ΔΙΑΛΕΞΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10:
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Περιεχόμενα διάλεξης:

- Ορισμός μετασχηματισμού Laplace
- Βασικές έννοιες
- Βασικοί μετασχηματισμοί Laplace
- Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Σε πολλά προβλήματα εφαρμογών, εμφανίζονται διαφορικές (ή άλλου είδους) εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τον τρόπο μεταβολής ορισμένων ποσοτήτων ως προς το χρόνο.

Ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση αυτών των προβλημάτων είναι ο μετασχηματισμός Laplace, με τη βοήθεια του οποίου, η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται σε μια απλή αλγεβρική εξίσωση. Στη συνέχεια, η λύση αυτής της εξίσωσης μπορεί να μετασχηματισθεί εκ νέου στη λύση της αρχικής εξίσωσης.

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάται ο μετασχηματισμός Laplace τόσο από τη θεωρητική πλευρά, όσο και από την πλευρά των εφαρμογών του.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Έστω $f / [0,+\infty)$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση (δηλ. ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,b], 0 \leq a < b$). Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

συγκλίνει, τότε αυτό ορίζει μια συνάρτηση $F(s)$ η οποία ονομάζεται **μετασχηματισμός Laplace** της συνάρτησης f και σημειώνεται με $\mathcal{L}[f(t)]$, δηλαδή

$$\mathcal{L}[\mathbf{f}(\mathbf{t})] = \mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\mathbf{st}} \mathbf{f}(\mathbf{t}) \mathbf{dt}.$$

Παραδείγματα

1. Για τη συνάρτηση $f(t) = c / [0,+\infty)$, με $c \in \mathbb{R}$, είναι

$$\mathcal{L}[\mathbf{c}] = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{s}}, \qquad \text{με } s > 0.$$

Πραγματικά, είναι

$$\mathcal{L}[c] = \int_0^{+\infty} e^{-st} c dt = c\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{c}{s}.$$

2. Για τη συνάρτηση $f(t)=e^{\alpha t}/[0,+\infty)$, με $\alpha\in\mathbb{R}$, είναι

$$\mathcal{L}\left[\mathbf{e}^{\alpha t}\right]=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}-\boldsymbol{\alpha}},\qquad \text{με } s>\alpha.$$

Πραγματικά, είναι

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right]=\int_0^{+\infty}e^{-st}e^{\alpha t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-\alpha)t}dt=\frac{1}{s-\alpha}.$$

3. Για τη συνάρτηση $f(t)=t^n/[0,+\infty)$, με $n\in\mathbb{N}^*$, είναι

$$\mathcal{L}\left[\mathbf{t}^{\mathbf{n}}\right]=\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{s}^{\mathbf{n+1}}},\ \text{με } s>0.$$

Πραγματικά, είναι

$$I_n=\mathcal{L}\left[t^n\right]=\int_0^{+\infty}e^{-st}t^n dt=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\left(e^{-st}\right)' t^n dt$$

$$=-\frac{1}{s}\left[t^n e^{-st}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}e^{-st}nt^{n-1}dt$$

$$=-\frac{1}{s}\lim_{x\to+\infty}\left(x^n e^{-sx}-0\right)+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}e^{-st}nt^{n-1}dt=\frac{n}{s}\int_0^{+\infty}e^{-st}t^{n-1}dt=\frac{n}{s}I_{n-1}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$$I_n=\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n}{s}\frac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}I_0=\frac{n!}{s^n}\frac{1}{s}=\frac{n!}{s^{n+1}},$$

αφού $I_0=\mathcal{L}\left[t^0\right]=\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$.

Γενικότερα, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση γάμμα, αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}\left[\mathbf{t}^{\boldsymbol{\alpha}}\right]=\frac{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1})}{\mathbf{s}^{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}}}, \textbf{ για } \mathbf{s}>\mathbf{0} \textbf{ και } \boldsymbol{\alpha}>-\mathbf{1}.$$

Πραγματικά, αν τεθεί $u=st$ στο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t)=t^{\alpha}$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[t^{\alpha}\right]=\int_{0}^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} \frac{du}{s}=\frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_{0}^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha} du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

4. Για τις συναρτήσεις

$$f(t)=\cos \alpha t /[0,+\infty) \quad \text{και} \quad f(t)=\sin \alpha t /[0,+\infty),$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, είναι

$$\mathcal{L}[\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{t}]=\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^{2}+\boldsymbol{\alpha}^{2}} \text{ και } \mathcal{L}[\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{t}]=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{s}^{2}+\boldsymbol{\alpha}^{2}}, \text{ με } s>0.$$

Πραγματικά, είναι

$$\mathcal{L}[\cos \alpha t]=\int_{0}^{+\infty} e^{-st} \cos \alpha t\, dt \stackrel{*}{=} \frac{s}{s^{2}+\alpha^{2}}.$$

Ανάλογα, προκύπτει και ο τύπος του μετασχηματισμού Laplace του ημιτόνου.

* Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Υπάρχουν συναρτήσεις, των οποίων ο μετασχηματισμός Laplace δεν ορίζεται για κανένα $s \in \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, αν $f(t) = e^{t^2} / [0, +\infty)$ τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{t^2} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 - st} dt$ αποκλίνει, διότι

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{t^2 - st}}{e^t} = \lim_{t \to +\infty} e^{t^2 - (s+1)t} = +\infty$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^t dt$ αποκλίνει.

Στη συνέχεια, θα ορισθεί ένα σύνολο συναρτήσεων $f / [0, +\infty)$ για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ συγκλίνει και επομένως, ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace αυτών.

Κατα τμήματα συνεχείς συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $f / [0, +\infty)$ ονομάζεται **κατά τμήματα συνεχής** αν για κάθε $\beta > 0$ το σύνολο A των σημείων ασυνέχειας της $f / [0, \beta]$ είναι πεπερασμένο, με σημεία ασυνέχειας μόνο πρώτου είδους, δηλαδή πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to \xi^+} f(x)$ και $\lim_{x \to \xi^-} f(x)$ (στο $\mathbb{R}$) για κάθε $\xi \in A$.

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ με

$$f(t)=\begin{cases} t+1, & \text{αν } t\in[0,3) \\ 2, & \text{αν } t\in[3,5) \\ 1, & \text{αν } t=5 \\ (t-5)^2-1, & \text{αν } t>5 \end{cases}$$

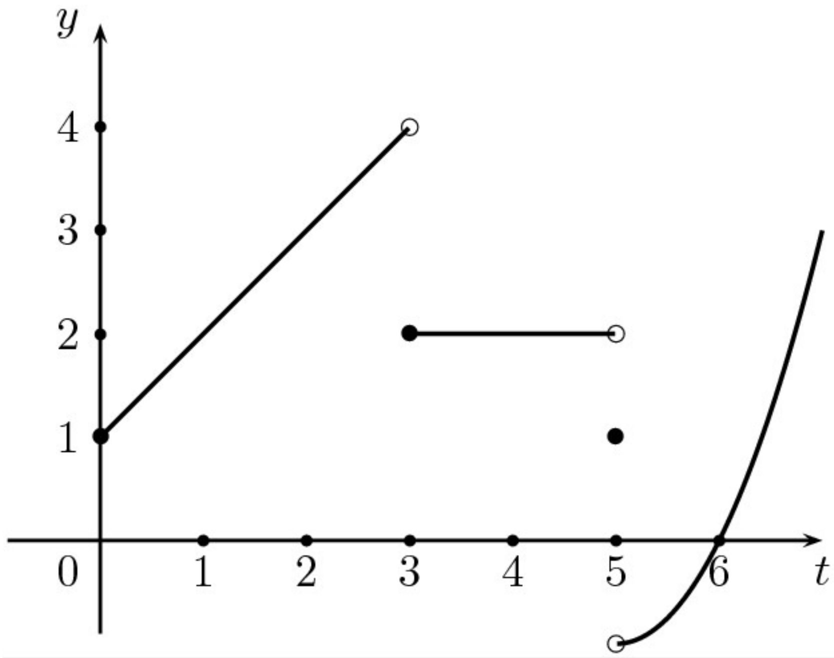
είναι κατά τμήματα συνεχής, αφού είναι ασυνεχής μόνο στα σημεία 3,5 και υπάρχουν τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{t\to 3^-} f(t)=4, \qquad \lim_{t\to 3^+} f(t)=2$$

και

$$\lim_{t\to 5^-} f(t)=2, \qquad \lim_{t\to 5^+} f(t)=-1,$$

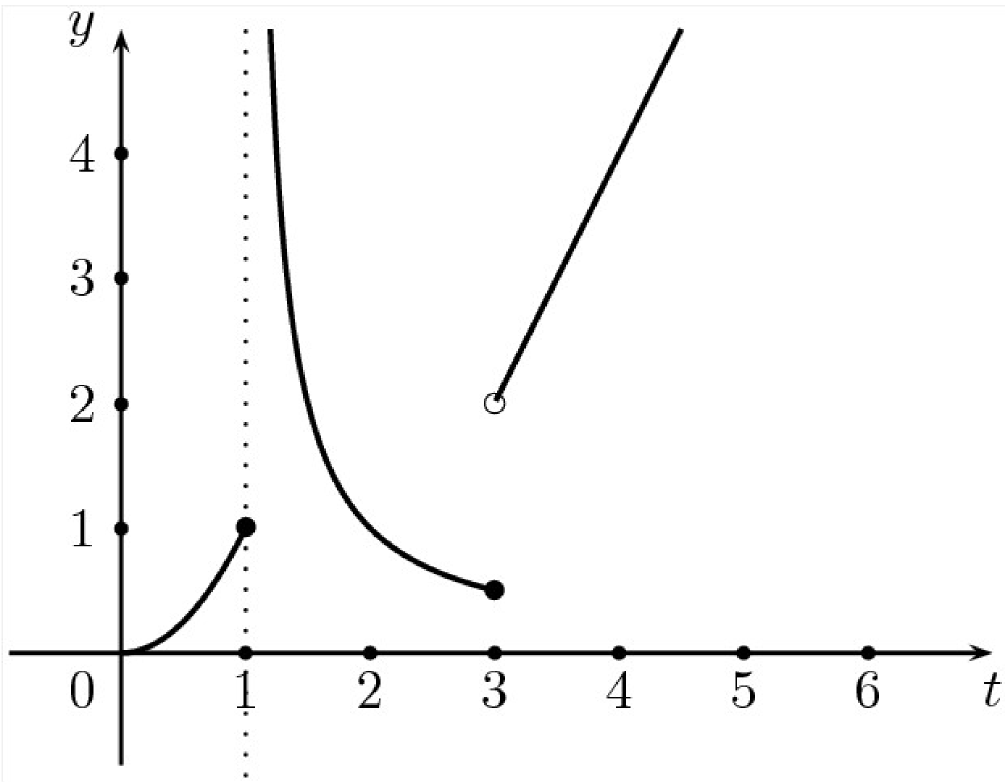
όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.



2. Η συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ με

$$f(t)=\begin{cases} t^2, & \text{αν } t\in[0,1] \\ \dfrac{1}{t-1}, & \text{αν } t\in(1,3] \\ 2t-4, & \text{αν } t\in(3,+\infty) \end{cases}$$

δεν είναι κατά τμήματα συνεχής, διότι παρουσιάζει ασυνέχεια δευτέρου είδους στο σημείο 1, αφού $\lim\limits_{t\to1^+} f(t)=+\infty$, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.



Προφανώς, κάθε συνεχής συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ είναι κατά τμήματα συνεχής.

Από την άλλη, αποδεικνύεται ότι κάθε κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

Επιπλέον, είναι δυνατόν μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση να μην ορίζεται σε πεπερασμένο πλήθος σημείων ενός διαστήματος $[0,\beta]$, όπου $\beta > 0$, αρκεί να υπάρχουν τα πλευρικά όρια της στα σημεία αυτά.

Έτσι, αν η συνάρτηση f δεν ορίζεται στα σημεία

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,\beta] \text{ με } t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

τότε, δίδοντας αυθαίρετες τιμές στα σημεία $t_1, t_2, \ldots, t_n$, αυτή επεκτείνεται σε μια κατά τμήματα συνεχή συνάρτηση $g/[0,\beta]$, η οποία, θα είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,\beta]$. Τότε ορίζεται

$$\int_0^\beta f(t)\,dt = \int_0^\beta g(t)\,dt = \int_0^{t_1} f(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt + \cdots + \int_{t_n}^{\beta} f(t)\,dt.$$

Η παραπάνω ισότητα καθορίζει το ολοκλήρωμα της f μονοσήμαντα, αφού είναι γνωστό ότι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που διαφέρουν σε πεπερασμένο πλήθος σημείων έχουν ίσα ορισμένα ολοκληρώματα.

Συναρτήσεις εκθετικής τάξης

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνάρτηση εκθετικής τάξης α**, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, όταν υπάρχουν $M, t_0 > 0$ με

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\alpha t},$$

για κάθε $t \in D(f) \cap (t_0, +\infty)$.

Παραδείγματα

1. Η $f(t) = e^{\beta t} / [0, +\infty)$ είναι εκθετικής τάξης α, για κάθε $\alpha \geq \beta$, αφού $|f(t)| \leq e^{\alpha t}$ για κάθε $t \in (1, +\infty)$.

2. Κάθε φραγμένη συνάρτηση είναι εκθετικής τάξης, για κάθε $\alpha \geq 0$. (Να δειχθεί ως άσκηση.)

3. Η $f(t)=t^n / \mathbb{R}$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, είναι εκθετικής τάξης α για κάθε α>0.

Πραγματικά, εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου

$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{e^{\alpha t}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^n}{e^{\alpha t}} = 0$ (να δειχθεί ως άσκηση)

για $\varepsilon = 1$, θα υπάρχει $t_0 > 0$ με $\dfrac{f(t)}{e^{\alpha t}} < 1$, για κάθε

$t > t_0$.

4. Η συνάρτηση $f(t)=e^{t^2} / \mathbb{R}$, δεν είναι εκθετικής τάξης α, για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$.

Πραγματικά, αν υπήρχε $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση f να ήταν εκθετικής τάξης α, τότε θα υπήρχαν $M, t_0 > 0$ με

$$e^{t^2} \le M \cdot e^{\alpha t} \quad \text{για κάθε } t > t_0.$$

Κατόπιν τούτου η συνάρτηση $f(t)=e^{t^2-\alpha t} / [t_0, +\infty)$ θα ήταν άνω φραγμένη, το οποίο είναι άτοπο αφού

$$\lim_{t\to+\infty} e^{t^2-\alpha t} = +\infty.$$

Πρόταση 1.1

Αν μια συνάρτηση $\mathbf{f/[0,+\infty)}$ είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης α, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\mathbf{F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

συγκλίνει απολύτως για κάθε $\mathbf{s>\alpha}$, και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $\mathbf{[\beta,+\infty)}$, όπου $\mathbf{\beta>\alpha}$.

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\mathbf{\lim_{s\to+\infty} F(s)=0}.$$

Στα επόμενα θα σημειώνεται με $\mathbf{L_\alpha}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f/[0,+\infty)$ οι οποίες είναι κατά τμήματα συνεχείς και εκθετικής τάξης α.

Το σύνολο L_α, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις των συναρτήσεων, είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Επιπλέον, από την πρόταση 1.1 προκύπτει ότι για κάθε $f\in L_\alpha$ ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ στο διάστημα $(\alpha,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Θ)

Να αποδειχθεί η πρόταση 1.1.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, θα αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $s>\alpha$. Επειδή η $f/[0,+\infty)$ είναι εκθετικής τάξης α, θα υπάρχουν $M_1, t_0>0$ με

$$\left|f(t)\right|\le M_1e^{\alpha t},\qquad \text{για κάθε } t\in[t_0,+\infty). \tag{1}$$

Εξάλλου, επειδή η $f/[0,+\infty)$ είναι κατά τμήματα συνεχής και η $g(t)=e^{-\alpha t}/[0,+\infty)$ είναι συνεχής, έπεται ότι η $f\cdot e^{-\alpha t}/[0,+\infty)$ θα είναι κατά τμήματα συνεχής, οπότε και φραγμένη στο $[0,t_0]$, δηλαδή υπάρχει $M_2>0$ με

$$\left|f(t)e^{-\alpha t}\right|\le M_2,\qquad \text{για κάθε } t\in[0,t_0] \tag{2}$$

Τότε όμως, αν τεθεί $M=\max\{M_1,M_2\}$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\left|f(t)\right|\le Me^{\alpha t},\qquad \text{για κάθε } t\in[0,+\infty) \tag{3}$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$\left|f(t)e^{-st}\right| \le Me^{-(s-\alpha)t}, \qquad \text{για κάθε } t \in [0,+\infty) \qquad (4)$$

οπότε, επειδή το $\int_0^{+\infty} Me^{-(s-\alpha)t}dt$ συγκλίνει για κάθε $s > \alpha$, έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης Ι, ότι θα συγκλίνει και το $\int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-st}\right|dt$.

Στη συνέχεια, θα αποδειχθεί ότι η σύγκλιση του $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\beta,+\infty)$ όπου $\beta > \alpha$. Πραγματικά, από την (4) προκύπτει ότι

$$|f(t)|e^{-st} \le Me^{-(\beta-\alpha)t}, \text{ για κάθε } s \in [\beta,+\infty),\ t \in [0,+\infty),$$

οπότε, επειδή το $\int_0^{+\infty} Me^{-(\beta-\alpha)t}dt$ συγκλίνει, έπεται, σύμφωνα το κριτήριο του Weierstrass, ότι το $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\beta,+\infty)$.

Τέλος, θα αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$. Πραγματικά, από τη σχέση (4) προκύπτει ότι

$$|F(s)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt\right| \le \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-st}dt \le M\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{M}{s-\alpha}$$

επομένως, επειδή $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{M}{s-\alpha} = 0$, έπεται ότι $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

1. **Αν $f_1, f_2 \in L$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in L$ και**

$$\mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + c_2 \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$$

2. **Αν $f \in L$ με $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, τότε ισχύει ότι**

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = F(s - \alpha).$$

3. **Αν $f \in L$ και $g(t) = \begin{cases} f(t-\alpha), & \text{αν } t \geq \alpha \\ 0, & \text{αν } t < \alpha, \end{cases}$**

τότε $g \in L$ και ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right] = e^{-\alpha s} \mathcal{L}\left[f(t)\right].$$

4. **Αν $f \in L$ και $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, τότε ισχύει ότι**

$$\mathcal{L}\left[f(\alpha t)\right] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right), \text{ για } \alpha > 0.$$

5. **Αν $f / [0, +\infty)$ συνεχής και εκθετικής τάξης α, με f' κατά τμήματα συνεχή στο $[0, +\infty)$, τότε ισχύει**

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0), \text{ για κάθε } s > \alpha$$

6. Αν οι συναρτήσεις $f, f', \ldots, f^{(n-1)} / [0,+\infty)$ είναι συνεχείς και εκθετικής τάξης α και η $f^{(n)}$ είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0,+\infty)$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

για κάθε $s > \alpha$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Αν $f \in L_\alpha$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)], \text{ για κάθε } s > \alpha.$$

8. Αν $f \in L_\alpha$ και $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s), \text{ για κάθε } s > \alpha \text{ και } n \in \mathbb{N}^*.$$

9. Αν $f \in L_\alpha$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(u)\,du, \text{ για κάθε } s > \alpha.$$

Αποδείξεις ιδιοτήτων

Ιδιότητες 1-4: Οι αποδείξεις τους είναι εύκολες και αφήνονται ως άσκηση.

Ιδιότητα 5:

ΑΣΚΗΣΗ 5 (Θ)

Να αποδειχθεί η 5η ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace: **Αν $\mathbf{f/[0,+\infty)}$ συνεχής και εκθετικής τάξης α, με $\mathbf{f'}$ κατά τμήματα συνεχή στο $\mathbf{[0,+\infty)}$, τότε ισχύει $\mathbf{\mathcal{L}[f'(t)]=s\mathcal{L}[f(t)]-f(0)}$, για κάθε $\mathbf{s>\alpha}$**

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[f'(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}f'(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-st}f'(t)dt$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left[e^{-st}f(t)\right]_0^x-\int_0^x\left(e^{-st}\right)'f(t)dt\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-sx}f(x)-f(0)+s\int_0^x e^{-st}f(t)dt\right)$$

$$\overset{*}{=}-f(0)+s\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-st}f(t)dt=s\mathcal{L}[f(t)]-f(0).$$

*. Επειδή $f\in L_a$, έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty}e^{-sx}f(x)=0$, για κάθε $s>a$. (Άλυτη άσκηση 6).

Ιδιότητα 6: Αποδεικνύεται με επαγωγή (άσκηση). Για $n = 1$, είναι η ιδιότητα 5.

Ιδιότητα 7: Αν $\mathbf{f \in L_\alpha}$, τότε ισχύει ότι

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]}, \text{ για κάθε } \mathbf{s > \alpha}.$$

Απόδειξη. Αν τεθεί $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$, τότε $g'(t) = f(t)$, οπότε από την ιδιότητα 5 προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = s\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$$

Ιδιότητα 8:

ΑΣΚΗΣΗ 6 (Θ)

Να αποδειχθεί η όγδοη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace:

Αν $\mathbf{f \in L_\alpha}$ και $\mathbf{F(s) = \mathcal{L}[f(t)]}$, τότε ισχύει ότι

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s)}, \text{ για κάθε } \mathbf{s > \alpha} \text{ και } \mathbf{n \in \mathbb{N}^*}.$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά, αποδεικνύεται ότι $t^n f(t) \in L_\beta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\beta > \alpha$.

Πραγματικά, επειδή η συνάρτηση $h(t) = t^n / [0,+\infty)$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $f / [0,+\infty)$ είναι κατά τμήματα συνεχής, προκύπτει ότι η συνάρτηση $t^n f(t) / [0,+\infty)$ είναι κατά τμήματα συνεχής.

Επιπλέον, επειδή η f είναι εκθετικής τάξης α, υπάρχουν $M > 0$ και $t_0 > 0$ με

$$\left|f(t)\right| \le Me^{\alpha t}, \quad \text{για κάθε } t \in (t_0, +\infty). \tag{1}$$

Εξάλλου, επειδή $\lim_{t \to +\infty} t^n e^{-(\beta-\alpha)t} = 0$ για κάθε $\beta > \alpha$, εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = 1$ προκύπτει ότι υπάρχει $t_1 > t_0$ με

$$t^n e^{-(\beta-\alpha)t} < 1, \quad \text{για κάθε } t \in (t_1, +\infty). \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\left|f(t)t^n\right| < Me^{\beta t} \text{ για κάθε } t \in (t_1, +\infty).$$

Κατόπιν τούτων, $t^n f(t) \in L_\beta$ και σύμφωνα με την πρόταση 1.1 το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$g_n(s)=\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right]=\int_0^{+\infty} e^{-st}t^n f(t)\,dt$$

συγκλίνει για κάθε $s>\alpha$ και μάλιστα ομοιόμορφα, σε κάθε διάστημα της μορφής $[\beta,+\infty)$, όπου $\beta>\alpha$.

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την πρόταση 6.1(ii) του Κεφάλαιου 9 για τη $f(t,s)=e^{-st}t^n f(t)\,/\,[0,+\infty)\times[\beta,+\infty)$ για κάθε $\beta>\alpha$, προκύπτει ότι η συνάρτηση $g_n\,/\,[0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη και

$$g_n'(s)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}t^n f(t)\right)dt=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-st}t^n f(t)\,dt$$

$$=-\int_0^{+\infty} e^{-st}t^{n+1}f(t)\,dt=-g_{n+1}(s),$$

για κάθε $s>\alpha$ και $n\in\mathbb{N}^*$.

Επομένως, $g_n(s)=-g'_{n-1}(s)$ για κάθε $s>\alpha$ και $n\in\mathbb{N}^*$ οπότε, τελικά, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right]=g_n(s)=-g'_{n-1}(s)=(-1)\left(-g''_{n-2}(s)\right)=(-1)^2 g''_{n-2}(s)$$

$$=\cdots=(-1)^k g_{n-k}^{(k)}(s)=\cdots=(-1)^n g_0^{(n)}(s)=(-1)^n F^{(n)}(s).$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (Θ)

Να αποδειχθεί η ιδιότητα 9 του μετασχ. Laplace:

Αν $\mathbf{f \in L_\alpha}$, $\mathbf{F(s) = \mathcal{L}[f(t)]}$ και υπάρχει το όριο $\mathbf{\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}}$, τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(u)\,du, \text{ για κάθε } s > \alpha.$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g / [0, +\infty)$ με

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{t}, & \text{αν } t \neq 0 \\ \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}, & \text{αν } t = 0 \end{cases}$$

η οποία είναι προφανώς κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης α, οπότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace αυτής $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ για κάθε $s > \alpha$.

Επειδή $f(t) = g(t) \cdot t$, για κάθε $t \in (0, +\infty)$, από την όγδοη ιδιότητα του μετασχ. Laplace προκύπτει ότι

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t \cdot g(t)] = -G'(s), \text{ για κάθε } s > \alpha.$$

Τότε, σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, είναι

$$\int_s^x F(u)\,du = G(s) - G(x), \text{ για κάθε } x > s > \alpha,$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\int_s^{+\infty} F(u)\,du = \lim_{x\to+\infty}\int_s^x F(u)\,du = G(s) - \lim_{x\to+\infty} G(x)$$

$$= G(s) - 0 = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

Εφαρμογές

1. Για τις υπερβολικές συναρτήσεις είναι

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[\sinh\alpha t] = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}} \text{ και } \boldsymbol{\mathcal{L}[\cosh\alpha t] = \frac{s}{s^2-\alpha^2}}$$

για κάθε $s \in \mathbb{R}$ με $s > |\alpha|$.

Πραγματικά,

$$\mathcal{L}[\sinh\alpha t] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{\alpha t}] - \mathcal{L}[e^{-\alpha t}]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}.$$

Ανάλογα, αποδεικνύεται (άσκηση) ότι

$$\mathcal{L}[\cosh\alpha t] = \frac{s}{s^2-\alpha^2}.$$

2. Εφαρμόζοντας τη δεύτερη ιδιότητα για τη συνάρτηση

$$f(t) = \sin\beta t,$$

όπου $\beta \in \mathbb{R}$, προκύπτει ο τύπος

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\sin\beta t\right] = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2},$$

για κάθε $s > \alpha$

Ανάλογα, ευρίσκονται οι τύποι

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\cos\beta t\right] = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2},$$

για κάθε $s > \alpha$, και

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\sinh\beta t\right] = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2},$$

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\cosh\beta t\right] = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$$

για κάθε $s > |\alpha|$.

3. Για τα **πολυώνυμα του Laguerre $\mathbf{L_n(t)}$** είναι

$$\mathcal{L}\left[L_n(t)\right]=\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}^*,\ s>1.$$

Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιηθεί ο γνωστός **τύπος του Rodrigues**

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\left(e^{-t}t^n\right)^{(n)}$$

και η έκτη ιδιότητα, για τη συνάρτηση $f(t)=e^{-t}t^n$. Πραγματικά, επειδή

$$\left(e^{-t}t^n\right)^{(v)}=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\left(e^{-t}\right)^{(\nu-k)}\left(t^n\right)^{(k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{\nu-k}\binom{\nu}{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)e^{-t}t^{n-k}$$

προκύπτει ότι $f^{(v)}(0)=0$ για κάθε $\nu=0,1,\ldots,n-1$,

οπότε $\mathcal{L}\left[\left(e^{-t}t^n\right)^{(n)}\right]=s^n\mathcal{L}\left[e^{-t}t^n\right]=\dfrac{s^n n!}{(s+1)^{n+1}}$.

Κατόπιν τούτου, από την ιδιότητα 2, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[L_n(t)\right]=\frac{1}{n!}\mathcal{L}\left[e^t\left(e^{-t}t^n\right)^{(n)}\right]=\frac{1}{n!}\frac{(s-1)^n n!}{(s-1+1)^{n+1}}=\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}.$$

4. Για τη συνάρτηση $f(t)=t^2\sin 3t\,/\,[0,+\infty)$ είναι

$$\mathcal{L}\left[t^2\sin 3t\right]=\frac{18\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+9\right)^3}.$$

Πραγματικά, επειδή $\mathcal{L}[\sin 3t]=\dfrac{3}{s^2+3^2}$, εφαρμόζοντας την όγδοη ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[t^2\sin 3t\right]=(-1)^2\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)''=\frac{18\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+9\right)^3}.$$

5. Για τη **συνάρτηση ημιτονικού ολοκληρώματος** $\mathbf{si(t)}=\int_0^t\frac{\sin u}{u}du$ είναι $\mathcal{L}[si(t)]=\dfrac{1}{s}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{s}$.

Πραγματικά, επειδή $\mathcal{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$, εφαρμόζοντας την ένατη ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^{+\infty}\frac{du}{u^2+1}=\left[\operatorname{arctg}u\right]_s^{+\infty}=\lim_{u\to+\infty}\operatorname{arctg}\,u-\operatorname{arctg}s$$

$$=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}s=\operatorname{arctg}\frac{1}{s},$$

οπότε, από την ιδιότητα 7, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να ευρεθεί ο μετασχημ. Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = t\cos\alpha t \,/\, [0,+\infty),$$

με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου της.

ΛΥΣΗ

Επειδή

$$f'(t) = \cos\alpha t - \alpha t\sin\alpha t \text{ και}$$
$$f''(t) = -2\alpha\sin\alpha t - \alpha^2 t\cos\alpha t,$$

προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[f''(t)] = -2\alpha\mathcal{L}[\sin\alpha t] - \alpha^2\mathcal{L}[f(t)] = -\frac{2\alpha^2}{s^2+\alpha^2} - \alpha^2\mathcal{L}[f(t)] \quad (1)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f(t)] - s\cdot 0 - 1 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$-\frac{2\alpha^2}{s^2+\alpha^2} - \alpha^2\mathcal{L}[f(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - 1$$

$$(s^2+\alpha^2)\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s^2-\alpha^2}{s^2+\alpha^2}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}, \text{ για κάθε } s > 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 12 (*)

Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}\left[\dfrac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\right]=\ln\left(\dfrac{s+\alpha}{s+\beta}\right)$,

για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $s>\max\{-\alpha,-\beta\}$, και στη συνέχεια να ευρεθεί το $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-10t}-e^{-16t}}{t}dt$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}\right]=\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}\right]-\mathcal{L}\left[e^{-\beta t}\right]=\dfrac{1}{s+\alpha}-\dfrac{1}{s+\beta}$,

για κάθε $s>\max\{-\alpha,-\beta\}$ και

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}\right)'}{t'}=\beta-\alpha\in\mathbb{R}$$

προκύπτει, με τη βοήθεια της ένατης ιδιότητας του μετασχημ. Laplace, ότι για κάθε $s>\max\{-\alpha,-\beta\}$ ισχύει

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\right]=\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{u+\alpha}-\frac{1}{u+\beta}\right)du=\left[\ln(u+\alpha)-\ln(u+\beta)\right]_s^{+\infty}$$

$$=\left[\ln\left(\frac{u+\alpha}{u+\beta}\right)\right]_s^{+\infty}=\lim_{u\to+\infty}\ln\left(\frac{u+\alpha}{u+\beta}\right)-\ln\left(\frac{s+\alpha}{s+\beta}\right)=\ln\left(\frac{s+\beta}{s+\alpha}\right)\quad(1)$$

Από την (1) προκύπτει η $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-(s+\alpha)t}-e^{-(s+\beta)t}}{t}dt=\ln\left(\dfrac{s+\beta}{s+\alpha}\right)$ η

οποία για $s=10$, $\alpha=0$, $\beta=6$ δίδει $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-10t}-e^{-16t}}{t}dt=\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 11 (*)

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

α) $f(t)=e^{-2t}t\cos 3t\,/\,[0,+\infty)$, β) $g(t)=\int_0^t u\cosh u\,du\,/\,[0,+\infty)$,

γ) $h(t)=\int_0^t \frac{\sinh u}{u}du\,/\,[0,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\mathcal{L}[\cos 3t]=\frac{s}{s^2+9}$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[t\cos 3t]=(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)=-\frac{(s^2+9)-2s^2}{(s^2+9)^2}=\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2},$$

οπότε $\mathcal{L}[e^{-2t}t\cos 3t]=\frac{(s+2)^2-9}{((s+2)^2+9)^2}$, για κάθε $s>0$.

β) Επειδή $\mathcal{L}[\cosh t]=\frac{s}{s^2-1}$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[t\cosh t]=(-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2-1}\right)=-\frac{(s^2-1)-2s^2}{(s^2-1)^2}=\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2},$$

οπότε $\mathcal{L}\left[\int_0^t u\cosh u\,du\right]=\frac{1}{s}\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$, για κάθε $s>1$.

γ) $h(t)=\int_0^t \frac{\sinh u}{u}\,du \,/\, [0,+\infty)$

Επειδή $\mathcal{L}[\sinh t]=\dfrac{1}{s^2-1}$ και

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\sinh t)'}{t'}=\lim_{t\to 0}\cosh t=1\in\mathbb{R}$$

προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sinh t}{t}\right]=\int_s^{+\infty}\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_s^{+\infty}.$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)=\ln\sqrt{\frac{s+1}{s-1}}$$

Άρα,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\sinh u}{u}\,du\right]=\frac{1}{s}\ln\sqrt{\frac{s+1}{s-1}},$$

για κάθε $s>1$.

ΑΣΚΗΣΗ 8 (*)

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f / [0,+\infty)$ όταν:

α) $f(t)=\alpha^t,\ \alpha>0,$

β) $f(t)=3t^2-4t+11,$

γ) $f(t)=e^{\kappa t}\sin\lambda t+e^{\mu t}\cos\nu t,\ \kappa,\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}.$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\mathcal{L}[\alpha^t]=\mathcal{L}[e^{t\ln\alpha}]=\frac{1}{s-\ln\alpha},\ \text{για κάθε } s>\ln\alpha.$$

β) Έχουμε

$$\mathcal{L}[3t^2-4t+11]=3\mathcal{L}[t^2]-4\mathcal{L}[t]+11\mathcal{L}[1]=\frac{6}{s^3}-\frac{4}{s^2}+\frac{11}{s}$$

για κάθε $s>0$.

γ) Έχουμε

$$\mathcal{L}[e^{\kappa t}\sin\lambda t+e^{\mu t}\cos\nu t]=\mathcal{L}[e^{\kappa t}\sin\lambda t]+\mathcal{L}[e^{\mu t}\cos\nu t]$$

$$=\frac{\lambda}{(s-\kappa)^2+\lambda^2}+\frac{s-\mu}{(s-\mu)^2+\nu^2},\ \text{για κάθε } s>\max\{\kappa,\mu\}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 13 (Θ)

Να αποδειχθεί η σχέση $\mathcal{L}\left[t^{x-1}\ln t\right]=\dfrac{\Gamma'(x)-\Gamma(x)\ln s}{s^x}$,

για κάθε $s,x>0$. Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{L}[\ln t]=-\frac{1}{s}\left(\ln s+\gamma\right),\qquad \text{για κάθε } s>0,$$

όπου $\gamma=-\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln x\,dx$ είναι η σταθερά του Euler.

ΛΥΣΗ

Επειδή

$$\mathcal{L}\left[t^{x-1}\ln t\right]=\int_0^{+\infty}e^{-st}t^{x-1}\ln t\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-st}t^{x-1}\right)dt \qquad (1)$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε $[\alpha,\beta]\subseteq(0,+\infty)$, εφαρμόζεται η πρόταση 6.1 (ii) του Κεφαλαίου 9, οπότε από την (1) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[t^{x-1}\ln t\right]=\frac{d}{dx}\left(\int_0^{+\infty}e^{-st}t^{x-1}dt\right)=\frac{d}{dx}\mathcal{L}\left[t^{x-1}\right]\overset{2}{=}\frac{d}{dx}\left[\frac{\Gamma(x)}{s^x}\right]$$

$$=\frac{\Gamma'(x)s^x-\Gamma(x)\dfrac{d}{dx}\left(s^x\right)}{s^{2x}}=\frac{\Gamma'(x)-\Gamma(x)\ln s}{s^x},\ \text{για κάθε } s,x>0.$$

Στη συνέχεια, θέτοντας στην παραπάνω σχέση $x=1$:

$$\mathcal{L}[\ln t]=\frac{\Gamma'(1)-\Gamma(1)\ln s}{s}\overset{3}{=}\frac{\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln x\,dx-1\cdot\ln s}{s}=-\frac{1}{s}(\ln s+\gamma),$$

για κάθε $s>0$.

ΑΣΚΗΣΗ 15 (Θ)

Έστω ότι η συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ είναι συνεχής και εκθετικής τάξης α, η παράγωγός της f' είναι επίσης εκθετικής τάξης α και κατά τμήματα συνεχής και $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$.

Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{s\to+\infty} sF(s)=f(0)$.

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας την πρόταση 1.1 για τη συνάρτηση f', προκύπτει ότι ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της και ισχύει ότι

$$\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f'(t)](s)=0 \qquad (1)$$

Επιπλέον, από την πέμπτη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[f'(t)](s)=sF(s)-f(0) \qquad (2)$$

Τέλος, από τις σχέσεις (1) και (2) θα είναι

$$\lim_{s\to+\infty}(sF(s)-f(0))=0$$

ή

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s)=f(0).$$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (Θ)

Έστω ότι η συνάρτηση $f/\left[0,+\infty\right)$ είναι συνεχής και εκθετικής τάξης α και ότι η παράγωγός της f' είναι κατά τμήματα συνεχής στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ (στο $\mathbb{R}$) και $F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$,

να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{s\to0^+} sF(s)=\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιηθεί η εξής πρόταση:

Αν g είναι μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση στο $\left[0,+\infty\right)$ για την οποία το $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ συγκλίνει, τότε το $\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t)dt$ συγκλίνει για κάθε $s>0$ και

$$\lim_{s\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t)dt=\int_0^{+\infty} g(t)dt.$$

Πραγματικά, επειδή το επόμενο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει με $\int_0^{+\infty} f'(t)dt=\left[f(t)\right]_0^{+\infty}=\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)-f(0)$ (1)

εφαρμόζεται η προηγούμενη πρόταση για $g=f'$ και

$$\int_0^{+\infty} f'(t)dt=\lim_{s\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)dt=\lim_{s\to0^+}\mathcal{L}\left[f'(t)\right](s)$$

$$=\lim_{s\to0^+}\left(sF(s)-f(0)\right)=\lim_{s\to0^+} sF(s)-f(0) \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{s\to0^+} sF(s)=\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10:
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Περιεχόμενα διάλεξης:

Μετασχηματισμός Laplace δυναμοσειράς
Μετασχηματισμός Laplace περιοδικής συνάρτησης
Συναρτήσεις Bessel
Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Μετασχηματισμός Laplace δυναμοσειράς

Αν η δυναμοσειρά $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^n$ συγκλίνει για κάθε $t \geq 0$ και υπάρχουν $c, \alpha > 0$ με $|\alpha_n| \leq c\dfrac{\alpha^n}{n!}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \geq n_0$, τότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f / [0,+\infty)$ με

$$\mathcal{L}[f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \mathcal{L}[t^n]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n n!}{s^{n+1}}, \text{ για κάθε } s > \alpha.$$

Οι δυναμοσειρές θα μελετηθούν εκτενώς σε επόμενο κεφάλαιο. Οι δυναμοσειρές που εμφανίζονται σε αυτό το κεφάλαιο προκύπτουν άμεσα από γνωστές σειρές Maclaurin (Ανάλυση Ι).

Εφαρμογή

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης

$$f(t)=\frac{1-\cos\alpha t}{t} / (0,+\infty)$$

όπου $\alpha > 0$, αρχικά αναπτύσσεται αυτή σε σειρά Maclaurin. Πραγματικά, είναι

$$f(t)=\frac{1}{t}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\alpha t)^{2n}}{(2n)!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\alpha^{2n}\frac{t^{2n-1}}{(2n)!}$$

για κάθε $t>0$. Επομένως, είναι

$$\mathcal{L}[f(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}\mathcal{L}[t^{2n-1}]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}\frac{(2n-1)!}{s^{2n}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\left(\frac{\alpha}{s}\right)^2\right)^n=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{s^2}\right)$$

για κάθε $s>0$.

Παρατηρήσεις

1. Ο μετασχηματισμός Laplace της προηγούμενης συνάρτησης μπορεί να υπολογισθεί και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων (άσκηση).

2. Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^{n+x}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{\Gamma(n+x+1)}{s^{n+x+1}}$$

όταν η σειρά συγκλίνει για κάθε $t\geq 0$, $|\alpha_n|\leq c\dfrac{\alpha^n}{n!}$ για κάθε $n\geq n_0$ και $x>-1$.

3. ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αν ορίζεται ο μετασχημ. Laplace μιας περιοδικής συνάρτησης $f/[0,+\infty)$, τότε αποδεικνύεται ότι

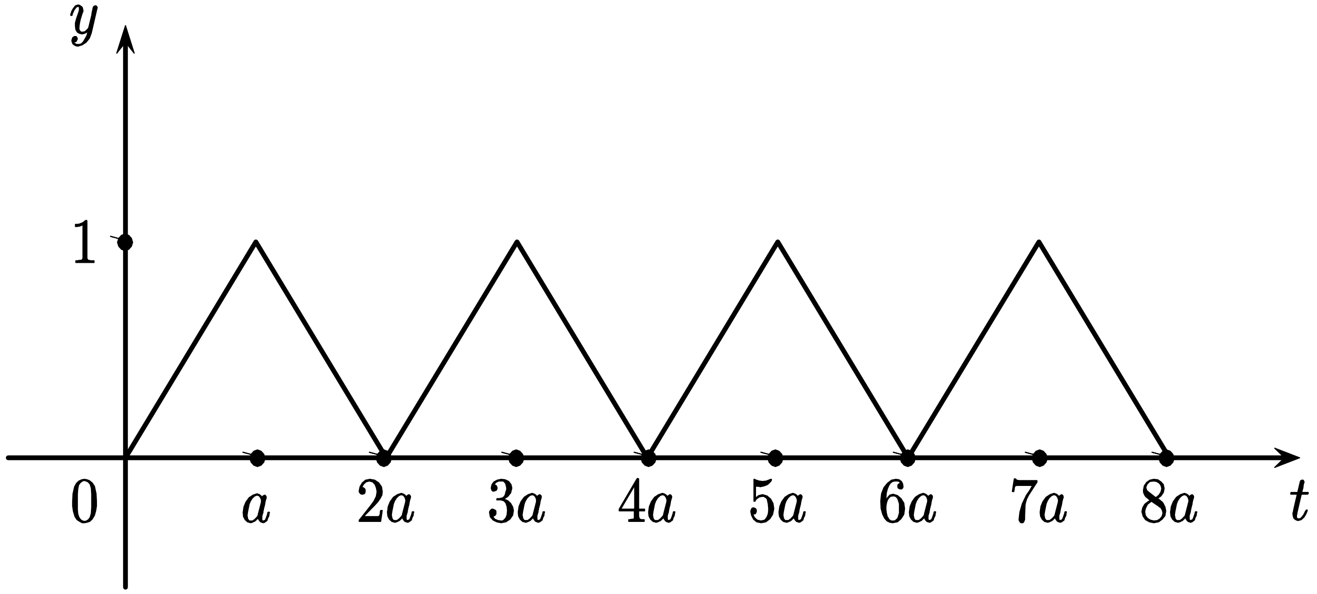
$$\mathcal{L}[\mathbf{f}(\mathbf{t})]=\frac{\int_0^{\tau}\mathbf{e}^{-\mathbf{s}\mathbf{t}}\mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{d}\mathbf{t}}{\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-\mathbf{s}\tau}}$$

όπου τ είναι μια θετική περίοδος της f.

Εφαρμογή. Για την περιοδική συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ με

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\alpha}, & \text{αν } 0\le t<\alpha\\[2ex] 2-\dfrac{t}{\alpha}, & \text{αν } \alpha\le t<2\alpha\end{cases}$$

και $f(t+2\alpha)=f(t)$ για κάθε $t\in[0,+\infty)$, όπου $\alpha>0$,



είναι

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^{2\alpha} e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-2\alpha s}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\alpha s}}\left(\int_0^{\alpha} e^{-st}\frac{t}{\alpha}dt + \int_{\alpha}^{2\alpha} e^{-st}\left(2-\frac{t}{\alpha}\right)dt\right)$$

$$\stackrel{1}{=} \frac{1}{1-e^{-2\alpha s}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\alpha s^2}\left(-\alpha s e^{-\alpha s} - e^{-\alpha s} + 1\right) + \frac{1}{\alpha s^2}\left(\alpha s e^{-\alpha s} + e^{-2\alpha s} - e^{-\alpha s}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha s^2}\frac{\left(1-e^{-\alpha s}\right)^2}{1-e^{-2\alpha s}} = \frac{1}{\alpha s^2}\frac{\left(1-e^{-\alpha s}\right)^2}{1-(e^{-\alpha s})^2} = \frac{1}{\alpha s^2}\frac{\left(1-e^{-\alpha s}\right)^2}{(1-e^{-\alpha s})(1+e^{-\alpha s})}$$

$$= \frac{1}{\alpha s^2}\frac{1-e^{-\alpha s}}{1+e^{-\alpha s}}$$

$$= \frac{1}{\alpha s^2}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{h}\,\frac{\alpha s}{2}.$$

---

1. Με παραγοντική ολοκλήρωση.

ΑΣΚΗΣΗ 17 (Θ)

Να αποδειχθεί ο τύπος του μετασχηματισμού Laplace μιας περιοδικής συνάρτησης.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\dfrac{\int_0^{\tau} e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-s\tau}}$,

όπου τ μια θετική περίοδος της f.

Πραγματικά, από την πέμπτη ιδιότητα των γενικευμένων ολοκληρωμάτων προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} e^{-st}f(t)dt \qquad (1)$$

Αν τεθεί $u=t-n\tau$ στο παραπάνω ορισμένο ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι

$$\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} e^{-st}f(t)dt=\int_0^{\tau} e^{-s(u+n\tau)}f(u+n\tau)du=e^{-sn\tau}\int_0^{\tau} e^{-su}f(u)du \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn\tau}\int_0^{\tau} e^{-su}f(u)du=\left(\int_0^{\tau} e^{-su}f(u)du\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-s\tau}\right)^n$$

$$=\frac{\int_0^{\tau} e^{-st}f(u)du}{1-e^{-s\tau}}$$

για κάθε $s>0$.

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL

Οι συναρτήσεις Bessel εισήχθησαν από τον Bernoulli ως λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + \left(t^2 - p^2\right) y(t) = 0, \text{ όπου } p \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Έτσι, για $p \in \mathbb{R}$ αποδεικνύεται ότι η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p}}{2^{2i+p} i! \Gamma(p+i+1)}$$

συγκλίνει απολύτως για κάθε $t \in \mathbb{R}$, οπότε ορίζει μια συνάρτηση του t που ονομάζεται **συνάρτηση Bessel τάξης p** και σημειώνεται με $\mathbf{J_p(t)}$.

Παρατήρηση

Αν $p = -n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, τότε οι όροι της σειράς για τους οποίους $p + i + 1 \leq 0$ είναι ίσοι με μηδέν, διότι η συνάρτηση γάμμα απειρίζεται και το $\dfrac{1}{\Gamma(p+i+1)}$ θεωρείται ίσο με 0.

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση Bessel $J_p(t)$ είναι μια λύση της εξίσωσης (1).

Ιδιότητες:

1. $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,

2. $\left(t^{p+1} J_{p+1}(t)\right)' = t^{p+1} J_p(t)$,

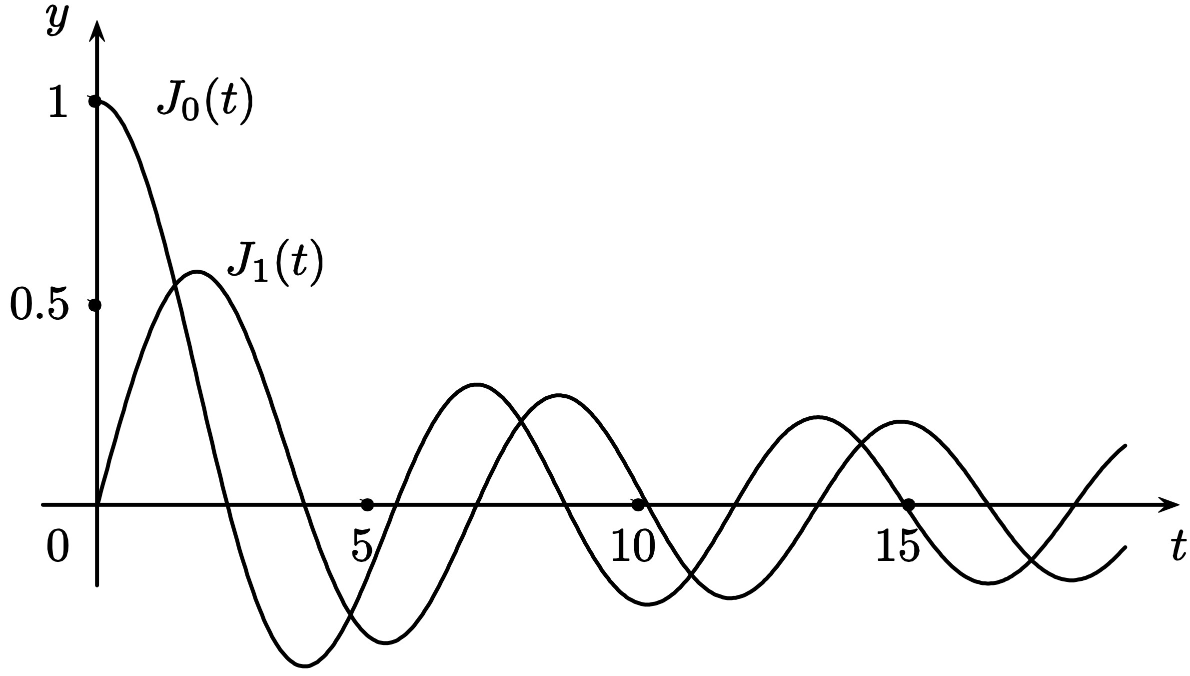
3. $tJ'_p(t) = pJ_p(t) - tJ_{p+1}(t)$,

4. $tJ'_p(t) = -pJ_p(t) + tJ_{p-1}(t)$,

5. $J_{p+1}(t) = \dfrac{2p}{t} J_p(t) - J_{p-1}(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συναρτήσεις Bessel τάξης 0,1 οι οποίες είναι πολύ στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους. Πραγματικά, αν εφαρμοσθούν η τρίτη και δεύτερη ιδιότητα για $p = 0$, προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$J'_0(t) = -J_1(t) \text{ και } \left(tJ_1(t)\right)' = tJ_0(t), \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$



Μετασχηματισμός Laplace συναρτήσεων Bessel

Ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων Bessel εμφανίζεται πολύ συχνά στις εφαρμογές.

Αρχικά, χρησιμοποιώντας τον τύπο του μετασχηματισμού Laplace της δυναμοσειράς αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}\left[\mathbf{J_0(t)}\right]=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{s^2+1}}},$$

για κάθε $s>1$.

Επιπλέον, από την πέμπτη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[J_1(t)\right]=-\mathcal{L}\left[J_0'(t)\right]=-s\mathcal{L}\left[J_0(t)\right]+J_0(0)$$

$$=-\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}+1=\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}\left[\mathbf{J_p(t)}\right]=\frac{\left(\sqrt{\mathbf{s^2+1}}-\mathbf{s}\right)^{\mathbf{p}}}{\sqrt{\mathbf{s^2+1}}}$$

για κάθε $s>1$ και $p>-1$.

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}\left[J_0(t)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, $s>1$.

ΛΥΣΗ

Θέτοντας $p=0$ στον τύπο $J_p(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^i t^{2i+p}}{2^{2i+p} i!\Gamma(p+i+1)}$,

προκύπτει ότι $J_0(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^i t^{2i}}{2^{2i} i! i!}$, οπότε

$$\mathcal{L}\left[J_0(t)\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2^{2i}(i!)^2}\mathcal{L}\left[t^{2i}\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(2i)!}{2^{2i}(i!)^2}\frac{1}{s^{2i+1}} \qquad (1)$$

Από την άλλη, χρησιμοποιώντας τον τύπο της δυωνυμικής σειράς, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{i}\left(\frac{1}{s^2}\right)^i=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{i}\frac{1}{s^{2i+1}} \qquad (2)$$

για κάθε $s>1$. Τέλος, για κάθε $i\in\mathbb{N}^*$, είναι

$$\binom{-\frac{1}{2}}{i}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-i+1\right)}{i!}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2i-1}{2}\right)}{i!}$$

$$=(-1)^i\frac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{2^i i!}=\frac{(-1)^i(2i)!}{i!2^i\cdot 2\cdot 4\cdots(2i)}=\frac{(-1)^i(2i)!}{2^{2i}(i!)^2} \qquad (3)$$

Επειδή η (3) ισχύει προφανώς και για i=0, από τις (1), (2) και (3) προκύπτει άμεσα ο ζητούμενος τύπος.

ΑΣΚΗΣΗ 27

Να αποδειχθούν οι σχέσεις

$$\mathcal{L}\left[tJ_0(\alpha t)\right] = \frac{s}{\left(s^2+\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}} \text{ και } \mathcal{L}\left[tJ_1(\alpha t)\right] = \frac{\alpha}{\left(s^2+\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

για κάθε $\alpha > 0$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\mathcal{L}[J_0(t)] = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, χρησιμοποιώντας την τέταρτη και την όγδοη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[tJ_0(\alpha t)] = (-1)^1(\mathcal{L}[J_0(\alpha t)])'$$

$$= -\left(\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{(s/\alpha)^2+1}}\right)' = -\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}\right)' = \frac{s}{(s^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Επιπλέον, επειδή $\left(tJ_1(t)\right)' = tJ_0(t)$, από τη πέμπτη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace, προκύπτει ότι

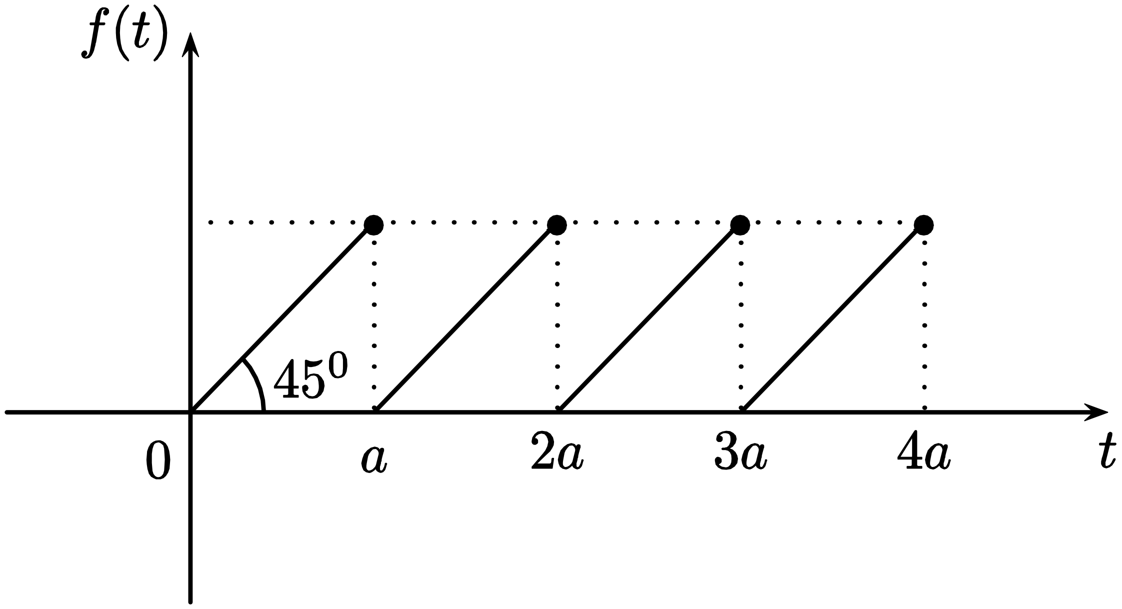
$$\mathcal{L}\left[tJ_0(\alpha t)\right] = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}\left[\left(tJ_1(\alpha t)\right)'\right] = \frac{1}{\alpha}\left(s\mathcal{L}\left[tJ_1(\alpha t)\right] - 0\right).$$

Άρα, $\mathcal{L}\left[tJ_1(\alpha t)\right] = \dfrac{\alpha}{s}\mathcal{L}\left[tJ_0(\alpha t)\right] = \dfrac{\alpha}{(s^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 18 (*)

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης $f / [0,+\infty)$, της οποίας η γραφική παράσταση δίδεται στο επόμενο σχήμα.



ΛΥΣΗ

Από το δοσμένο σχήμα προκύπτει ότι η περιοδική συνάρτηση $f / [0,+\infty)$ έχει περίοδο α και $f(x)=x$, για κάθε $x \in [0,\alpha]$. Άρα,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^{\alpha} e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-s\alpha}} = \frac{\int_0^{\alpha} e^{-st} t\,dt}{1-e^{-s\alpha}} \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της τελευταίας σχέσης, χρησιμοποιείται η παραγοντική ολοκλήρωση.

$$\int_0^{\alpha} e^{-st} t dt = -\frac{1}{s}\int_0^{\alpha} t\left(e^{-st}\right)' dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left[te^{-st}\right]_0^{\alpha} + \frac{1}{s}\int_0^{\alpha} t' e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s}\alpha e^{-s\alpha} - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{s}\alpha e^{-s\alpha} - \frac{1}{s^2}e^{-s\alpha} + \frac{1}{s^2} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{-\frac{1}{s}\alpha e^{-s\alpha} - \frac{1}{s^2}e^{-s\alpha} + \frac{1}{s^2}}{1 - e^{-s\alpha}}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{\alpha}{s\left(e^{s\alpha} - 1\right)}$$

για κάθε $s > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 19 (*)

Δίδεται η συνάρτηση $f / [0,+\infty)$ με $f(t)=\begin{cases}\cos t, & \text{αν } t\in[0,\pi)\\ 0, & \text{αν } t\in[\pi,2\pi)\end{cases}$

και $f(t+2\pi)=f(t)$, για κάθε $t\in[0,+\infty)$. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης αυτής.

ΛΥΣΗ

Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο 2π, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{\int_0^{2\pi}e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-2\pi s}}=\frac{\int_0^{\pi}e^{-st}\cos t dt}{1-e^{-2\pi s}} \qquad (1)$$

για κάθε $s>0$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση.

$$I=\int_0^{\pi}e^{-st}\cos t dt=-\frac{1}{s}\int_0^{\pi}\left(e^{-st}\right)'\cos t dt$$

$$=-\frac{1}{s}\left[e^{-st}\cos t\right]_0^{\pi}-\frac{1}{s}\int_0^{\pi}e^{-st}\sin t dt=\frac{1}{s}\left(e^{-\pi s}+1\right)-\frac{1}{s^2}\int_0^{\pi}\left(e^{-st}\right)'\sin t dt$$

$$=\frac{1}{s}\left(e^{-\pi s}+1\right)+\frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\sin t\right]_0^{\pi}-\frac{1}{s^2}\int_0^{\pi}e^{-st}\cos t dt=\frac{1}{s}\left(e^{-\pi s}+1\right)-\frac{1}{s^2}I.$$

Άρα, $I=\frac{s}{s^2+1}\left(e^{-\pi s}+1\right)$ και, σύμφωνα με την (1), προκύπτει

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{s}{s^2+1}\frac{\left(e^{-\pi s}+1\right)}{1-e^{-2\pi s}}=\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{1-e^{-\pi s}}, \text{ για κάθε } s>0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να αποδειχθεί ότι

$$J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t),$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

ΛΥΣΗ

Είναι

$$J_{-n}(t) \stackrel{1}{=} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i-n}}{2^{2i-n} i!\Gamma(-n+i+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} t^{2(k+n)-n}}{2^{2(k+n)-n} (k+n)!\Gamma(-n+k+n+1)}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+n}}{2^{2k+n} (k+n)!\Gamma(k+1)}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+n}}{2^{2k+n} \Gamma(k+n+1) k!}$$

$$= (-1)^n J_n(t).$$

ΑΣΚΗΣΗ 22

Να αποδειχθεί ότι

$$\left(t^{p+1}J_{p+1}(t)\right)' = t^{p+1}J_p(t),$$

για κάθε $t, p \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Από την παραγώγιση της δυναμοσειράς

$$t^{p+1}J_{p+1}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+2p+2}}{2^{2i+p+1} i!\Gamma(i+p+2)},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\left(t^{p+1}J_{p+1}(t)\right)' &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i 2(i+p+1)t^{2i+2p+1}}{2^{2i+p+1} i!(i+p+1)\Gamma(i+p+1)} \\ &= t^{p+1}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p}}{2^{2i+p} i!\Gamma(i+p+1)} \\ &= t^{p+1}J_p(t).\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να αποδειχθεί ότι $pJ_p(t) - tJ_{p+1}(t) = tJ'_p(t)$, για κάθε $t, p \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Είναι

$$pJ_p(t) - tJ_{p+1}(t) =$$

$$= p\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p}}{2^{2i+p} i!\Gamma(i+p+1)} - t\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p+1}}{2^{2i+p+1} i!\Gamma(i+p+2)}$$

$$= p\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p}}{2^{2i+p} i!\Gamma(i+p+1)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} 2(i+1) t^{2(i+1)+p}}{2^{2(i+1)+p} (i+1)!\Gamma(i+1+p+1)}$$

$$= p\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p}}{2^{2i+p} i!\Gamma(i+p+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2kt^{2k+p}}{2^{2k+p} k!\Gamma(k+p+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (p+2i) t^{2i+p}}{2^{2i+p} i!\Gamma(i+p+1)}$$

$$= t\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \left(t^{2i+p}\right)'}{2^{2i+p} i!\Gamma(i+p+1)}$$

$$= tJ'_p(t).$$

ΑΣΚΗΣΗ 24

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση Bessel p-τάξης είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + \left(t^2 - p^2\right) y(t) = 0.$$

ΛΥΣΗ

Παραγωγίζοντας δύο φορές τη δυναμοσειρά

$$J_p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p}}{2^{2i+p} i! \Gamma(i+p+1)},$$ προκύπτουν οι ισότητες

$$J_p'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i+p) t^{2i+p-1}}{2^{2i+p} i! \Gamma(i+p+1)}$$

$$J_p''(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i+p)(2i+p-1) t^{2i+p-2}}{2^{2i+p} i! \Gamma(i+p+1)},$$ οπότε είναι

$$t^2 J_p''(t) + t J_p'(t) + \left(t^2 - p^2\right) J_p(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p} \left((2i+p)(2i+p-1) + (2i+p) - p^2\right)}{2^{2i+p} i! \Gamma(i+p+1)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p+2}}{2^{2i+p} i! \Gamma(i+p+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p} 4i(i+p)}{2^{2i+p} i! \Gamma(i+p+1)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p+2}}{2^{2i+p} i! \Gamma(i+p+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p}}{2^{2(i-1)+p} (i-1)! \Gamma(i+p)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2k+p+2}}{2^{2i+p} i! \Gamma(k+p+1)}$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+p+2}}{2^{2k+p} k! \Gamma(k+p+1)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+p+2}}{2^{2i+p} i! \Gamma(i+p+1)} = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 28

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\mathcal{L}\left[t^{\frac{p}{2}}J_p\left(2\sqrt{\alpha t}\right)\right]=\frac{\alpha^{\frac{p}{2}}e^{-\frac{\alpha}{s}}}{s^{p+1}}$$

για κάθε $\alpha, s > 0$ και $p > -1$.

ΛΥΣΗ

Επειδή

$$t^{\frac{p}{2}}J_p\left(2\sqrt{\alpha t}\right)=t^{\frac{p}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(2\sqrt{\alpha t}\right)^{2i+p}}{2^{2i+p}i!\Gamma\left(p+i+1\right)}=\alpha^{\frac{p}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\alpha^i t^{i+p}}{i!\Gamma\left(p+i+1\right)},$$

προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[t^{\frac{p}{2}}J_p\left(2\sqrt{\alpha t}\right)\right]=\alpha^{\frac{p}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\alpha^i}{i!\Gamma\left(p+i+1\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(p+i+1\right)}{s^{p+i+1}}$$

$$=\frac{\alpha^{\frac{p}{2}}}{s^{p+1}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\alpha}{s}\right)^i}{i!}$$

$$=\frac{\alpha^{\frac{p}{2}}e^{-\frac{\alpha}{s}}}{s^{p+1}}.$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Αν για μια συνάρτηση $F(s)$ υπάρχει μια άλλη συνάρτηση $f(t)$ τέτοια ώστε $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε η $f(t)$ ονομάζεται **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** για τη συνάρτηση $F(s)$ και σημειώνεται με $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{s})]$, δηλαδή

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t), \text{ αν } \mathcal{L}[f(t)] = F(s).$$

Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει, είναι αν ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι μονοσήμαντα ορισμένος. Με άλλα λόγια, μπορεί να υπάρχουν δύο διαφορετικές συναρτήσεις $f, g / [0, +\infty)$ με $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$;

Η απάντηση είναι θετική, καθώς ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται με ένα ολοκλήρωμα και επομένως δυο οποιεσδήποτε συναρτήσεις που διαφέρουν μόνο σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων θα έχουν ίσους μετασχηματισμούς Laplace.

Αντίθετα, για συνεχείς συναρτήσεις ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.1

Αν για δύο συνεχείς συναρτήσεις $\mathbf{f},\mathbf{g}/[0,+\infty)$ ισχύει ότι $\mathcal{L}[\mathbf{f}(\mathbf{t})]=\mathcal{L}[\mathbf{g}(\mathbf{t})]$ τότε θα είναι $\mathbf{f}(\mathbf{t})=\mathbf{g}(\mathbf{t})$ για κάθε $\mathbf{t}\in[0,+\infty)$.

Παραδείγματα

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]=1$, για $s>0$.

2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-\alpha}\right]=e^{\alpha t}$, για $s>\alpha$.

3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^{n+1}}\right]=\dfrac{t^n}{n!}$, για $s>0$ και $n\in\mathbb{N}^*$.

   Γενικότερα,

   $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^{\alpha+1}}\right]=\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, για $s>0$ και $\alpha>-1$.

4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+\alpha^2}\right]=\cos\alpha t$ και $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right]=\sin\alpha t$, για $s>0$.

5. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-\alpha^2}\right]=\cosh\alpha t$ και $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\right]=\sinh\alpha t$, για $s>|\alpha|$.

Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Οι παρακάτω ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace της δεύτερης παραγράφου, όταν $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\right]=c_1\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)\right]+c_2\mathcal{L}^{-1}\left[F_2(s)\right]$, όταν $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

2. $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-\alpha)\right]=e^{\alpha t}f(t)$.

3. $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\alpha s}F(s)\right]=\begin{cases} f(t-\alpha), & \text{αν } t\geq\alpha \\ 0, & \text{αν } t<\alpha. \end{cases}$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left[F(\alpha s)\right]=\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, για $\alpha>0$.

5. $\mathcal{L}^{-1}\left[sF(s)\right]=f'(t)$, όταν $f(0)=0$.

6. $\mathcal{L}^{-1}\left[s^nF(s)\right]=f^{(n)}(t)$, όταν $f^{(k)}(0)=0$ για κάθε $k=0,1,\ldots,n-1$.

7. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right]=\int_0^t f(u)\,du$.

8. $\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right]=(-1)^n\,t^nf(t)$.

9. $\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{+\infty}F(u)\,du\right]=\frac{f(t)}{t}$, όταν $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\in\mathbb{R}$.

Παραδείγματα

1. Αν $F(s) = \dfrac{s+7}{s^2+6s+13}$, τότε είναι

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+7}{(s+3)^2+4}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right] \qquad (1)$$

Επειδή

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right] = \cos 2t \text{ και } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right] = \sin 2t,$$

από τη δεύτερη ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}\right] = e^{-3t}\cos 2t$$

και

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right] = e^{-3t}\sin 2t.$$

Κατόπιν τούτου, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-3t}(\cos 2t + 2\sin 2t).$$

2.Αν $F(s)=\dfrac{1}{\sqrt{3s+12}}$, τότε είναι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s+4}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)^{-\frac{1}{2}+1}}\right] \tag{2}$$

Επειδή

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{-\frac{1}{2}+1}}\right]=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

από τη δεύτερη ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)^{-\frac{1}{2}+1}}\right]=\frac{e^{-4t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

Άρα τελικά, από τη σχέση (2) θα είναι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{e^{-4t}}{\sqrt{3\pi t}}.$$

3.Αν $F(s)=\dfrac{s}{\left(s^2+9\right)^2}$, τότε είναι

$$\int F(s)\,ds=\int \frac{s}{\left(s^2+9\right)^2}ds=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(s^2+9\right)}{\left(s^2+9\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+9}+c.$$

Επομένως, $F(s)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s^2+9}\right)'$ και, σύμφωνα με την όγδοη ιδιότητα, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^2+9}\right)'\right]$$

$$=-\frac{1}{2}(-1)^1\,t^1\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]$$

$$=\frac{t}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right]=\frac{t}{6}\sin 3t.$$

Μέθοδοι υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Α. Με ανάλυση σε μερικά κλάσματα

Παραδείγματα

1. Αν $F(s)=\dfrac{-s^2+5s+2}{s^2(s+1)}$ τότε, με ανάλυση σε απλά κλάσματα, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{4}{s+1}\right]$$

$$=3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=3+2t-4e^{-t}.$$

2. Αν $F(s)=\dfrac{6s^3-20s^2+24s-21}{(s-2)^2(s^2+1)}$ τότε, με ανάλυση σε απλά κλάσματα, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{2s-3}{s^2+1}\right]$$

$$=4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]+2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]-3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$=4e^{2t}-te^{2t}+2\cos t-3\sin t.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31 (*)

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+\alpha}{s+\beta}\right)\right],\ \text{όπου } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $F(s) = \ln\left(\frac{s+\alpha}{s+\beta}\right)$ τότε είναι

$$F'(s) = \frac{s+\beta}{s+\alpha}\left(\frac{s+\alpha}{s+\beta}\right)' = \frac{\beta-\alpha}{(s+\alpha)(s+\beta)},$$

οπότε, για κάθε $s > \max\{-\alpha,-\beta\}$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\beta-\alpha}{(s+\alpha)(s+\beta)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s+\beta}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\alpha}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\beta}\right] = e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \qquad (1)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την όγδοη ιδιότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = (-1)^1 t^1 \mathcal{L}^{-1}[F(t)] \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\mathcal{L}^{-1}[F(t)] = \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{t}$, για κάθε $s > \max\{-\alpha,-\beta\}$.

B. Με ανάπτυξη της συνάρτησης σε σειρά

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται για συναρτήσεις F οι οποίες μπορούν να αναπτυχθούν σε μια σειρά συναρτήσεων, δηλαδή $F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(s)$, έτσι ώστε να υπάρχουν οι μετασχηματισμοί $\mathcal{L}^{-1}\left[F_n\right]$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\mathcal{L}^{-1}\left[F_n\right]\right|$ να συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[0,\beta]$, όπου $\beta>0$.

Τότε ισχύει ο τύπος

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left[F_n\right],$$

σύμφωνα με τον οποίο υπολογίζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης F.

Παράδειγμα

Αν $F(s)=\dfrac{1}{s\left(1-5e^{-s}+6e^{-2s}\right)}$, όπου $s>0$, τότε τίθεται $x=e^{-s}$ οπότε, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{1-5x+6x^2}=\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}=3\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)x^n.$$

Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)\dfrac{e^{-ns}}{s}$ και επομένως,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ns}}{s}\right] \qquad (1)$$

Επειδή $\mathcal{L}^{-1}[1/s]=1$, από την τρίτη ιδιότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ns}}{s}\right]=\begin{cases}1, & \text{αν } t\geq n\\ 0, & \text{αν } t<n\end{cases}$$

όποτε, από τη σχέση (1), προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\sum_{n=0}^{[t]}\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{[t]}3^{n+1}-\sum_{n=0}^{[t]}2^{n+1}$$

$$=3\frac{3^{[t]+1}-1}{3-1}-2\frac{2^{[t]+1}-1}{2-1}=\frac{1}{2}3^{[t]+2}-2^{[t]+2}+\frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 30 (*)

Να ευρεθούν οι μετασχηματισμοί:

α) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\alpha\beta}{\left(s^2+\alpha^2\right)\left(s^2+\beta^2\right)}\right]$,

β) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{\left(s^2-\alpha^2\right)\left(s^2-\beta^2\right)}\right]$,

γ) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{\left(s^2-\alpha^2\right)\left(s^2-\beta^2\right)}\right]$,

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $|\alpha|\neq|\beta|$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\frac{\alpha\beta}{\left(s^2+\alpha^2\right)\left(s^2+\beta^2\right)}=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{1}{s^2+\beta^2}-\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right)$$

προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha\beta}{\left(s^2+\alpha^2\right)\left(s^2+\beta^2\right)}\right]=$$

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right]-\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right]=\frac{\alpha\sin\beta t-\beta\sin\alpha t}{\alpha^2-\beta^2},$$

για κάθε $s>0$.

β) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2-\alpha^2)(s^2-\beta^2)}\right]$.

Επειδή $\dfrac{s}{(s^2-\alpha^2)(s^2-\beta^2)}=\dfrac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\dfrac{s}{s^2-\alpha^2}-\dfrac{s}{s^2-\beta^2}\right)$

προκύπτει, για κάθε $s>\max\{|\alpha|,|\beta|\}$, ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-\alpha^2)(s^2-\beta^2)}\right]$$
$$=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-\alpha^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-\beta^2}\right]\right)=\frac{\cosh\alpha t-\cosh\beta t}{\alpha^2-\beta^2},$$

γ) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{(s^2-\alpha^2)(s^2-\beta^2)}\right]$.

Επειδή $\dfrac{s^2}{(s^2-\alpha^2)(s^2-\beta^2)}=\dfrac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\dfrac{\alpha^2}{s^2-\alpha^2}-\dfrac{\beta^2}{s^2-\beta^2}\right)$

προκύπτει, για κάθε $s>\max\{|\alpha|,|\beta|\}$, ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2-\alpha^2)(s^2-\beta^2)}\right]$$
$$=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\right]-\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\beta}{s^2-\beta^2}\right]$$
$$=\frac{\alpha\sinh\alpha t-\beta\sinh\beta t}{\alpha^2-\beta^2},$$

ΑΣΚΗΣΗ 32 (*)

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right]$,

και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right]=2\int_0^t\frac{1-\cos u}{u}du.$$

ΛΥΣΗ

Για τη συνάρτηση $F(s)=\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$ είναι

$$F'(s)=\frac{s^2}{1+s^2}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)'=-\frac{2}{s\left(1+s^2\right)},\text{ οπότε}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F'(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{2}{s\left(1+s^2\right)}\right]=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{1+s^2}-\frac{1}{s}\right]$$

$$=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{1+s^2}-\frac{1}{s}\right]=2\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{1+s^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]\right)=2(\cos t-1).$$

Τότε όμως, από την όγδοη ιδιότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=-\frac{\mathcal{L}^{-1}\left[F'(s)\right]}{t}=\frac{2(1-\cos t)}{t}\qquad(1)$$

Τέλος, από την (1) και από την έβδομη ιδιότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right]=2\int_0^t\frac{1-\cos u}{u}du.$$

ΑΣΚΗΣΗ 33 (*)

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\right].$$

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $F(u)=\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}$

τότε θα είναι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(u)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{u}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{u+1}\right]=1-e^{-t}.$$

Επιπλέον, επειδή

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-e^{-t}\right)'}{t'}=\lim_{t\to 0}e^{-t}=1\in\mathbb{R},$$

εφαρμόζεται η ένατη ιδιότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, οπότε έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\right]=\frac{1-e^{-t}}{t}.$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Περιεχόμενα διάλεξης:

Συνέλιξη μετασχηματισμού Laplace

Εφαρμογές μετασχηματισμού Laplace: Επίλυση

- γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων αυτών,
- ολοκληρωτικών εξισώσεων,
- εξισώσεων διαφορών.

ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Αν $f,g/[0,+\infty)$ είναι κατά τμήματα συνεχείς και εκθετικής τάξης α, τότε ορίζεται η συνάρτηση του t

$$(\mathbf{f}*\mathbf{g})(\mathbf{t})=\int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{z})\mathbf{g}(\mathbf{t}-\mathbf{z})\mathbf{dz}.$$

Αποδεικνύεται ότι η συνέλιξη ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $f*g=g*f$. (ii) $f*(g*h)=(f*g)*h$.

(iii)$f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$.

Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση $f*g$ είναι συνεχής και εκθετικής τάξης $\alpha+\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon>0$, προκύπτει ότι θα υπάρχει ο μετασχημ. Laplace αυτής για κάθε $s>\alpha$.

Πρόταση 6.1

Αν $f,g\in L_\alpha$ τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left[(\mathbf{f}*\mathbf{g})(\mathbf{t})\right]=\mathcal{L}\left[\mathbf{f}(\mathbf{t})\right]\mathcal{L}\left[\mathbf{g}(\mathbf{t})\right].$$

Ο τύπος της προηγούμενης πρότασης γράφεται ισοδύναμα, με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, στη μορφή

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{F}(\mathbf{s})\cdot\mathbf{G}(\mathbf{s})\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{F}(\mathbf{s})\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{G}(\mathbf{s})\right]$$

η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

Παραδείγματα

1. Για τη συνάρτηση $H(s)=\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}$ είναι

$H(s)=F(s)\cdot G(s)$, όπου $F(s)=\dfrac{s}{s^2+4}$ και $G(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$,

οπότε προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]\\
&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]\\
&=\cos 2t*\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}\int_0^t \cos 2z\sin 2(t-z)\,dz\\
&=\frac{1}{4}\int_0^t\big(\sin(2(t-z)+2z)+\sin(2(t-z)-2z)\big)dz\\
&=\frac{1}{4}\int_0^t \sin 2t\,dz+\frac{1}{4}\int_0^t \sin(2t-4z)dz\\
&=\frac{t\sin 2t}{4}+\frac{1}{16}\left[\cos(2t-4z)\right]_0^t\\
&=\frac{t\sin 2t}{4}+\frac{1}{16}\left(\cos 2t-\cos 2t\right)\\
&=\frac{t\sin 2t}{4}
\end{aligned}
$$

2. Για τη συνάρτηση $H(s)=\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{1-\frac{1}{2}}}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}*e^{t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^{t}$$

$$=\frac{e^{t}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz$$

$$\overset{z=u^2}{=}\frac{2e^{t}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du$$

$$=e^{t}\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)$$

όπου

$$\mathbf{erf}(\mathbf{x})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du,$$

η γνωστή **συνάρτηση σφάλματος**.

ΑΣΚΗΣΗ 38 (*)

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}\right]$

α) Με ανάλυση του $\dfrac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}$ σε απλά κλάσματα.

β) Με τη βοήθεια της συνέλιξης.

γ) Με τη βοήθεια της έβδομης ιδιότητας του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\dfrac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}=-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{s}{s^2+1}$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$=-1+\frac{t^2}{2}+\cos t.$$

β) Επειδή $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^3}\right]=\dfrac{t^2}{2}$ και $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=\sin t$,

από τη πρόταση 7.1 προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}\right]=\frac{t^2}{2}*\sin t=\int_0^t\frac{z^2}{2}\sin\left(t-z\right)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t z^2\left(\cos(t-z)\right)' dz=\frac{1}{2}\left[z^2\cos(t-z)\right]_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t 2z\cos(t-z)dz$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\int_0^t z\left(\sin(t-z)\right)' dz=\frac{1}{2}t^2+\left[z\sin(t-z)\right]_0^t-\int_0^t \sin(t-z)dz$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\left[\cos(t-z)\right]_0^t=\frac{1}{2}t^2-1+\cos t.$$

γ) Θα εφαρμοσθεί τρεις φορές διαδοχικά ο τύπος

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right]=\int_0^t f(u)du \tag{1}$$

όπου $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$. Επειδή $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\sin t$,

από τον τύπο (1) για $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right]=\int_0^t \sin u du=-\left[\cos u\right]_0^t=1-\cos t$$

Αν εφαρμοσθεί πάλι ο (1) για $F(s)=\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}$, τότε

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}\right]=\int_0^t (1-\cos u)du=\left[u-\sin u\right]_0^t=t-\sin t.$$

Τέλος, ο (1) για $F(s)=\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}$ δίδει

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}\right]=\int_0^t (u-\sin u)du=\left[\frac{u^2}{2}+\cos u\right]_0^t=\frac{t^2}{2}+\cos t-1$$

ΑΣΚΗΣΗ 39 (*)

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{\left(s^2+1\right)^2}\right]$ με τη βοήθεια της συνέλιξης.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+1}\right]=\cos t$, από την πρόταση 7.1 προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{\left(s^2+1\right)^2}\right]=\cos t*\cos t=\int_0^t \cos z\cos(t-z)dz$$

$$=\int_0^t \cos z(\cos t\cos z+\sin t\sin z)dz$$

$$=\cos t\int_0^t \cos^2 zdz+\sin t\int_0^t \cos z\sin zdz$$

$$=\frac{\cos t}{2}\int_0^t (1+\cos 2z)dz+\frac{\sin t}{2}\int_0^t \sin 2zdz$$

$$=\frac{\cos t}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)-\frac{\sin t}{4}(\cos 2t-1)$$

$$=\frac{t\cos t}{2}+\frac{\cos t\sin 2t-\sin t\cos 2t}{4}+\frac{\sin t}{4}$$

$$=\frac{t\cos t}{2}+\frac{\sin(2t-t)}{4}+\frac{\sin t}{4}=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

ΑΣΚΗΣΗ 40 (*)

Να αποδειχθεί ο τύπος $B(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$,

για κάθε $m,n\geq 0$, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace της συνέλιξης.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, θα αποδειχθεί ότι $t^{m+n-1}B(m,n)=t^{m-1}*t^{n-1}$,

για κάθε $t>0$. Πραγματικά,

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \overset{x=z/t}{=} \int_0^t\left(\frac{z}{t}\right)^{m-1}\left(1-\frac{z}{t}\right)^{n-1}d\left(\frac{z}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{t^{m-1}t^{n-1}t}\int_0^t z^{m-1}(t-z)^{n-1}dz=\frac{1}{t^{m+n-1}}\left(t^{m-1}*t^{n-1}\right).$$

Άρα,

$$t^{m+n-1}B(m,n)=t^{m-1}*t^{n-1}.$$

Κατόπιν τούτου, προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις:

$$\mathcal{L}\left[t^{m+n-1}B(m,n)\right]=\mathcal{L}\left[t^{m-1}*t^{n-1}\right]$$
$$B(m,n)\mathcal{L}\left[t^{m+n-1}\right]=\mathcal{L}\left[t^{m-1}\right]\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right]$$
$$B(m,n)\frac{\Gamma(m+n)}{s^{m+n}}=\frac{\Gamma(m)}{s^m}\frac{\Gamma(n)}{s^n}.$$

Άρα τελικά, $B(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Θα εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός Laplace για την επίλυση ορισμένων κατηγοριών συναρτησιακών εξισώσεων. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα:

(i) Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της δοσμένης συναρτησιακής εξίσωσης, οπότε προκύπτει μια συναρτησιακή εξίσωση απλούστερη της αρχικής, με άγνωστο τον μετασχηματισμό Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\left[y(t)\right]$ της άγνωστης συνάρτησης $y(t)$.

(ii) Επιλύουμε την εξίσωση που προέκυψε και ευρίσκουμε τη συνάρτηση $Y(s)$.

(iii) Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, για την εύρεση της άγνωστης συνάρτησης $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]$.

Α. Διαφορικές εξισώσεις

Αρχικά, εφαρμόζεται η μέθοδος για την επίλυση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τάξης n με σταθερούς συντελεστές

$$\alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = g(t),$$

όπου $\alpha_i \in \mathbb{R}$, για $i \in [n]$, η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$y(0) = \beta_0, y'(0) = \beta_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \beta_{n-1}.$$

Πραγματικά, με τη βοήθεια της πρώτης ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha_n \mathcal{L}\left[y^{(n)}\right] + \alpha_{n-1} \mathcal{L}\left[y^{(n-1)}\right] + \cdots + \alpha_1 \mathcal{L}[y'] + \alpha_0 \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[g(t)]$$

η οποία με τη βοήθεια της έκτης ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace και των αρχικών συνθηκών μετατρέπεται σε μια αλγεβρική εξίσωση με μοναδικό άγνωστο την συνάρτηση $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$.

Τέλος, με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, ευρίσκεται η ζητούμενη λύση $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$.

Παράδειγμα

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$y''(t)-2y'(t)+y(t)=-2\cos t$ με $y(0)=0$ και $y'(0)=2$

θέτουμε $Y(s)=\mathcal{L}\left[y(t)\right]$, οπότε, με τη βοήθεια της έκτης ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace, προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\mathcal{L}\left[y''(t)-2y'(t)+y(t)\right]=\mathcal{L}[-2\cos t]$$

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right]-2\mathcal{L}\left[y'(t)\right]+\mathcal{L}\left[y(t)\right]=-2\mathcal{L}[\cos t]$$

$$s^2\mathcal{L}\left[y(t)\right]-sy(0)-y'(0)-2\left(s\mathcal{L}\left[y(t)\right]-y(0)\right)+\mathcal{L}\left[y(t)\right]=-\frac{2s}{s^2+1}$$

$$s^2Y(s)-0\cdot s-2-2\left(sY(s)-0\right)+Y(s)=-\frac{2s}{s^2+1}$$

$$\left(s^2-2s+1\right)Y(s)=-\frac{2s}{s^2+1}+2$$

$$Y(s)=\frac{2\left(s^2-s+1\right)}{(s-1)^2\left(s^2+1\right)},$$

οπότε $Y(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2}+\dfrac{1}{s^2+1}$. Άρα,

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=te^t+\sin t.$$

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace εφαρμόζεται και για την εύρεση της γενικής λύσης της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης τάξης n με σταθερούς συντελεστές. Στην περίπτωση αυτή, όπου δεν δίδονται αρχικές συνθήκες, τίθεται $y^{(i)}(0)=c_i$ για κάθε $i=0,1,\ldots,n-1$ οπότε η γενική λύση της εξίσωσης δίδεται συναρτήσει των παραμέτρων c_i, $i=0,1,\ldots,n-1$.

Παράδειγμα. Για την εύρεση της γενικής λύσης της

$$y''(t)+y'(t)-2y(t)=e^{-t}$$

θέτουμε $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$, $y(0)=c_0$ και $y'(0)=c_1$, οπότε προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\mathcal{L}[y''(t)+y'(t)-2y(t)]=\mathcal{L}[e^{-t}]$$

$$\mathcal{L}[y''(t)]+\mathcal{L}[y'(t)]-2\mathcal{L}[y(t)]=\frac{1}{s+1}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)-2Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$s^2Y(s)-sc_0-c_1+sY(s)-c_0-2Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+s-2)Y(s)=\frac{1}{s+1}+c_0s+c_0+c_1$$

$$Y(s)=\frac{c_0s^2+(2c_0+c_1)s+c_0+c_1+1}{(s+2)(s+1)(s-1)}$$

οπότε $Y(s)=\frac{c_0-c_1+1}{3}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{4c_0+2c_1+1}{6}\frac{1}{s-1}$.

Άρα,

$$y(t)=\frac{c_0-c_1+1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\frac{4c_0+2c_1+1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$=\frac{c_0-c_1+1}{3}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{4c_0+2c_1+1}{6}e^{t}$$

$$=c_0\left(\frac{e^{-2t}+2e^{t}}{3}\right)+c_1\left(\frac{-e^{-2t}+e^{t}}{3}\right)+\frac{e^{-2t}}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{e^{t}}{6}.$$

Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace επιλύονται και γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με πολυωνυμικούς συντελεστές. Στην περίπτωση αυτή, εκτός της έκτης ιδιότητας χρησιμοποιείται και η όγδοη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace.

Επιπλέον, πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση αυτή, η μετασχηματισμένη εξίσωση που προκύπτει δεν είναι αλγεβρική, αλλά γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (Ανάλυση Ι).

Παράδειγμα

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$(t+1)y''(t)-(t+1)y'(t)+2y(t)=6,\ y(0)=2\ ,\ y'(0)=0$$

θέτουμε $Y(s)=\mathcal{L}\left[y(t)\right]$ οπότε, με τη βοήθεια της έκτης και όγδοης ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace, προκύπτουν οι ισότητες:

$$\mathcal{L}\left[y'(t)\right]=sY(s)-y(0)=sY(s)-2$$

$$\mathcal{L}\left[ty'(t)\right]=(-1)^1\left(sY(s)-2\right)'=-sY'(s)-Y(s)$$

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-2s$$

$$\mathcal{L}\left[ty''(t)\right]=(-1)^1\left(s^2Y(s)-2s\right)'=-s^2Y'(s)-2sY(s)+2$$

Κατόπιν τούτων, από τη δοσμένη διαφορική εξίσωση, προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\mathcal{L}\left[ty''(t)\right]+\mathcal{L}\left[y''(t)\right]-\mathcal{L}\left[ty'(t)\right]-\mathcal{L}\left[y'(t)\right]$$
$$+2\mathcal{L}\left[y(t)\right]=\mathcal{L}[6]$$

$$-s^2Y'(s)-2sY(s)+2+s^2Y(s)-2s+sY'(s)+Y(s)-sY(s)+2+2Y(s)=\frac{6}{s}$$

$$\left(-s^2+s\right)Y'(s)+\left(s^2-3s+3\right)Y(s)=\frac{6}{s}+2s-4$$

$$Y'(s)+\frac{s^2-3s+3}{s-s^2}Y(s)=\frac{2s^2-4s+6}{s^2(1-s)}\;(1)$$

Η εξίσωση (1) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση και επιλύεται με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα $I(s)=e^{\int\frac{s^2-3s+3}{s-s^2}ds}=\frac{s^3}{s\text{-}1}e^{-s}$,

οπότε, από την εξίσωση (1), προκύπτει ότι

$$\left(e^{-s}\frac{s^3}{s\text{-}1}Y(s)\right)'=-\frac{\left(2s^2-4s+6\right)s}{(s-1)^2}e^{-s}$$

και

$$e^{-s}\frac{s^3}{s-1}Y(s)=-2\int\frac{(s^2-2s+3)s}{(s-1)^2}e^{-s}ds$$

$$=-2\int\left(s+\frac{2s}{(s-1)^2}\right)e^{-s}ds=-2\int se^{-s}ds-4\int\frac{s}{(s-1)^2}e^{-s}ds$$

$$=-2\int se^{-s}ds-4\int\frac{e^{-s}}{(s-1)^2}ds-4\int\frac{e^{-s}}{s-1}ds$$

$$=2\int s\left(e^{-s}\right)'ds+4\int\left(\frac{1}{s-1}\right)'e^{-s}ds-4\int\frac{e^{-s}}{s-1}ds$$

$$=2se^{-s}-2\int s'e^{-s}ds+4\frac{e^{-s}}{s-1}-4\int\frac{1}{s-1}\left(e^{-s}\right)'ds-4\int\frac{e^{-s}}{s-1}ds+c$$

$$=2se^{-s}+2e^{-s}+4\frac{e^{-s}}{s-1}+4\int\frac{e^{-s}}{s-1}ds-4\int\frac{e^{-s}}{s-1}ds+c$$

$$=\frac{2(s^2+1)e^{-s}}{s-1}+c.$$

Άρα, $Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s}+c\frac{s-1}{s^3}e^{s}$. Επειδή $\lim\limits_{s\to+\infty}Y(s)=0$,

έπεται ότι $\lim\limits_{s\to+\infty}c\frac{s-1}{s^3}e^{s}=\lim\limits_{s\to+\infty}\left(Y(s)-\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s}\right)=0$.

Όμως, $\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{s-1}{s^3}e^{s}=+\infty$, άρα είναι $c=0$.

Επομένως, $Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s}$ και

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[2/s^3\right]+2\mathcal{L}^{-1}\left[1/s\right]=t^2+2.$$

Β. Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Παράδειγμα. Για την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} x(t)-y''(t)+y(t)=e^{-t}-1 \\ x'(t)+y'(t)-y(t)=-3e^{-t}+t \end{cases}$$

με $x(0)=0,\ y(0)=1$ και $y'(0)=-2$, τίθεται

$$X(s)=\mathcal{L}[x(t)] \text{ και } Y(s)=\mathcal{L}[y(t)],$$

οπότε προκύπτει ότι

$$X(s)-s^2Y(s)+sy(0)+y'(0)+Y(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}$$

$$X(s)+(1-s^2)Y(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}-s+2$$

οπότε

$$X(s)+(1-s^2)Y(s)=\frac{-s^3+s^2+2s-1}{s(s+1)} \qquad (1)$$

$$sX(s)-x(0)+sY(s)-y(0)-Y(s)=-\frac{3}{s+1}+\frac{1}{s^2}$$

$$sX(s)+(s-1)Y(s)=-\frac{3}{s+1}+\frac{1}{s^2}+1$$

οπότε

$$sX(s)+(s-1)Y(s)=\frac{s^3-2s^2+s+1}{s^2(s+1)} \qquad (2)$$

Επιλύοντας το αλγεβρικό σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), προκύπτει ότι

$$\mathrm{X}(\mathrm{s})=\frac{1}{\mathrm{s}^2(\mathrm{s}+1)}$$

και

$$\mathrm{Y}(\mathrm{s})=\frac{\mathrm{s}^2-\mathrm{s}-1}{\mathrm{s}^2(\mathrm{s}+1)},$$

οπότε με αντιστροφή προκύπτει τελικά ότι

$$\mathrm{x}(\mathrm{t})=\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{X}(\mathrm{s})]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}^2(\mathrm{s}+1)}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}^2}+\frac{1}{\mathrm{s}+1}-\frac{1}{\mathrm{s}}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}+1}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$$

$$=\mathrm{t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}-1$$

και

$$\mathrm{y}(\mathrm{t})=\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{Y}(\mathrm{s})]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{s}^2-\mathrm{s}-1}{\mathrm{s}^2(\mathrm{s}+1)}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}+1}-\frac{1}{\mathrm{s}^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}+1}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}-\mathrm{t}.$$

Γ. Ολοκληρωτικές και ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace εφαρμόζεται και για την επίλυση ορισμένων μορφών **ολοκληρωτικών** και **ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων**.

(i) **Η εξίσωση του Volterra**

Γενική μορφή:

$$\mathbf{y(t) = f(t) + \int_0^t g(t-z)\,y(z)\,dz},$$

όπου f, g είναι δοσμένες συναρτήσεις και y είναι η άγνωστη συνάρτηση. Για την επίλυση των εξισώσεων αυτής της μορφής, τίθεται

$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ και $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$,

οπότε προκύπτει ότι

$$y(t) = f(t) + (g * y)(t)$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[(g * y)(t)]$$

$$Y(s) = F(s) + G(s)Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - G(s)}$$

και τελικά, $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{1 - G(s)}\right].$$

Παράδειγμα. Για την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = \cos t + \int_0^t e^{t-z} y(z)\,dz$$

είναι

$$y(t) = \cos t + \left(e^t * y(t)\right)$$

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right] = \mathcal{L}[\cos t] + \mathcal{L}\left[\left(e^t * y(t)\right)\right]$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s-1} Y(s)$$

$$\left(1 - \frac{1}{s-1}\right) Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s(s-1)}{(s-2)\left(s^2+1\right)},$$

οπότε

$$Y(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{s-2} + \frac{3s+1}{s^2+1}\right).$$

Άρα,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(2e^{2t} + 3\cos t + \sin t\right).$$

(ii) **Η εξίσωση του Abel**

Γενική μορφή:

$$\int_0^t \frac{y(z)}{(t-z)^{\alpha}}dz = g(t),$$

όπου g είναι δοσμένη συνάρτηση και $\alpha \in (0,1)$.

Για την επίλυση των εξισώσεων αυτής της μορφής, τίθεται $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$, $G(s)=\mathcal{L}[g(t)]$ και $H(s)=\mathcal{L}[t^{-\alpha}]$, οπότε προκύπτει ότι

$$y(t)*t^{-\alpha}=g(t)$$

$$\mathcal{L}\left[y(t)*t^{-\alpha}\right]=\mathcal{L}[g(t)]$$

$$Y(s)H(s)=G(s)$$

$$Y(s)=G(s)\frac{s^{-\alpha+1}}{\Gamma(-\alpha+1)}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{s^{-\alpha+1}}{\Gamma(-\alpha+1)}\right].$$

Παράδειγμα

Για την ολοκληρωτική εξίσωση $\int_0^t \frac{y(z)}{\sqrt{t-z}}dz = 1+t$ είναι

$$y(t)*t^{-\frac{1}{2}} = t+1 \qquad \mathcal{L}\left[y(t)*t^{-\frac{1}{2}}\right] = \mathcal{L}[t+1]$$

$$\frac{Y(s)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{s^2}+\frac{1}{s},$$

οπότε $$Y(s) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Άρα,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}+\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{2t+1}{\sqrt{t}}.$$

Για την επίλυση των ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων, χρησιμοποιείται η έκτη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace και η πρόταση 6.1 της συνέλιξης.

Παράδειγμα. Για την επίλυση της εξίσωσης

$$y''(t)+\int_0^t y(t-z)\cos z dz=\sin t-3\cos t+93e^{3t}$$

με $y(0)=10$ και $y'(0)=30$, τίθεται $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$, οπότε προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[y''(t)]+\mathcal{L}[y(t)*\cos t]=\mathcal{L}[\sin t]-3\mathcal{L}[\cos t]+93\mathcal{L}[e^{3t}]$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1}-\frac{3s}{s^2+1}+\frac{93}{s-3}$$

$$\left(s^2+\frac{s}{s^2+1}\right)Y(s)=\frac{(1-3s)(s-3)+93(s^2+1)+10(s+3)(s-3)(s^2+1)}{(s-3)(s^2+1)}$$

$$\frac{s^4+s^2+s}{s^2+1}Y(s)=\frac{10(s^4+s^2+s)}{(s-3)(s^2+1)},$$

οπότε $Y(s)=\dfrac{10}{s-3}$. Άρα τελικά, είναι

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]=10e^{3t}.$$

Δ. Εξισώσεις διαφορών και διαφοροδιαφορικές εξισώσεις

Μια συναρτησιακή εξίσωση στην οποία εμφανίζονται η ανεξάρτητη μεταβλητή t, η άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ και ορισμένες διαφορές της, $\Delta y(t), \Delta^2 y(t), \ldots, \Delta^n y(t)$ ονομάζεται **εξίσωση διαφορών τάξης n.**

Παράδειγμα

$$\Delta^3 y(t) - 2\Delta^2 y(t) + 5\Delta y(t) + 7y(t) = 3\cos t.$$

Αν εφαρμοσθεί ο γνωστός τύπος

$$\Delta^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(t+n-k)$$

τότε κάθε εξίσωση διαφορών τάξης n μετατρέπεται ισοδύναμα στη μορφή

$$F\big(y(t), y(t+1), \ldots, y(t+n)\big) = g(t),$$

Όπου F είναι μια συνάρτηση $n+1$μεταβλητών.

Έτσι, αν τεθεί

$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t),$

$\Delta^2 y(t) = y(t+2) - 2y(t+1) + y(t),$

$\Delta^3 y(t) = y(t+3) - 3y(t+2) + 3y(t+1) - y(t)$

στην εξίσωση του παραδείγματος τότε αυτή γράφεται ισοδύναμα στις παρακάτω μορφές:

$$y(t+3)-5y(t+2)+12y(t+1)-y(t)=3\cos t$$
$$y(t)-5y(t-1)+12y(t-2)-y(t-3)=3\cos(t-3)$$

Αν, επιπλέον των διαφορών, εμφανίζονται σε μια συναρτησιακή εξίσωση ορισμένες παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης, τότε αυτή ονομάζεται **διαφοροδιαφορική εξίσωση.**

Οι διαφοροδιαφορικές εξισώσεις αντιμετωπίζονται ανάλογα με τις εξισώσεις διαφορών.

Έτσι, η διαφοροδιαφορική εξίσωση

$$y'(t)+3\Delta^2 y(t)-4\Delta y(t)+2y(t)=e^{-t}$$

γράφεται ισοδύναμα στις μορφές:

$$y'(t)+3y(t+2)-10y(t+1)+9y(t)=e^{-t},$$

$$y'(t-2)+3y(t)-10y(t-1)+9y(t-2)=e^{-t+2}$$

Κατόπιν τούτων, οι εξισώσεις διαφορών και οι διαφοροδιαφορικές εξισώσεις θα θεωρούνται στις παραπάνω ισοδύναμες μορφές τους, αφού σ’ αυτές δεν περιέχεται ο τελεστής Δ και είναι ευκολότερη η επίλυσή τους.

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace εφαρμόζεται και για την επίλυση των εξισώσεων διαφορών και των διαφοροδιαφορικών εξισώσεων.

Στην περίπτωση αυτή, συνήθως θεωρείται ότι η άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ μηδενίζεται για $t<0$ και, σύμφωνα με την τρίτη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left[y(t-\alpha)\right]=e^{-\alpha s}\mathcal{L}\left[y(t)\right], \text{ όπου } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Παραδείγματα

1. Για την εξίσωση διαφορών

$$3y(t)-5y(t-1)+2y(t-2)=f(t), \text{ όπου}$$

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{αν } t<0\\ t^2, & \text{αν } t\geq 0\end{cases}$$

και $y(t)=0$ για κάθε $t<0$, αν τεθεί $Y(s)=\mathcal{L}\left[y(t)\right]$ προκύπτει ότι

$$3\mathcal{L}\left[y(t)\right]-5\mathcal{L}\left[y(t-1)\right]+2\mathcal{L}\left[y(t-2)\right]=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$3Y(s)-5e^{-s}Y(s)+2e^{-2s}Y(s)\overset{*}{=}\frac{2}{s^3}, \text{ οπότε}$$

* Σύμφωνα με την τρίτη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace

$$Y(s)=\frac{2}{s^3\left(3-5e^{-s}+2e^{-2s}\right)}=\frac{2}{s^3\left(1-e^{-s}\right)\left(3-2e^{-s}\right)}$$

$$=\frac{2}{s^3}\left(\frac{1}{1-e^{-s}}-\frac{2}{3-2e^{-s}}\right)=\frac{2}{s^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-s})^n-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}e^{-s}\right)^n\right).$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-sn}}{s^3}\right]-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-sn}}{s^3}\right]\right)$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-sn}}{s^3}\right].$$

Επειδή $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]=\frac{t^2}{2}$, από την τρίτη ιδιότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-sn}}{s^3}\right]=\begin{cases}\dfrac{(t-n)^2}{2}, & \text{αν } t\geq n\\ 0, & \text{αν } t<n\end{cases}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, οπότε τελικά, είναι

$$y(t)=\sum_{n=0}^{[t]}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)(t-n)^2.$$

2. Για τη διαφοροδιαφορική εξίσωση

$y'(t)-y(t-1)=t$, με $y(t)=0$ για κάθε $t\le 0$

αν τεθεί $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$ προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[y'(t)]-\mathcal{L}[y(t-1)]=\mathcal{L}[t]$$

$$sY(s)-y(0)-e^{-s}Y(s)=\frac{1}{s^2}.$$

Άρα,

$$Y(s)=\frac{1}{s^3}\frac{1}{1-\frac{e^{-s}}{s}}=\frac{1}{s^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right)^n.$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-sn}}{s^{n+3}}\right]=\sum_{n=0}^{[t]}\frac{(t-n)^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Τέλος, σημειώνεται ότι με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να ευρεθεί ο τύπος ορισμένων ακολουθιών που δίδονται σε αναδρομική μορφή.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 41 (*)

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι διαφορικές εξισώσεις:

α) $y'' + 2y' - 3y = -2\sin t + 6\cos t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

β) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10\cos t,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

ΛΥΣΗ

α) Από τη δοσμένη διαφορική εξίσωση προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\mathcal{L}\left[y''(t) + 2y'(t) - 3y(t)\right] = \mathcal{L}[-2\sin t + 6\cos t]$$

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right] + 2\mathcal{L}\left[y'(t)\right] - 3\mathcal{L}\left[y(t)\right] = -2\mathcal{L}[\sin t] + 6\mathcal{L}[\cos t]$$

$$s^2\mathcal{L}\left[y(t)\right] - sy(0) - y'(0) + 2s\mathcal{L}\left[y(t)\right] - 2y(0) - 3\mathcal{L}\left[y(t)\right]$$

$$= -\frac{2}{s^2+1} + \frac{6s}{s^2+1}$$

$$\left(s^2 + 2s - 3\right)\mathcal{L}\left[y(t)\right] - 2 = \frac{6s-2}{s^2+1}$$

$$(s-1)(s+3)\mathcal{L}\left[y(t)\right] = \frac{2s(s+3)}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right] = \frac{2s}{(s-1)\left(s^2+1\right)}, \qquad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s-1)\left(s^2+1\right)}\right]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$y(t)=e^{t}+\sin t-\cos t.$$

β) $y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t,\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

Από τη δοσμένη διαφορική εξίσωση προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\mathcal{L}[y''']+\mathcal{L}[4y'']+\mathcal{L}[5y']+\mathcal{L}[2y]=10\mathcal{L}[\cos t]$$

$$s^{3}\mathcal{L}[y(t)]-s^{2}y(0)-sy'(0)-y''(0)+4s^{2}\mathcal{L}[y(t)]-4sy(0)-4y'(0)$$
$$+5s\mathcal{L}[y(t)]-5y(0)+2\mathcal{L}[y(t)]=\frac{10s}{s^{2}+1}$$

$$\left(s^{3}+4s^{2}+5s+2\right)\mathcal{L}\left[y(t)\right]=\frac{10s}{s^{2}+1}$$

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right]=\frac{10s}{(s+2)(s+1)^{2}\left(s^{2}+1\right)}$$

$$y(t)=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s+1}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{(s+1)^{2}}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2-s}{s^{2}+1}\right]$$

$$y(t)=-4e^{-2t}+5e^{-t}-5te^{-t}+2\sin t-\cos t.$$

ΑΣΚΗΣΗ 43 (*)

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι διαφορικές εξισώσεις:

α) $ty'' + (3t+1)y' + 3y = 0$, με $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$,

β) $ty'' + y' + ty = 0$, με $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

ΛΥΣΗ

α) Για τη δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι

$$\mathcal{L}[ty''(t)] + 3\mathcal{L}[ty'(t)] + \mathcal{L}[y'(t)] + 3\mathcal{L}[y(t)] = 0 \qquad (1)$$

Αν τεθεί $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ τότε, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) = s^2Y(s) - s + 3$$

$$\mathcal{L}[ty''(t)] = -\left(s^2Y(s) - s + 3\right)' = -s^2Y'(s) - 2sY(s) + 1$$

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}[ty'(t)] = -\left(sY(s) - 1\right)' = -sY'(s) - Y(s),$$

οπότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$-s^2Y'(s) - 2sY(s) + 1 - 3sY'(s) - 3Y(s) + sY(s) - 1 + 3Y(s) = 0$$

$$\left(s^2+3s\right)Y'(s)+sY(s)=0 \qquad (2)$$

Η διαφορική εξίσωση (2) είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται κατά τα γνωστά:

$$\frac{dY(s)}{ds}=-\frac{Y(s)}{s+3}$$

$$\int\frac{dY(s)}{Y(s)}=-\int\frac{ds}{s+3} \qquad (\text{όταν } Y(s)\neq 0).$$

$$\ln|Y(s)|=\ln|s+3|^{-1}+\ln k \qquad (\text{όπου } k>0)$$

$$Y(s)=\pm k\frac{1}{s+3}.$$

Τελικά, επειδή η συνάρτηση $Y(s)=0$ επαληθεύει την (2), μπορεί να περιληφθεί στη γενική λύση της. Έτσι, η γενική λύση της (2) είναι η

$$Y(s)=\frac{c}{s+3},\ c\in\mathbb{R}.$$

Άρα,

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=c\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=ce^{-3t}.$$

Τέλος, επειδή $y(0)=1$ προκύπτει ότι $c=1$ και άρα,

$$y(t)=e^{-3t}.$$

β) $ty'' + y' + ty = 0,$ με $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Για τη δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι

$$\mathcal{L}\left[ty''(t)\right] + \mathcal{L}\left[y'(t)\right] + \mathcal{L}\left[ty(t)\right] = 0 \qquad (3)$$

Αν τεθεί $Y(s) = \mathcal{L}\left[y(t)\right]$ τότε, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχημ. Laplace, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right] = s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) = s^2Y(s) - s$$

$$\mathcal{L}[ty''(t)] = -(s^2Y(s) - s)' = -s^2Y'(s) - 2sY(s) + 1$$

$$\mathcal{L}\left[y'(t)\right] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\left[ty(t)\right] = -Y'(s)$$

οπότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$-s^2Y'(s) - 2sY(s) + 1 + sY(s) - 1 - Y'(s) = 0$$

$$\left(s^2 + 1\right)Y'(s) + sY(s) = 0 \qquad (4)$$

Η διαφορική εξίσωση (3) είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται κατά τα γνωστά:

$$\frac{dY(s)}{ds} = -\frac{sY(s)}{s^2+1}$$

$$\int \frac{dY(s)}{dY} = -\int \frac{s}{s^2+1} ds \text{ (όταν } Y(s) \neq 0).$$

$$\ln|Y(s)| = -\ln\sqrt{s^2+1} + \ln k \text{ (όπου } k > 0)$$

$$Y(s) = \pm k \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Τέλος, επειδή η συνάρτηση $Y(s) = 0$ επαληθεύει την εξίσωση (4) μπορεί να περιληφθεί στη γενική λύση της. Έτσι, η γενική λύση της εξίσωσης (4) είναι η

$$Y(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}},\ c \in \mathbb{R}.$$

Άρα,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = c\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right] = cJ_0(t)$$ Τέλος,

επειδή $y(0) = 1$ προκύπτει ότι $c = 1$ και

$$y(t) = J_0(t).$$

ΑΣΚΗΣΗ 45 (*)

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι εξισώσεις:

α) $y(t) = -\sinh t + \int_0^t \sin(t-z)\, y(z)\, dz$,

β) $\int_0^t \frac{y(z)}{(t-z)^{1-\alpha}} = t^{\alpha}$, όπου $0 < \alpha < 1$,

γ) $\int_0^t y'(z)\, y(t-z)\, dz = 24t^3$, όταν $y(0) = 0$.

ΛΥΣΗ

α) Από τη δοσμένη ολοκληρωτική εξίσωση, για $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ προκύπτει ότι

$$y(t) = -\sinh t + (\sin t * y(t))$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = -\mathcal{L}[\sinh t] + \mathcal{L}[\sin t * y(t)]$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = -\mathcal{L}[\sinh t] + \mathcal{L}[\sin t]\mathcal{L}[y(t)]$$

$$Y(s) = \frac{1}{1-s^2} + \frac{1}{1+s^2} Y(s),\ Y(s) = \frac{1+s^2}{s^2(1-s^2)}$$

$$,\ Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s},$$

οπότε,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s}\right] = t - e^{t} + e^{-t}.$$

β) $$\int_0^t \frac{y(z)}{(t-z)^{1-\alpha}} = t^\alpha, \text{ όπου } 0<\alpha<1.$$

Από τη δοσμένη ολοκληρωτική εξίσωση, για $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$ προκύπτει ότι

$$y(t)*t^{\alpha-1}=t^\alpha, \qquad \mathcal{L}\left[y(t)*t^{\alpha-1}\right]=\mathcal{L}\left[t^\alpha\right]$$

$$\mathcal{L}[y(t)]\mathcal{L}\left[t^{\alpha-1}\right]=\mathcal{L}\left[t^\alpha\right], \qquad Y(s)\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

$$Y(s)=\frac{\alpha}{s}, \quad \text{αφού } \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha). \text{ Άρα,}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{s}\right]=\alpha.$$

γ) $$\int_0^t y'(z)y(t-z)dz=24t^3, \text{ όταν } y(0)=0.$$

Από τη δοσμένη ολοκληρωτική εξίσωση, για $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$ προκύπτει ότι

$$y'(t)*y(t)=24t^3, \qquad \mathcal{L}[y'(t)*y(t)]=24\mathcal{L}\left[t^3\right]$$

$$\mathcal{L}[y'(t)]\mathcal{L}[y(t)]=24\frac{3!}{s^4},\ sY^2(s)=\frac{144}{s^4},\ Y(s)=\pm\frac{12}{s^{\frac{5}{2}}},$$

οπότε

$$y(t)=\pm12\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}}\right]=\pm12\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\pm\frac{12t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=\pm\frac{16}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 46

Να λυθούν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, οι εξισώσεις:

α) $y(t)-3y(t-1)+2y(t-2)=1$, με $y(t)=0$ για κάθε $t<0$,

β) $y''(t)-y(t-1)=g(t)$, με $y(t)=0$ για κάθε $t\le 0$ και $y'(0)=0$, όπου $g(t)=\begin{cases}0, & \text{αν } t<0\\ 2t, & \text{αν } t\ge 0.\end{cases}$

ΛΥΣΗ

α) Αν τεθεί $Y(s)=\mathcal{L}\left[y(t)\right]$, από τη δοσμένη εξίσωση διαφορών προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right]-3\mathcal{L}\left[y(t-1)\right]+2\mathcal{L}\left[y(t-2)\right]=\mathcal{L}[1]$$

$$Y(s)-3e^{-s}Y(s)+2e^{-2s}Y(s)\overset{1}{=}\frac{1}{s}.$$

Άρα,

$$Y(s)=\frac{1}{s\left(1-3e^{-s}+2e^{-2s}\right)}=\frac{1}{s}\left(\frac{2}{1-2e^{-s}}-\frac{1}{1-e^{-s}}\right)$$

$$=\frac{1}{s}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\left(2e^{-s}\right)^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-s}\right)^{n}\right)=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)e^{-ns}.$$

Κατόπιν τούτων, θα είναι

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ns}}{s}\right].$$

Από την $3^{η}$ ιδιότητα του αντ. μετ. Laplace προκύπτει

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ns}}{s}\right]=\begin{cases}1, & \text{αν } t\geq n\\ 0, & \text{αν } t<n\end{cases}$$, οπότε, τελικά, θα είναι

$$y(t)=\sum_{n=0}^{[t]}\left(2^{n+1}-1\right)=\sum_{n=0}^{[t]}2^{n+1}-\sum_{n=0}^{[t]}1=2\left(2^{[t]+1}-1\right)-\left([t]+1\right)$$
$$=2^{[t]+2}-[t]-3.$$

β) Αν τεθεί $Y(s)=\mathcal{L}\left[y(t)\right]$, από τη δοσμένη διαφοροδιαφορική εξίσωση προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right]-\mathcal{L}\left[y(t-1)\right]=\mathcal{L}\left[g(t)\right]$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-e^{-s}Y(s)=\frac{2}{s^2} \qquad \left(s^2-e^{-s}\right)Y(s)=\frac{2}{s^2}$$

και επομένως,

$$Y(s)=\frac{2}{s^2\left(s^2-e^{s}\right)}=\frac{2}{s^4}\frac{1}{1-\dfrac{e^{-s}}{s^2}}=\frac{2}{s^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-s}}{s^2}\right)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-ns}}{s^{2n+4}}.$$

Κατόπιν τούτων, $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=2\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-ns}}{s^{2n+4}}\right]$.

Επειδή $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^{2n+4}}\right]=\dfrac{t^{2n+3}}{(2n+3)!}$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ns}}{s^{2n+4}}\right]=\begin{cases}\dfrac{(t-n)^{2n+3}}{(2n+3)!}, & \text{αν } t\geq n\\ 0, & \text{αν } t<n\end{cases}$$

οπότε τελικά, θα είναι $y(t)=2\sum_{n=0}^{[t]}\dfrac{(t-n)^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

ΑΣΚΗΣΗ 47 (Θ)

Στη στοχαστική διαδικασία του Poisson ισχύουν οι εξισώσεις $P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$ και $P_n'(t) = \lambda\big(P_{n-1}(t) - P_n(t)\big)$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $\lambda > 0$ και $P_n(t)$ είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν n ενδεχόμενα σε χρονικό διάστημα t. Να αποδειχθεί ότι $P_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ΛΥΣΗ

Η πρώτη εξίσωση είναι διαφορική πρώτης τάξης και δίδει

$$\mathcal{L}\left[P_0'(t)\right] = \mathcal{L}\left[-\lambda P_0(t)\right], \quad s\mathcal{L}\left[P_0(t)\right] - P_0(0) = -\lambda\mathcal{L}\left[P_0(t)\right],$$

$\mathcal{L}\left[P_0(t)\right] = \dfrac{1}{s+\lambda}$, αφού $P_0(0) = 1$. Άρα, $P_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+\lambda}\right] = e^{-\lambda t}$.

Η δεύτερη εξίσωση, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ δίδει

$$\mathcal{L}\left[P_n'(t)\right] = \lambda\Big(\mathcal{L}\left[P_{n-1}(t)\right] - \mathcal{L}\left[P_n(t)\right]\Big),$$

$$s\mathcal{L}\left[P_n(t)\right] - P_n(0) = \lambda\mathcal{L}\left[P_{n-1}(t)\right] - \lambda\mathcal{L}\left[P_n(t)\right],$$

$\dfrac{\mathcal{L}\left[P_n(t)\right]}{\mathcal{L}\left[P_{n-1}(t)\right]} = \dfrac{\lambda}{s+\lambda}$, αφού $P_n(0) = 0$. Η $\Big(\mathcal{L}\left[P_n(t)\right]\Big)$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda/(s+\lambda)$. Άρα,

$\mathcal{L}\left[P_n(t)\right] = \dfrac{1}{s+\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n = \dfrac{\lambda^n}{(s+\lambda)^{n+1}}$. Έτσι, ισχύει ότι

$$P_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^{n+1}}\right] = \lambda^n\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\lambda)^{n+1}}\right] \overset{1}{=} \lambda^n \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 48

Να ευρεθεί ο τύπος της ακολουθίας $\left(\alpha_n\right)$, όταν

$$\alpha_{n+2} = 4\alpha_{n+1} - 3\alpha_n,\ \ \alpha_0 = 3,\ \alpha_1 = 5.$$

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $y(t) = \alpha_n$ για κάθε $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε από την αναδρομική σχέση της $\left(\alpha_n\right)$ προκύπτει ότι

$$y(t+2) - 4y(t+1) + 3y(t) = 0 \qquad (1)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left[y(t+2)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} y(t+2)\,dt \overset{1}{=} \int_2^{+\infty} e^{-s(u-2)} y(u)\,du$$

$$= e^{2s}\left(\int_0^{+\infty} e^{-su} y(u)\,du - \int_0^{1} e^{-su} y(u)\,du - \int_1^{2} e^{-su} y(u)\,du\right)$$

$$= e^{2s}\mathcal{L}\left[y(t)\right] - \frac{e^{2s}\alpha_0}{s}\left[-e^{-su}\right]_0^1 - \frac{e^{2s}\alpha_1}{s}\left[-e^{-su}\right]_1^2$$

$$= e^{2s}\mathcal{L}\left[y(t)\right] - \frac{e^{2s}}{s}\left(3 + 2e^{-s} - 5e^{-2s}\right) \qquad (2)$$

Ανάλογα, ευρίσκεται ότι

$$\mathcal{L}\left[y(t+1)\right] = e^{s}\mathcal{L}\left[y(t)\right] - \frac{3e^{s}}{s}\left(1 - e^{-s}\right) \qquad (3)$$

Αν τεθεί $Y(s) = \mathcal{L}\left[y(t)\right]$, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[y(t+2)\right]-4\mathcal{L}\left[y(t+1)\right]+3\mathcal{L}\left[y(t)\right]=0$$

$$e^{2s}Y(s)-\frac{e^{2s}}{s}\left(3+2e^{-s}-5e^{-2s}\right)-4\left(e^{s}Y(s)-\frac{3e^{s}}{s}\left(1-e^{-s}\right)\right)+3Y(s)=0$$

$$e^{2s}\left(1-4e^{-s}+3e^{-2s}\right)Y(s)=\frac{e^{2s}}{s}\left(3+2e^{-s}-5e^{-2s}\right)-\frac{12e^{s}}{s}\left(1-e^{-s}\right)$$

$$e^{2s}\left(1-e^{-s}\right)\left(1-3e^{-s}\right)Y(s)=\frac{e^{2s}}{s}\left(1-e^{-s}\right)\left(5e^{-s}+3\right)-\frac{12e^{s}}{s}\left(1-e^{-s}\right)$$

οπότε

$$Y(s)=\frac{3-7e^{-s}}{s\left(1-3e^{-s}\right)}=\frac{7}{3s}+\frac{2}{3s\left(1-3e^{-s}\right)}=\frac{7}{3s}+\frac{2}{3s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3e^{-s}\right)^{n}$$

Άρα,

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\frac{7}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}3^{n}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ns}}{s}\right]$$

$$=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{[t]}3^{n}=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\frac{3^{[t]+1}-1}{3-1}=2+3^{[t]},$$

για κάθε $t\in\left[0,+\infty\right)$. Άρα,

$$\alpha_n=y(n)=3^{n}+2,\ \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}^{*}.$$