ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1η σειρά ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Προθεσμία παράδοσης: Μέχρι και την Δευτέρα 13 Μαΐου 2024

Να λυθούν **15 ασκήσεις** από τις ενότητες **Μήτρες** και **Ορίζουσες** και **τις 4 ασκήσεις** από την ενότητα **Γραμμικά Συστήματα**.

Σημειώστε τις ασκήσεις για τις οποίες έχετε παραδώσει λύση:

Μήτρες:

1.1 1.7 1.13 1.19	1.2 1.8 1.14 1.20	1.3 1.9 1.15	1.4 1.10 1.16	1.5 1.11 1.17	1.6 1.12 1.18

Ορίζουσες:

1.21 1.27 1.33	1.22 1.28 1.34	1.23 1.29 1.35	1.24 1.30 1.36	1.25 1.31 1.37	1.26 1.32 1.38

Γραμμικά Συστήματα:

1.39	1.40	1.41	1.42	

Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στις ασκήσεις που θα παραδώσετε. Συμπληρώστε το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ και σημειώστε με Χ τις ασκήσεις που λύσατε.
Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγραφά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε. Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 10MB, στο email **jtas@unipi.gr**.
Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι algebra_askhseis1_pXXXXX.pdf, όπου Χ ο αριθμός μητρώου σας.
Η σειρά ασκήσεων είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

1.1) (*Μετατροπή σε ανηγμένη κλιματωτή μορφή*) Να μετατραπούν σε R-ισοδύναμη ανηγμένη κλιμακωτή η μήτρα: (Παρουσιάστε αναλυτικά όλα τα βήματα της μετατροπής)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}. \text{ (Απ. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix})$$

1.2) (*Μετατροπή σε ανηγμένη κλιματωτή μορφή*) Να μετατραπούν σε R-ισοδύναμη ανηγμένη κλιμακωτή η μήτρα: (Παρουσιάστε αναλυτικά όλα τα βήματα της μετατροπής)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}. \text{ (Απ. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 62 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix})$$

1.3) (*Μετατροπή σε ανηγμένη κλιματωτή μορφή*) Να μετατραπούν σε R-ισοδύναμη ανηγμένη κλιμακωτή η μήτρα: (Παρουσιάστε αναλυτικά όλα τα βήματα της μετατροπής)

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}. \text{ (Απ. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 46/9 \\ 0 & 1 & 0 & -20/9 \\ 0 & 0 & 1 & -86/9 \end{bmatrix})$$

1.4) (*Μετατροπή σε ανηγμένη κλιματωτή μορφή*) Να μετατραπούν σε R-ισοδύναμη ανηγμένη κλιμακωτή η μήτρα: (Παρουσιάστε αναλυτικά όλα τα βήματα της μετατροπής)

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & a & -6 & 0 \\ -6 & 8 & 2 & b \\ -3 & a-8 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \text{ (Απ. } \begin{bmatrix} 1 & -4/3 & 0 & -b/9 \\ 0 & 0 & 1 & b/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (a = 12), \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -b/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (a \neq 12).)$$

1.5) (*Εύρεση αντίστροφης μήτρας*) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Gauss να βρεθεί, (αν υπάρχει), η αντίστροφη της μήτρας:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & 10 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.6) (*Εύρεση αντίστροφης μήτρας*) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Gauss να βρεθεί, (αν υπάρχει), η αντίστροφη της μήτρας:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

1.7) (*Υπολογισμός δύναμης μήτρας*) Να βρεθεί η μήτρα C^n όπου

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η εικασία σας να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

1.8) (*Υπολογισμός δύναμης μήτρας*) Να βρεθεί η μήτρα C^n όπου

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η εικασία σας να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

1.9) (*Υπολογισμός δύναμης μήτρας*) Να βρεθεί η μήτρα C^n όπου

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}.$$

Η εικασία σας να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

1.10) (*Υπολογισμός δύναμης μήτρας*) Να βρεθεί η μήτρα C^n όπου

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η εικασία σας να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

1.11) (*Αποδοτικός υπολογισμός γινομένου μητρών*) Έστω A, B, C, D, E είναι μήτρες με διαστάσεις 7×3, 3×5, 5×4, 4×6, 6×3 αντίστοιχα. Να υπολογισθεί ο αριθμός των πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για να υπολογίσουμε το γινόμενο $ABCDE$, αν η σειρά των πράξεων γίνει όπως ορίζουν οι παρακάτω παρενθέσεις:

i) $((AB)(CD))E$

ii) $(A((BC)D))E$

iii) $A(((BC)D)E)$

iv) $(AB)(C(DE))$

1.12) (*Αντιστροφή μητρών*) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα AB είναι αντιστρέψιμη, τότε και οι μήτρες A, B είναι επίσης αντιστρέψιμες.

1.13) (*Αντιστροφή μητρών*) Έστω $A \in \mathcal{M}_n$ και $A \neq I_n$. Να δειχθεί ότι αν A είναι αδύναμη, τότε η A δεν αντιστρέφεται.

1.14) (*Συμμετρικές μήτρες*) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν η μήτρα A είναι συμμετρική τότε και η μήτρα B^tAB είναι συμμετρική.

1.15) (*Ορθογώνιες μήτρες*) Να εξετασθεί αν η μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνια.

1.16) (Ορθογώνιες μήτρες) Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}_n$. Να δειχθεί ότι αν $AB = BA$ και C είναι ορθογώνια, τότε οι μήτρες C^tAC και C^tBC αντιμετατίθεται.

1.17) (*Rank μήτρας*) Να βρεθεί το rank της μήτρας $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, (Απάντηση: 2.)

1.18) (*Rank μήτρας*) Να βρεθεί το rank της μήτρας $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, (Απάντηση: 4.)

1.19) (*Rank μήτρας*) Να βρεθεί το rank της μήτρας $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (Απάντηση: 3.)

1.20) (*Rank μήτρας*) Να βρεθεί το rank της μήτρας $M_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. (Απάντηση: 2.)

1.21) (*Ιδιότητες οριζουσών*) Έστω $\det(A) = 4$ και $\det(B) = 5$, όπου $A, B \in \mathcal{M}_5$. Να βρεθούν οι τιμές της ορίζουσας των παρακάτω μητρών:

i) $3A^2B$.

ii) $\det(2A)B^{-1}$.

iii) $2(A^{-1}B)^t$.

iv) $(6A)^{-1}$.

v) της μήτρας που προκύπτει, από την A, αν αλλάξουμε το πρόσημο κάθε στοιχείου της;

1.22) (*Υπολογισμός ορίζουσας*) Να υπολογισθεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 200 & 500 & 2 \\ 0 & -2 & 623 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$ (Απάντηση: 14.)

1.23) (*Υπολογισμός ορίζουσας*) Να υπολογισθεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 67 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 56 & 10 \end{vmatrix}.$$ (Απάντηση: 268.)

1.24) (*Υπολογισμός ορίζουσας*) Να υπολογισθεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 500 & 20 & 40 & 1 \\ 7 & -12 & 5 & 1 \\ 50 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$ (Απάντηση: 0.)

1.25) (*Υπολογισμός ορίζουσας*) Να υπολογισθεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -3 \\ 8 & 2 & 8 & 4 \\ 32 & 3 & 5 & -9 \end{vmatrix}.$$ (Απάντηση: -24.)

1.26) (*Ταυτότητες με ορίζουσες*) Να δειχθεί η ισότητα: $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(a-b)(b-c)(a-c)$.

1.27) (*Ταυτότητες με ορίζουσες*) Να δειχθεί η ισότητα: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

1.28) (*Ταυτότητες με ορίζουσες*) Να δειχθεί η ισότητα: $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$.

1.29) (*Ταυτότητες με ορίζουσες*) Να δειχθεί η ισότητα: $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$

$= 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

1.30) (*Ταυτότητες με ορίζουσες*) Να δειχθεί η ισότητα: $\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$.

1.31) (*Ταυτότητες με ορίζουσες*) Να δειχθεί η ισότητα: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 & 1 \\ r & r & r & 1 \end{vmatrix} = (1-r)^3$.

1.32) (*Ορθογώνιες μήτρες*) Να δειχθεί ότι αν η A είναι ορθογώνια μήτρα $n \times n$, τότε $\det(A) = \pm 1$.

1.33) (*Ορθογώνιες μήτρες*) Να δειχθεί ότι αν A είναι μια ορθογώνια $n \times n$ μήτρα με στοιχεία ακέραιους αριθμούς, τότε και η μήτρα A^{-1} έχει στοιχεία ακέραιους αριθμούς.

1.34) (*Συμπληρωματική μήτρα*) Να βρεθεί η συμπληρωματική μήτρα της τετραγωνικής μητρας A όπου $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1.35) (*Συμπληρωματική μήτρα*) Να βρεθεί η συμπληρωματική μήτρα της τετραγωνικής μητρας A όπου $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. (Απάντηση: $\begin{bmatrix} 23 & -52 & 53 \\ 38 & 8 & -22 \\ -37 & 68 & -7 \end{bmatrix}$.)

1.36) (*Συμπληρωματική μήτρα*) Να βρεθεί η συμπληρωματική μήτρα της τετραγωνικής μητρας A όπου $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & y & 2 \\ 1 & 2 & z \end{bmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. (Απάντηση: $\begin{bmatrix} -4+yz & 4-z & 2-2y \\ 2-z & -2+xz & 2-2x \\ 2-y & 1-2x & -1+xy \end{bmatrix}$.)

1.37) (*Ιδιότητες συμπληρωματικής μήτρας*) Να δειχθεί ότι αν $A \in \mathcal{M}_n$ είναι αντιστρέψιμη μήτρα, τότε $\det(adjA) = \det(A)^{n-1}$.

1.38) (*Ιδιότητες συμπληρωματικής μήτρας*) Να δειχθεί ότι αν $A, B \in \mathcal{M}_n$ είναι αντιστρέψιμες μήτρες, τότε adjAB = adjB · adjA.

1.39) (*Γραμμικά συστήματα*) Να λυθεί και να διερευνηθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a $\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ x + (2a-1)y + 3z = 1 \\ x + ay + (a-3)z = 2a - 1. \end{cases}$

1.40) (*Γραμμικά συστήματα*) Να λυθεί και να διερευνηθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 - a \\ x + y + az = 3a + 1. \end{cases}$

1.41) (*Γραμμικά συστήματα*) Να λυθεί και να διερευνηθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a $\begin{cases} a^2x + y + z = 1 \\ x + a^2y + z = 1 \\ x + y + a^2z = 1. \end{cases}$

1.42) (*Γραμμικά συστήματα*) Να λυθεί και να διερευνηθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων a, b: $\begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + (a+2)y + bz = 0, \\ x + 2ay + bz = 0 \end{cases}$