11}$, $\min = \frac{81}{11}$)

11. (Ταυτότητες με νόρμες) Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (V, \langle\rangle)$ και $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$.

(i) Να δειχθεί ότι

$$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 .$$

(ii) **Παρατήρηση**: Από την προηγούμενη ταυτότητα αυτή προκύπτει ότι μπορούμε να καθορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο από την νόρμα του.

Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$ το οποίο αντιστοιχεί στην norm με $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2}$ για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
(Απ. $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle$
$= x_1y_1 + \frac{3x_2y_1}{2} + \frac{3x_1y_2}{2} + 5x_2y_2$.

(iii) (Συνημίτονο γωνίας) Να δειχθεί ότι το συνημίτονο θ της γωνίας που σχηματίζουν τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\cos\theta = \frac{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

(iv) (Ταυτότητα παραλληλογράμμου) Να δειχθεί ότι

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\,\|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{y}\|^2 .$$

Ποια είναι η ερμηνεία της ταυτότητας αυτής στον $\mathbb{R}^2$;

(v) Αν $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ να δειχθεί ότι

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle = 0.$$

Ποια είναι η ερμηνεία του αποτελέσματος αυτού στον $\mathbb{R}^2$;

12. (Μοναδιαίοι κύκλοι) Αν $\|\ \|$ είναι μια norm σε ένα διανυσματικό χώρο V, τότε ο μοναδιαιός κύκλος στον V ορίζεται ως το σύνολο των $\mathbf{v} \in V$ για τα οποία $\|\mathbf{v}\| = 1$.

Να σχεδιασθούν στον $\mathbb{R}^2$ οι μοναδιαίοι κύκλοι για κάθε μια από τις παρακάτω norms του $\mathbb{R}^2$.

i) $\|\ \|_1$,

ii) $\|\ \|_2$,

iii) $\|\ \|_3$,

iv) $\|\ \|_\infty$

όπου για κάθε $p \in \mathbb{N}^*$ η p-norm ορίζεται για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ από τον τύπο:

$$\|\mathbf{x}\| = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p} .$$

13. (Όχι νόρμα) Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\|\mathbf{x}\| = |x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2}$ **δεν** είναι norm στο $\mathbb{R}^2$.

14. (Απόσταση διανυσμάτων στον $C[-1,1]$) Έστω $C[-1,1]$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο $[-1,1]$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Να βρεθεί η απόσταση $d(f,g)$ των $f(x) = x+1$ και $g(x) = x^2 - 3x + 2$, όπου $f, g/[-1,1]$. (Απ. $\frac{72}{5}$.)

15. (Μοναδικότητα του $\mathbf{0}$ ως προς ορθογωνιότητα) Έστω $\mathbf{x} \in (V, \langle\rangle)$. Να δειχθεί ότι αν $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ για κάθε $\mathbf{y} \in V$, τότε $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

16. (Ορθοκανονικό σύνολο) Δίδεται το σύνολο $\mathbb{R}^4$, εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και το σύνολο $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ όπου

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{v}_2 = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

και

$$\mathbf{v}_3 = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, 0, \frac{1}{6}\right).$$

Να εξετασθεί αν το Σ είναι ορθοκανονικό. Αν δεν είναι, να βρεθεί (αν υπάρχει), αριθμός $k \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε το σύνολο $\Sigma' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, k\mathbf{v}_3\}$ να είναι ορθοκανονικό.

17. (*Ορθογώνια διανύσματα στον* $\mathbb{R}^3$) Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

   i) Να βρεθούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = (4, a, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (b, 4, 8)$ και $\mathbf{v}_3 = (8, 20, -c)$ να είναι ανά δύο ορθογώνια.

   (Απ. $a = -1$, $b = -7$, $c = 3$.)

   Στα επόμενα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ είναι τα διανύσματα που υπολογίσθηκαν στο πρώτο ερώτημα.

   ii) Να δειχθεί τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

   Έστω $\mathbf{v} = (1, -2, 4)$.

   iii) Να βρεθούν τα μήκη $\|\mathbf{v}_1\|$, $\|\mathbf{v}_2\|$, $\|\mathbf{v}_3\|$, $\|\mathbf{v}\|$ όπου $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$.

   (Απ. $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{33}$, $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{129}$, $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{473}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{21}$.)

   iv) Να υπολογισθούν τα εσωτερικά γινόμενα $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1\rangle$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2\rangle$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3\rangle$.

   (Απ. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1\rangle = 22$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2\rangle = 17$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3\rangle = -44$.)

   v) Να βρεθεί το συνημίτονο των γωνιών μεταξύ του $\mathbf{v}$ και των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ αντίστοιχα. Με ποιο από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ σχηματίζει την μικρότερη γωνία;

   (Απ. $\sqrt{\frac{1892}{2709}}$, $\sqrt{\frac{289}{2709}}$, $-\sqrt{\frac{528}{2709}}$, μικρότερη γωνία: με το $\mathbf{v}_1$)

   vi) Να βρεθούν οι αποστάσεις μεταξύ του $\mathbf{v}$ και των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ αντίστοιχα, όπου $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Με ποιο από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ απέχει την μικρότερη απόσταση;

   (Απ. $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = \sqrt{10}$, $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2) = \sqrt{116}$, $d(\mathbf{v}, \mathbf{v}_3) = \sqrt{582}$.)

   vii) Να εκφραστεί στο διάνυσμα $\mathbf{v} = (1, -2, 4)$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

   (Απ. $\mathbf{v} = \frac{22}{33}\mathbf{v}_1 + \frac{17}{129}\mathbf{v}_2 - \frac{44}{473}\mathbf{v}_3$.)

18. (*Ορθογώνια διανύσματα στον* $C[-\pi, \pi]$) Έστω $C[-\pi, \pi]$ ο χώρος των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Να δειχθεί ότι το (άπειρο) υποσύνολο

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \ldots, \sin(kx), \cos(kx), \ldots\}$$

του $C[-\pi, \pi]$ είναι ορθογώνιο.

19. (Ανισότητα Bessel) Έστω $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του $(V, \langle\rangle)$. Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k\rangle^2 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2.$$

Η ισότητα ισχύει ανν το $\mathbf{x}$ ανήκει στον χώρο που παράγουν τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

20. (Ιδιότητες ορθοκανονικών βάσεων) Έστω $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ορθοκανονική βάση του $(V, \langle\rangle)$. Να δειχθεί ότι για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ισχύει ότι

   i) $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k\rangle^2$.

   ii) (Ταυτότητα Parseval)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k\rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y}\rangle.$$

21. (Εύρεση ορθοκανονικής βάσης στον $\mathbb{R}^4$) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = (1,1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,1,1)$.

22. (Εύρεση ορθοκανονικής βάσης στον $\mathbb{R}^4$) Δίδονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$

$$U_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 3y - z + 2w = 0\}$$

$$U_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 5x + 4y - z + w = 0\}$$

$$U_3 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z + 2w = 0\}$$

Να βρεθούν ορθοκανονικές βάσεις των U_1, U_2, U_3 και στην συνέχεια να εκφραστεί το διάνυσμα $\mathbf{v} = (-31, 22, -10, 57)$ ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων κάθε μιας από τις παραπάνω βάσεις.

23. (Εύρεση ορθοκανονικής βάσης στον P) Έστω το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των πολυωνύμων του x με τύπο

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα πολυώνυμα

i) $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$.

ii) $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 2x - 1$, $p_3(x) = 12x^2$.

24. (Εύρεση ορθογωνίου συμπληρώματος στον $\mathbb{R}^3$) Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τα οποία είναι ορθογώνια στα διανύσματα $(1,2,1)$ και $(1,1,-1)$.

25. (Εύρεση ορθογωνίου συμπληρώματος στον $\mathbb{R}^4$) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = (1,1,0,2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,2,1,0)$ και $\mathbf{v}_3 = (1,0,0,-1)$.

26. (Ιδιότητες ορθογωνίου συμπληρώματος) Έστω U, V υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$. Να δειχθεί ότι:

i) $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}$.

ii) $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$.

iii) Αν $U \subseteq V$, τότε $V^{\perp} \subseteq U^{\perp}$.

27. (Προβολές στον $\mathbb{R}^4$) Έστω

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - 7y + z - 3w = 0 \\ 2x + y - z + w = 0 \end{cases} \}$$

i) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο W είναι υπόχωρος του $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

ii) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του W.

iii) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του $W^{\perp}$.

iv) Να βρεθούν οι προβολές $\mathbf{p}$ και $\mathbf{p}'$ του διανύσματος $\mathbf{v} = (1,2,3,4)$ στους W και $W^{\perp}$.

v) Να βρεθούν οι norm των $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ και $\mathbf{p}'$.

vi) Να βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζουν ανα δύο τα διανύσματα $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ και $\mathbf{p}'$.

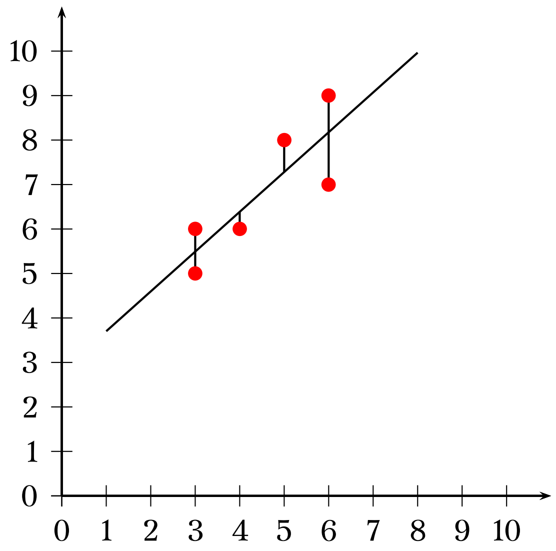
28. (Προβολές στον $\mathbb{R}^6$) Δίδονται τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (3,6,4,5,6,3)$ και $\mathbf{u}_3 = (5,9,6,8,7,6)$.

i) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του συνόλου των διανυσμάτων που παράγονται από τα διανύσματα $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_2$. (Απ. Μια τέτοια βάση αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1,1,1,1)$ και $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{38}}(-3,3,-1,1,3,-3)$.)

ii) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\mathbf{u}_3$ στο χώρο που παράγουν τα διανύσματα $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_2$.
(Απ. $\mathbf{v} = \frac{1}{57}(313, 466, 364, 415, 466, 313)$.)

iii) Να εκφραστεί το διάνυσμα της προβολής του $\mathbf{u}_3$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_2$.
(Απ. $\mathbf{v} = \frac{160}{57}\mathbf{u}_1 + \frac{17}{19}\mathbf{u}_2$.)

29. (Γραμμική παρεμβολή) Δίδονται τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες $A(3,5)$, $B(6,9)$, $C(4,6)$, $D(5,8)$, $E(6,7)$, $F(3,6)$.



Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $y = ax+b$ για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων αυτών είναι ελάχιστο. (Απ. $y = \frac{17}{19}x + \frac{160}{57}$.)

30. (Προβλήματα ελαχίστων τετράγωνων) Να βρεθούν οι λύσεις $\mathbf{x}$ του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων

$$||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$$

όπου

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1)$.

(Απ. $\mathbf{x} = \left(\dfrac{28}{69}, -\dfrac{15}{46}, \dfrac{13}{46}\right)$.)

ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 4)$.

(Απ. $\mathbf{x} = \left(\dfrac{5}{2} - 2y - 3z, y, z\right)$.)

31. (Ορθογώνια διαγωνιοποίηση) Να διαγωνιοποιηθούν ορθογωνίως οι μήτρες

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

32. (Διάσπαση ιδιαζουσών τιμών) Να βρεθεί η διάσπαση ιδιαζουσών τιμών των μητρών

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

33. (Βέλτιστη rank 2 προσέγγιση) Να βρεθεί η βέλτιστη rank 2 προσέγγιση A_2 της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\left(A_2 \approx \begin{bmatrix} 0.96541 & 1.85351 & 2.97171 & 3.12449 \\ -0.99269 & 3.03095 & 3.00598 & 3.97369 \\ 2.02012 & 2.08522 & 4.01646 & 3.92758 \end{bmatrix}\right)$$

34. Έστω $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και $c \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων x του επιπέδου για τα οποία

$$\langle a, x \rangle = c$$

αποτελείται από τα σημεία μιας ευθείας, (όπου $\langle\rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο).

ii) Να γραφεί στην παραπάνω μορφή η ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 2$.

35. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των επόμενων σημειών και των αντίστοιχων ευθειών του επιπέδου.

i) $(0, 0)$ και $x_1 + x_2 = 1$.

ii) $(1, 1)$ και $\langle a, x \rangle = 0$, όπου $a = (3, -2)$.

iii) (x_1, x_2) και $\langle a, x \rangle = 3$, όπου $a = (2, \frac{1}{2})$ και (x_1, x_2) το σημείο τομής των ευθειών με παραμετρικές εξισώσεις $x = (2, 3) + t(1, -1)$ και $x = (1, 4) + t(2, 2)$.

36. i) Να βρεθεί το σημείο της ευθείας με παραμετρική εξίσωση $x = (2,3)+t(1,1)$ το οποίο είναι πλησιέστερο στο σημείο $(0,0)$.

ii) Να βρεθεί το σημείο της ευθείας $\langle a, x\rangle = 3$, όπου $a = (1, \frac{1}{2})$ το οποίο είναι πλησιέστερο στο σημείο $(3,-2)$.

Βιβλιογραφία

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Μ. Μαλιάκας, Σ. Παπασταυρίδης, Ε. Ράπτης, Ο. Ταλέλλη, *Εισαγωγή στην γραμμική άλγεβρα*, τόμοι Ι, ΙΙ, Αθήνα.

[2] Δ. Βάρσος, *Στοιχεία αλγεβρικής θεωρίας κωδίκων*, 2005.

[3] Π. Γεωργιάδης, Μ. Γεωργιακόδης, *Γραμμική άλγεβρα*, 2η έκδοση, Σταμούλης.

[4] Μ. Γεωργιακόδης, Φ. Γεωργιακώδης, *Ειδικά θέματα γραμμικής άλγεβρας με εφαρμογές στη στατιστική*, Βαρβαρήγου.

[5] P. R. Halmos, *Προβλήματα γραμμικής άλγεβρας*, Ευρύαλος, 2012.

[6] Δ. Καραγιαννάκης, *Εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα*, Ζήτης, 2012.

[7] Δ. Κοντογιάννης, *Άλγεβρα Ι*, Περίγραμμα, 1993.

[8] A. Laub, *Ανάλυση μητρώων για μηχανικούς*, Κλειδάριθμος, 2009.

[9] A. Morris, *Μια εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα*, Γ. Α. Πνευματικός, 1980.

[10] G. Strang, *Γραμμική άλγεβρα και εφαρμογές*, 3η έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993.

[11] Ι. Χατζάρας, Θ. Γραμμένος, *Εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα*, Τζιόλα, 2013.

[12] H. Anton, C. Rorres, *Elementary linear algebra with supplemental applications*, 11th edition, Wiley, 2014.

[13] L. Beilina, E. Karchevskii, M. Karchevskii, *Numerical linear algebra: theory and applications*, Springer, 2017.

[14] T. S. Blyth, E. F. Robertson, *Further linear algebra*, Springer, 2002.

[15] B. Demidovich, I. Maron, *Computational mathematics*, Mir Publishers, 1981.

[16] L. Eldén, *Matrix methods in data mining and pattern recognition*, SIAM, 2007.

[17] J. Gallian, *Contemporary abstract algebra*, 8th edition, Brooks/Cole, 2012.

[18] J. Golan, *The linear algebra a beginning graduate student ought to know*, 2nd edition, Springer, 2007.

[19] N. J. Higham (ed.), *The Princeton companion to applied mathematics*, Princeton University Press, 2015.

[20] S. Junka, *Extremal combinatorics*, Springer-Verlag, 2001.

[21] J. Kirtland, *Identification numbers and check digit schemes*, Mathematical Association of America, 2001.

[22] P. Klein, *Coding the matrix*, 1st edition, Newtonian Press, 2013.

[23] A. Knapp, *Basic algebra*, Birkhäuser, 2006.

[24] C. D. Manning, P. Raghavan, H. Schütze, *An introduction to information retrieval*, Cambridge University Press, 2009.

[25] M. Marcus, H. Minc, *An introduction to linear algebra*, Dover, 1988.

[26] A. Marwaha, *An introduction to linear algebra*, Phi Learning Private Limited, Delhi, 2014.

[27] J. Matousek, *Thirty-three miniatures*, AMS, 2010.

[28] Z. Melzak, *Companion to concrete mathematics*, Dover, 2007.

[29] P. J. Olver, C. Shakiban, *Applied linear algebra*, 2nd edition, Springer, 2018.

[30] A. Pettofrezzo, *Matrices and transformations*, Dover, 1978.

[31] G. Schay, *Introduction to linear algebra*, Narosa Publishing House, 1998.

[32] T. S. Shores, *Applied linear algebra and matrix analysis*, 2nd edition, Springer, 2018.

[33] F. Zhang, *Linear algebra: Challenging problems for students*, 2nd edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore USA, 2009.