

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2η σειρά ασκήσεων

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Προθεσμία παράδοσης: Μέχρι και την Δευτέρα 17 Ιουνίου 2024

Να λυθούν **6 ασκήσεις** από την ενότητα **Χαρακτηριστικά μεγέθη**.

Σημειώστε τις ασκήσεις για τις οποίες έχετε παραδώσει λύση:

Χαρακτηριστικά μεγέθη:

2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στις ασκήσεις που θα παραδώσετε. Συμπληρώστε το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ και σημειώστε με X τις ασκήσεις που λύσατε.

Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγρατά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε. Οι ασκήσεις μπορούν να παραδοθούν ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 10MB, στο email jtas@unipi.gr.

Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι **algebra_askhseis2_pXXXXX.pdf**, όπου **pXXXXX ο αριθμός μητρώου σας**.

Η σειρά ασκήσεων είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

2.1) (Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω μητρών

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2) (Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω μητρών

$$A_4 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

2.3) (Διαγωνιοποίηση 3×3 μήτρας) Δίδεται η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

i) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A . (Απ. $9\lambda^2 - \lambda^3$.)

ii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της A . (Απ. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 9$.)

iii) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα της A . (Απ. Για το 0: $\mathbf{v}_1 = (-2, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)$. Για το 9: $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 2)$.)

iv) Να διαγωνιοποιηθεί η A . (Απ. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$)

v) Να υπολογισθεί η μήτρα A^n . (Απ. $A^n = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$)

vi) Να εκφραστεί το διάνυσμα $\mathbf{v} = (1, 3, -4)$ ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων της A . (Απ. $\mathbf{v} = -\frac{10}{9}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{9}\mathbf{v}_2 - \frac{13}{9}\mathbf{v}_3$.)

vii) Να υπολογισθεί το διάνυσμα $\mathbf{u}_n = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. (Απ. $\mathbf{u}_n = 9^n \left(-\frac{13}{9}\mathbf{v}_3\right) = -13 \cdot 9^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$)

2.4) (Θεώρημα Cayley - Hamilton) Δίδεται η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

i) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A . (Απ. $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda - 6$.)

ii) Να δειχθεί ότι $A^4 = 27A^2 + 4A - 30I_3$.

iii) Να δειχθεί ότι $A^{-1} = \frac{1}{6}(2I_3 + 5A - A^2)$.

iv) Να δειχθεί ότι $A^{102} - 5A^{101} - 2A^{100} + 6A^{99} - A^3 + 5A^2 + 2A - 5I_3 = I_3$

2.5) (Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) Να βρεθεί η 2×2 μήτρα A με ιδιοτιμές 1 και 4 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Υπόδειξη: Η A είναι διαγωνιοποιήσιμη.)

2.6) (Φασματικό θεώρημα) Έστω ότι η 3×3 μήτρα A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της μήτρας $B = A^3 + 2A^2 - 5A - 6I$. Είναι η μήτρα B αντιστρέψιμη; (Απ. 0, -6, -8)