ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11:
ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε ακολουθίες και σειρές των οποίων οι όροι είναι συναρτήσεις και όχι αριθμοί. Θα δοθεί έμφαση σε μια ειδική κατηγορία σειρών, τις δυναμοσειρές, οι οποίες αποτελούν γενίκευση των πολυωνύμων. Με τη βοήθεια των δυναμοσειρών ορίζονται οι γεννήτριες συναρτήσεις, οι οποίες αποτελούν βασικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων των Διακριτών Μαθηματικών.

Προαπαιτούμενες γνώσεις από την Ανάλυση Ι: ακολουθίες και σειρές αριθμών, συνέχεια, παράγωγος και ολοκλήρωμα συναρτήσεων. Ειδικά χρήσιμο είναι το παρακάτω τυπολόγιο των σειρών Maclaurin:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad x\in(-1,1),$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \quad x\in\mathbb{R}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, \qquad x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^r=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n, \qquad x\in(-1,1), r\in\mathbb{R}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \text{ και } \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, x\in\mathbb{R}$$

$$\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \text{ και } \cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}, x\in\mathbb{R}$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Περιεχόμενα διάλεξης:

- Ορισμός ακολουθίας συναρτήσεων και σειράς συναρτήσεων
- Σύγκλιση
- Ομοιόμορφη σύγκλιση
- Κριτήριο Weierstrass

1. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΚΑΙ ΣΕΙΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μια ακολουθία (f_n) (αντ. σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$) συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται ότι **συγκλίνει κατά σημείο** (ή απλά **συγκλίνει**) προς μια συνάρτηση f / A όταν

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ (αντ. } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))$$

για κάθε $x \in A$. Στην περίπτωση αυτή, σημειώνεται

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ ή } f_n \to f \text{ (αντ. } f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n).$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα κατά πόσον ορισμένες ιδιότητες που ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις f_n μεταφέρονται στη συνάρτηση $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ (αντ. $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$).

Σημαντικές τέτοιες ιδιότητες είναι η συνέχεια, η ολοκληρωσιμότητα και η παραγωγισιμότητα.

Άλλο ένα σχετικό ερώτημα είναι αν γενικά σε μια μαθηματική έκφραση επιτρέπεται η εναλλαγή των συμβόλων του ορίου (αντ. της σειράς) και του ολοκληρώματος ή της παραγώγου.

Η απάντηση σ' όλα αυτά τα ερωτήματα είναι αρνητική, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα

Παραδείγματα

1. Αν $f_n(x) = x^n / [0,1]$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

(διότι $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, όταν $|a|<1$).

Προφανώς, οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς, ενώ η συνάρτηση όριο δεν είναι συνεχής στο 1.

2. Αν $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n} / \mathbb{R}$ τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{αν } x \ne 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

(θέτοντας $a = \dfrac{1}{1+x^2}$ και εφαρμόζοντας το γνωστό τύπο της γεωμετρικής σειράς: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$, όταν $|a|<1$).

Προφανώς, οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς ως ρητές, ενώ το (άπειρο) άθροισμά τους δεν είναι συνεχής συνάρτηση στο 0.

3. Αν $f_n / [0,1]$ με $$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & \text{αν } 0\le x<\dfrac{1}{2n} \\ n-n^2x, & \text{αν } \dfrac{1}{2n}\le x<\dfrac{1}{n} \\ 0, & \text{αν } \dfrac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, για κάθε $x\in[0,1]$.

Πράγματι, αν $x=0$, τότε $f_n(0)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, ενώ αν $x>0$ τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}^*$ με $\dfrac{1}{n_0}<x$, οπότε $f_n(x)=0$ για κάθε $n\ge n_0$.

Εξάλλου, οι f_n είναι συνεχείς για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, αφού

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2n}\right)^-} f_n(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2n}\right)^-} n^2x=\frac{n}{2}=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2n}\right)^+}\left(n-n^2x\right)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2n}\right)^+} f_n(x)$$

$$\text{και } \lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-} f_n(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^-}\left(n-n^2x\right)=0=\lim_{x\to\left(\frac{1}{n}\right)^+} f_n(x).$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2n}} n^2x\,dx+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}\left(n-n^2x\right)dx$$

$$=n^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2n}}+\left[nx-\frac{n^2x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{4},\quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}^*.$$

Κάτοπιν τούτων,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=0\ne\frac{1}{4}=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

4. Αν $f_n(x)=\dfrac{\sin n^2x}{n}/\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$,[1] για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον, οι συναρτήσεις f_n είναι παραγωγίσιμες με $f_n'(x)=n\cos n^2x$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και $x\in\mathbb{R}$.

Κατόπιν τούτων, η ισότητα

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

δεν αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n\cos n^2x$ δεν υπάρχει πάντα[2] στο $\mathbb{R}$.

Ετσι, προκειμένου να αποφεύγονται οι προηγούμενες προβληματικές καταστάσεις πρέπει να ορισθεί μια ισχυρότερη έννοια σύγκλισης.

Από τον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης έπεται ότι αν $f_n\to f$ τότε για κάθε $\varepsilon>0$ και $x\in A$ να υπάρχει[3] $n_0=n_0(\varepsilon,x)\in\mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, για κάθε $n\ge n_0$. Αν απαιτήσουμε το n_0 να εξαρτάται μόνο από το ε και όχι από το x, τότε προκύπτει η παρακάτω μορφή σύγκλισης.

---

[1] Αφού $|f_n(x)|\le\dfrac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και $x\in\mathbb{R}$.

[2] Για παράδειγμα αν $x=0$ το όριο απειρίζεται.

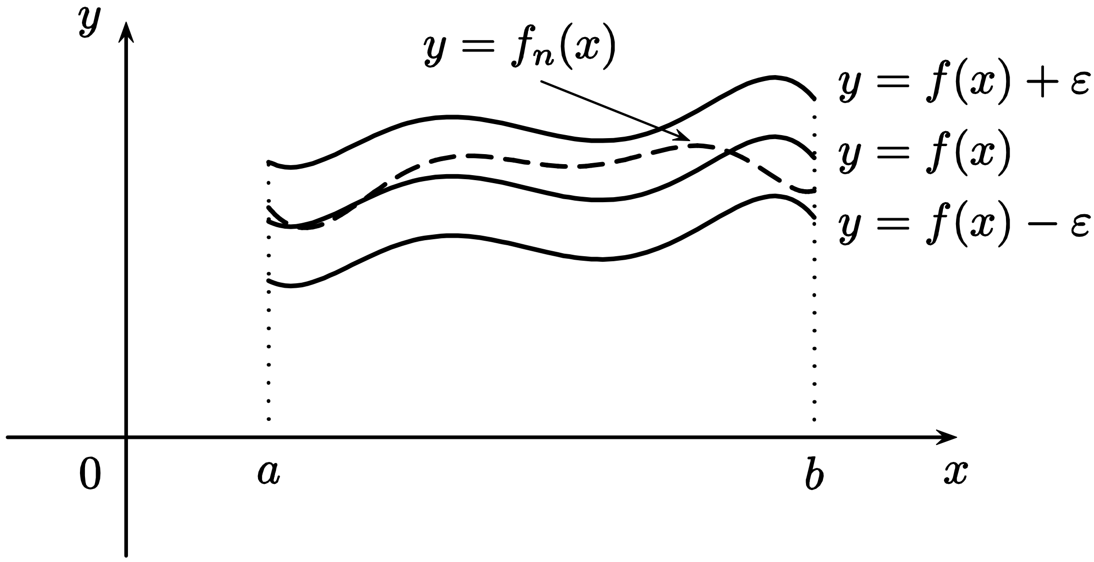
[3] Δηλαδή το n_0 εξαρτάται από το ε και το x.

Ομοιόμορφη σύγκλιση

Μια ακολουθία $\left(f_n\right)$ συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού A λέγεται ότι **συγκλίνει ομοιόμορφα** (ή **ομαλά**) στο A αν υπάρχει συνάρτηση f/A τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon>0$ να υπάρχει $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ με $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ για κάθε για κάθε $n\geq n_0$ και $x\in A$.

Στην περίπτωση αυτή, σημειώνεται $f\overset{\text{ομ}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ ή $f_n\overset{\text{ομ}}{\to}f$.

Γεωμετρικά, η ομοιόμορφη σύγκλιση των ακολουθιών περιγράφεται στο επόμενο σχήμα, όπου η γραφική παράσταση κάθε ακολουθίας f_n, με $n\geq n_0$, ευρίσκεται εντός της λωρίδας που ορίζουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f+\varepsilon$ και $f-\varepsilon$.



Μια σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ με κοινό πεδίο ορισμού A, λέγεται ότι **συγκλίνει ομοιόμορφα** (ή **ομαλά**) στο A αν υπάρχει μια συνάρτηση f/A τέτοια ώστε η ακολουθία $\left(\sigma_n\right)$ των μερικών αθροισμάτων της σειράς συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Τότε σημειώνεται $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n\overset{\text{ομ}}{=}f$.

Παραδείγματα

1. Η ακολουθία (f_n) με $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x+1)}{n}$ συγκλίνει ομομοιόμορφα προς τη συνάρτηση $f(x) = 0 / \mathbb{R}$, αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ τέτοιο ώστε όταν $n \geq n_0$ να ισχύει
$$| f_n(x) | = \left| \frac{\sin(n^2x+1)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ με $f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, όπου $0 < \alpha < 1$, προς τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1 / [-\alpha, \alpha]$.
Πραγματικά, για $x \in [-\alpha, \alpha]$ είναι
$$\left| \sigma_n(x) - 1 \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) - 1 \right| = \left| 1 - x^n - 1 \right| = |x|^n \leq \alpha^n,$$
οπότε από τη σύγκλιση της ακολουθίας (α^n) έπεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε όταν $n \geq n_0$ να ισχύει
$$\left| \sigma_n(x) - 1 \right| \leq \alpha^n < \varepsilon.$$

3. Για την ακολουθία (f_n) με

$$f_n(x) = \begin{cases} n, \text{ αν } 0 < x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, \text{ αν } \dfrac{1}{n} < x \end{cases}$$

ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Πραγματικά, για $x > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ με $\dfrac{1}{n_0} < x$, όποτε $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$.

Θα αποδειχθεί ότι η σύγκλιση της ακολουθίας (f_n) δεν είναι ομοιόμορφη.

Πραγματικά, αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} 0$ τότε για $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε όταν $n \geq n_0$, να ισχύει ότι $|f_n(x)| < \dfrac{1}{2}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Τούτο όμως είναι άτοπο, αφού $f_{n_0}\left(\dfrac{1}{n_0}\right) = n_0 > \dfrac{1}{2}$.

Στην επόμενη πρόταση, δίδεται ένα κριτήριο για την ομοιόμορφη σύγκλιση των ακολουθιών.

Πρόταση 1.1

Έστω μια ακολουθία συναρτήσεων $\left(f_n\right)$ με κοινό πεδίο ορισμού A και μια συνάρτηση f/A. Τότε η $\left(f_n\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f αν και μόνο αν η ακολουθία $\left(\rho_n\right)$ με $\rho_n = \sup\limits_{x\in A}\left|f_n(x) - f(x)\right|$ είναι μηδενική.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (*)

Να ευρεθεί το όριο της ακολουθίας (f_n) με $f_n(x) = n^2 x^n (1-x) / [0,1]$ και να εξετασθεί αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, παρατηρείται ότι για $x=0$ ή $x=1$ είναι $f_n(x)=0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε αρκεί να εξετασθεί η περίπτωση όπου $x \in (0,1)$. Επειδή για $x \in (0,1)$ είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 x^{n+1}(1-x)}{n^2 x^n (1-x)} = \lim_{n\to\infty} x\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = x < 1,$$

οπότε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Άρα $f_n \to 0$. Προκειμένου να εξετασθεί η ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n), θεωρούμε την (ρ_n) με

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x) - 0\right| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$ Επειδή

$f_n'(x) = n^2 (n+1) x^{n-1}\left(\dfrac{n}{n+1} - x\right)$, έπεται ότι $f_n'\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = 0$, $f_n'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{n}{n+1}\right)$ και $f_n'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\dfrac{n}{n+1}, 1\right)$. Άρα η f_n λαμβάνει μέγιστη τιμή όταν $x = \dfrac{n}{n+1}$.

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\rho_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$ και

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = (+\infty)\cdot\frac{1}{e} = +\infty.$$ Άρα, από την πρόταση 1.1 η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (*)

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (f_n) με $f_n(x)=(\cos x)^{\frac{1}{n}}$, συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε υποδιάστημα $[\alpha,\beta]$ με $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, ενώ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

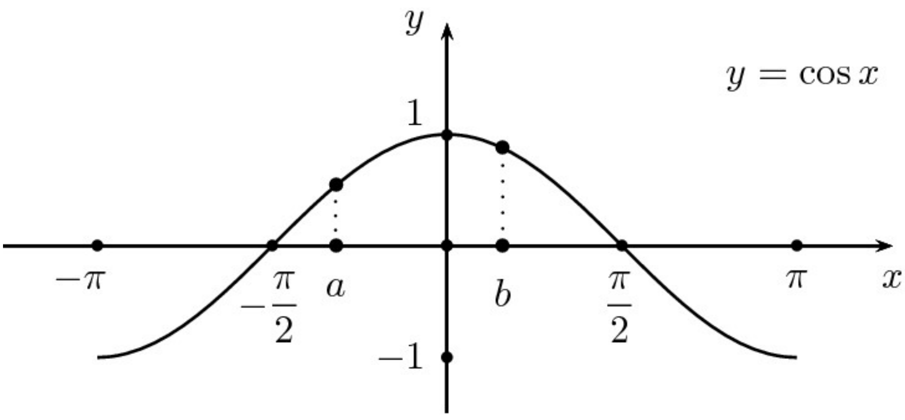
ΛΥΣΗ

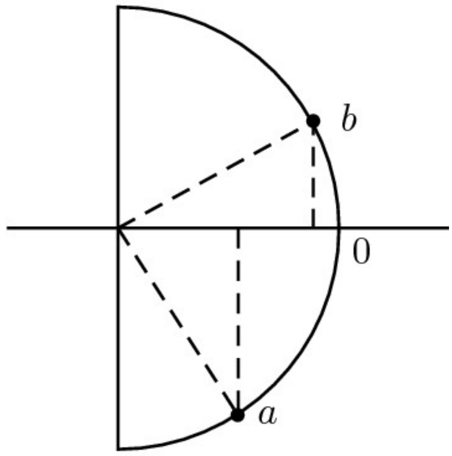
Αρχικά, $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos x)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}1, \text{ αν } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, \text{ αν } x=-\frac{\pi}{2} \text{ ή } x=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

Για την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας (f_n) στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ θεωρούμε την ακολουθία (ρ_n) με

$$\rho_n=\sup_{x\in[\alpha,\beta]}\left|(\cos x)^{\frac{1}{n}}-1\right|=\sup_{x\in[\alpha,\beta]}\left(1-(\cos x)^{\frac{1}{n}}\right)=1-\inf_{x\in[\alpha,\beta]}(\cos x)^{\frac{1}{n}}$$

$=1-(\cos\gamma)^{\frac{1}{n}}$, όπου $\gamma=\max\{|\alpha|,|\beta|\}$.





Κατόπιν τούτου, είναι $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = 1-\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\gamma)^{\frac{1}{n}} = 1-1=0$, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 1.1, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha,\beta]$. Αντίθετα, η σύγκλισή της δεν είναι ομοιόμορφη στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, αφού τότε η αντίστοιχη ακολουθία (ρ_n') θα είναι

$$\rho_n' = \sup_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\left|(\cos x)^{\frac{1}{n}}-1\right| = 1-\inf_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\cos x)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

η οποία προφανώς δεν είναι μηδενική.

Μια ακολουθία συναρτήσεων $\left(f_n\right)$ με κοινό πεδίο ορισμού A ονομάζεται **ομοιόμορφα βασική** στο A όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$ με $m, n \geq n_0$ έπεται ότι

$$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

Πρόταση 1.2

Η ακολουθία $\left(f_n\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα βασική στο A.

Πόρισμα 1.3

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$ με $m > n \geq n_0$ έπεται ότι $\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| < \varepsilon$.

Κριτήριο του Weierstrass

Αν για μια ακολουθία (f_n) συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο A και μια ακολουθία (α_n) πραγματικών αριθμών ισχύει ότι $|f_n(x)| \le \alpha_n$ για κάθε $x \in A$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

Παράδειγμα

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n^p}$, όπου $p > 1$ και (f_n) ομοιόμορφα φραγμένη στο A, δηλαδή $|f_n(x)| \le M$ για κάθε $x \in A$ και $n \in \mathbb{N}^*$, είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα.

Πραγματικά, αφού $\left|\frac{f_n(x)}{n^p}\right| \le \frac{M}{n^p}$ για κάθε $x \in A$ και $n \in \mathbb{N}^*$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^p} < +\infty$, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass προκύπτει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n^p}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο A. Έτσι, οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2+1)x}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\alpha^n n^{\frac{3}{2}}}$, όπου $\alpha > 0$, είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσες στο $\mathbb{R}$ και στο $[-\alpha, \alpha]$ αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ 9 (*)

Να αποδειχθεί ότι οι σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(3n+2)x}{n^2+1}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+x^4}$, γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$,

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Για τις δοσμένες σειρές εφαρμόζεται το κριτήριο του Weierstrass.

α) Επειδή $\left|\frac{\sin(3n+2)x}{n^2+1}\right|<\frac{1}{n^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(3n+2)x}{n^2+1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή $\left|\frac{(-1)^n}{3^n+x^4}\right|\le\frac{1}{3^n}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+x^4}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

γ) Επειδή $\left|\frac{\cos nx}{n!}\right|\le\frac{1}{n!}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η εκθετική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ συγκλίνει, προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10 (*)

Να αποδειχθεί ότι οι σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{xn^x}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$,

συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,+\infty)$ με $\alpha>1$.

ΛΥΣΗ

Για τις δοσμένες σειρές εφαρμόζεται το κριτήριο του Weierstrass.

α) Επειδή $\frac{1}{xn^x}\le\frac{1}{\alpha n^\alpha}$ για κάθε $x\in[\alpha,+\infty)$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha n^\alpha}$ συγκλίνει (διότι $\alpha>1$), προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{xn^x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$.

β) Επειδή $\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}\le\frac{nx}{nx^n}\le\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}$

για κάθε $x\in[\alpha,+\infty)$ και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}$ συγκλίνει (διότι $\frac{1}{\alpha}<1$), προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδειχθεί η πρόταση 1.1: **Έστω μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με κοινό πεδίο ορισμού A και μια συνάρτηση f / A. Τότε η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f αν και μόνο αν η ακολουθία (ρ_n) με $\rho_n = \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ είναι μηδενική.**

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ αν και μόνο αν $\rho_n \to 0$, όπου $\rho_n = \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$.

Αρχικά, υποτίθεται ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. Τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ με

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $x \in A$, οπότε προκύπτει ότι

$$n \geq n_0 \Rightarrow \rho_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

και επομένως, η ακολουθία (ρ_n) είναι μηδενική.

Αντίστροφα, αν υποτεθεί ότι η ακολουθία (ρ_n) είναι μηδενική, τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ με

$$n \geq n_0 \Rightarrow \rho_n < \varepsilon$$

οπότε προκύπτει ότι

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n < \varepsilon$$

για κάθε $x \in A$ και επομένως $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11:
ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Βασικές προτάσεις – συνέπειες της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων

2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στην παράγραφο αυτή, δίδονται ορισμένες σημαντικές εφαρμογές της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Πρόταση 2.1

Αν μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) **συγκλίνει ομοιόμορφα στο** A **προς μια συνάρτηση** f/A **και** $\lim\limits_{x\to\xi} f_n(x)=\alpha_n$ **για κάθε** $n\in\mathbb{N}^*$**, όπου** ξ **είναι ένα οριακό σημείο του** A**, τότε η ακολουθία** (α_n) **συγκλίνει στο** $\mathbb{R}$ **και ισχύει ότι**

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n.$$

Το συμπέρασμα της πρότασης αυτής ισχύει και όταν $\xi=+\infty$ ή $\xi=-\infty$, οπότε τελικά, αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ τότε θα είναι

$$\lim_{x\to\xi}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\xi} f_n(x), \qquad \text{για κάθε } \xi\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Η παραπάνω σχέση δεν ισχύει πάντα όταν η σύγκλιση της ακολουθίας (f_n) δεν είναι ομοιόμορφη.

Για παράδειγμα, αν $f_n(x)=\dfrac{x^2}{x^2+n}/\mathbb{R}$ είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x).$$

Άμεση συνέπεια της πρότασης 2.1 είναι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.2 (ομαλή σύγκλιση και συνέχεια)

Αν μια ακολουθία $\left(f_n\right)$ **(αντ. σειρά** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$**) συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση** f, **τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής.**

Πράγματι,

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\xi} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi) = f(\xi)$$

Πρόταση 2.3 (ομαλή σύγκλιση και ολοκλήρωση)

Αν μια ακολουθία $\left(f_n\right)$ **ολοκληρώσιμων συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα** $\left[\alpha,\beta\right]$ **προς τη συνάρτηση** $f/\left[\alpha,\beta\right]$**, τότε η συνάρτηση αυτή είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)\,dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 13 (Θ)

Δίδεται μια ακολουθία $\left(\alpha_n\right)$ και έστω η ακολουθία $f_n /\left[0,1\right]$ με

$$f_n\left(x\right)=\begin{cases} 2n\alpha_n x, & \text{αν } 0\le x<\dfrac{1}{2n} \\ 2n\alpha_n\left(\dfrac{1}{n}-x\right), & \text{αν } \dfrac{1}{2n}\le x<\dfrac{1}{n} \\ 0, & \text{αν } \dfrac{1}{n}\le x\le 1. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(x\right)=0$ για κάθε $x\in\left[0,1\right]$,

(ii) $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ αν και μόνο αν $\alpha_n\to 0$,

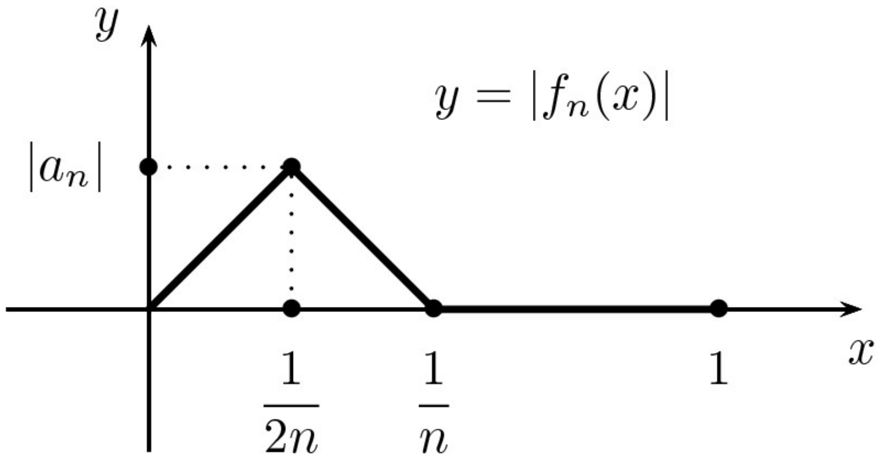
(iii) $\int_0^1 f_n\left(x\right)dx\to 0$ αν και μόνο αν $\dfrac{\alpha_n}{2n}\to 0$.

ΛΥΣΗ

(i) Αν $x>0$ τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}^*$ με $\dfrac{1}{n}<x$ για κάθε $n\ge n_0$, οπότε θα ισχύει ότι $f_n\left(x\right)=0$ για $n\ge n_0$ και τελικά $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(x\right)=0$.

Προφανώς, το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση όπου $x=0$.

(ii) Επειδή η συνάρτηση $\left|f_n\right|$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{2n}\right]$ και γνήσια φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right]$, προκύπτει ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο όπου $x=\frac{1}{2n}$.



Κατόπιν τούτου είναι

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-0\right| = \left|f_n\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = \left|\alpha_n\right|$$

και επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 1.1, θα είναι

$$f_n \xrightarrow{\text{ομ}} 0 \text{ αν και μόνο αν } \alpha_n \to 0.$$

(iii) Επειδή

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} 2n\alpha_n x\,dx + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} 2n\alpha_n\left(\frac{1}{n}-x\right)dx = \frac{\alpha_n}{2n},$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

Παρατήρηση

Από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι η ισότητα της πρότασης 2.3 δεν ισχύει για οποιαδήποτε ακολουθία συναρτήσεων (f_n).

Έτσι, αν $\alpha_n = 2n$, τότε για την ακολουθία (f_n) που προκύπτει, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση θα ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

Από την άλλη, η ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) είναι μια ικανή άλλα όχι αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η ισότητα της πρότασης 2.3. Έτσι, αν $\alpha_n = 1$, τότε για την ακολουθία (f_n) που προκύπτει, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

ενώ η σύγκλιση της (f_n) δεν είναι ομοιόμορφη.

Ολοκλήρωμα σειράς συναρτήσεων

Εφαρμόζοντας τον τύπο

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx$$

της πρότασης 2.3 για την ακολουθία $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ των μερικών αθροισμάτων μιας συγκλίνουσας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ προκύπτει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\lim_{n\to+\infty}\sigma_n(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\sigma_n(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\alpha}^{\beta} f_i(x)dx\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx$$

Δηλαδή ισχύει ο τύπος

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx,$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f/(0,+\infty)$ με

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}.$$

Θα αποδειχθεί ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής, και θα υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx.$$

Εδώ $f_n(x)=ne^{-nx}/(0,+\infty)$, οπότε αρκεί να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$ και να εφαρμοσθεί η προηγούμενη πρόταση. Τούτο όμως δεν ισχύει, οπότε για το σκοπό αυτό αρχικά θα δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[r,+\infty)$, όπου $r>0$. Όπως θα δούμε, αυτό αρκεί για τη συνέχεια της f.

Πραγματικά, για $x\in[r,+\infty)$ είναι

$$e^{nx}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}>\frac{(nx)^3}{6}\geq\frac{n^3r^3}{6}.$$

Συνεπώς,

$$ne^{-nx}<\frac{6}{n^2r^3},\ \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}^* \text{ και } x\in\mathbb{R},$$

και επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2r^3}<+\infty$$

έπεται σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass ότι η σειρά θα συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $\left[r,+\infty\right)$.

Στη συνέχεια, θα αποδειχθεί η συνέχεια της f.

Πραγματικά, αν $x_0\in\left(0,+\infty\right)$, επιλέγουμε $r>0$ με $0<r<x_0$. Επειδή η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $\left[r,+\infty\right)$ και οι συναρτήσεις $f_n\left(x\right)=ne^{-nx}/\left[r,+\infty\right)$ είναι συνεχείς έπεται, σύμφωνα με το πόρισμα 2.2, ότι και η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο διάστημα $\left[r,+\infty\right)$.

Άρα η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο x_0 και επομένως, θα είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$.

Τέλος, επειδή η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $\left[\ln 2,\ln 3\right]$, προκύπτει ότι

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}f\left(x\right)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3}ne^{-nx}dx$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-nx}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n\ln 2}-e^{-n\ln 3}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}-\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Παρατήρηση

Η συνθήκη της ομοιόμορφης σύγκλισης είναι ικανή άλλα όχι αναγκαία για να ισχύει ο τύπος της ολοκλήρωσης των σειρών συναρτήσεων.

Πρόταση 2.4

Αν για μια ακολουθία $\left(f_n\right)$ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left[\alpha,\beta\right]$ ισχύουν οι συνθήκες:

(i) Η ακολουθία $\left(f_n\left(\xi\right)\right)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ για ένα (τουλάχιστον) $\xi\in\left[\alpha,\beta\right]$,

(ii) Η ακολουθία $\left(f_n'\right)$ των παραγώγων της συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $g/\left[\alpha,\beta\right]$,

τότε υπάρχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f/\left[\alpha,\beta\right]$ προς την οποία συγκλίνει ομοιόμορφα η $\left(f_n\right)$, και ισχύει $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ειδικά, αν η $\left(f_n\right)$ συγκλίνει και η $\left(f_n'\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε ισχύει η σχέση

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x)$$

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, προκύπτει το ανάλογο αποτέλεσμα για τις σειρές.

Πόρισμα 2.5

Αν για μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left[\alpha,\beta\right]$ ισχύουν οι συνθήκες:

(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\xi\right)$ συγκλίνει για ένα (τουλάχιστον) $\xi \in \left[\alpha,\beta\right]$,

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ των παραγώγων της συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\left[\alpha,\beta\right]$,

τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\left[\alpha,\beta\right]$, και ισχύει ότι

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

για κάθε $x \in \left[\alpha,\beta\right]$.

Εφαρμογή (βλ. λυμένη άσκηση 5 κεφαλαίου 3)

Να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$, όταν $|\alpha| < 1$.

Λύση. Θεωρούμε $r > 0$ με $|\alpha| \le r < 1$, και τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in [-r, r]$.

Θα αποδειχθεί ότι η σειρά των παραγώγων της

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-r, r]$. Πραγματικά,

$\left|n x^{n-1}\right| \le n r^{n-1}$, για κάθε $x \in [-r, r]$, και $\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} < +\infty$,

σύμφωνα με το κριτήριο D'Alembert και αφού

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)r^n}{n r^{n-1}} \right| = r < 1.$$

Επομένως, από το κριτήριο του Weierstrass προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-r, r]$.

Τότε, εφαρμόζοντας το πόρισμα 2.5, προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

για κάθε $x \in [-r, r]$. Άρα, επειδή $\alpha \in [-r, r]$, προκύπτει τελικά ότι $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 14 (*)

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-r, r]$ όπου $0 < r < 1$, και στη συνέχεια να ευρεθεί το $\lim_{x \to 0} f(x)$ όταν $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, παρατηρείται ότι $\left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{r^n}{n}$, για κάθε $x \in [-r, r]$.

Επιπλέον, επειδή $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{r^{n+1}}{n+1}}{\frac{r^n}{n}} \right| = |r| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = r < 1$,

σύμφωνα με το κριτήριο του D' Alembert θα είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} < +\infty$. Τότε όμως, από το κριτήριο του Weierstrass, προκύπτει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-r, r]$.

Επιπλέον, επειδή οι συναρτήσεις $g_n(x) = \frac{x^n}{n} / [-r, r]$ είναι συνεχείς, θα είναι συνεχής και η συνάρτηση άθροισμα αυτών. Συνεπώς, θα είναι συνεχής και η συνάρτηση $f / [-r, r]$, οπότε $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 15 (*)

Να ευρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\cdots, \qquad \text{με } x\in(-1,1).$$

ΛΥΣΗ

Εδώ η σειρά γράφεται ισοδύναμα ως $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

Παρατηρούμε ότι ο γενικός όρος της είναι

$$\frac{x^{4n-1}}{4n-1}=\int_0^x t^{4n-2}dt$$

Κατόπιν τούτου, θεωρούμε $x_0\in(-1,1)$, επιλέγουμε $r>0$ με $|x_0|<r<1$ και θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n-2}, \text{ όπου } x\in[-r,r].$$

Τότε θα είναι $|x^{4n-2}|\le r^{4n-2}$, για κάθε $x\in[-r,r]$ και $\sum_{n=1}^{\infty}r^{4n-2}<+\infty$ (διότι $r<1$).

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass η $\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n-2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-r,r]$.

Επιπλέον, επειδή η σειρά είναι γεωμετρική θα είναι $\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2} = \frac{x^2}{1-x^4}$, για κάθε $x \in [-r, r]$. Τότε όμως, από τον τύπο της ολοκλήρωσης των σειρών συναρτήσεων, προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\int_0^{x_0} \frac{x^2}{1-x^4} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{x_0} x^{4n-2} dx$$

$$\int_0^{x_0} \left(\frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{4n-1}}{4n-1} \right]_0^{x_0}$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{x_0} \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{4}\int_0^{x_0} \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2}\int_0^{x_0} \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^{4n-1}}{4n-1}$$

$$\frac{1}{4}\left[-\ln(1-x)\right]_0^{x_0} + \frac{1}{4}\left[\ln(1+x)\right]_0^{x_0} - \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^{x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^{4n-1}}{4n-1}$$

$$\frac{1}{4}\ln\frac{1+x_0}{1-x_0} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^{4n-1}}{4n-1}$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x_0 \in (-1, 1)$ προκύπτει ότι

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \cdots = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 16 (*)

Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}/\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

ισχύει η σχέση

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\frac{|\cos nx|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$, από το κριτήριο του Weierstrass προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Τότε όμως, από τον τύπο της ολοκλήρωσης των σειρών συναρτήσεων, προκύπτει ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nx}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}[\sin nx]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sin\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{0\cdot n}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{\pi n}{2} \qquad (1)$$

Τέλος, επειδή $\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & \text{αν } n=2k\\ (-1)^k, & \text{αν } n=2k+1,\end{cases}$

από την (1) προκύπτει ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 17 (Θ)

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(x\cos\theta)\cos\theta d\theta, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

ΛΥΣΗ

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση Bessel p-τάξης δίνεται από τον τύπο

$$J_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+p}}{2^{2n+p}(n!)\Gamma(p+n+1)}$$

οπότε για $p=0$ και $t = x\cos\theta$, όπου $x \in \mathbb{R}^*$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, προκύπτει ότι

$$J_0(x\cos\theta)\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos^{2n+1}\theta \cdot x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \qquad (1)$$

Επειδή $\left|\frac{(-1)^n \cos^{2n+1}\theta \cdot x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right| \leq \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$,

για κάθε $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$[1] $<+\infty$, προκύπτει, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos^{2n+1}\theta\, x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Προκύπτει εφαρμόζοντας το κριτήριο D’ Alembert.

Κάτοπιν τούτων, εφαρμόζοντας τον τύπο της ολοκλήρωσης των σειρών συναρτήσεων, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(x\cos\theta)\cos\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos^{2n+1}\theta \cdot x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n \cos^{2n+1}\theta \cdot x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta d\theta \\
&\overset{1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \frac{2^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \\
&\overset{2}{=} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{\sin x}{x}.
\end{aligned}$$

1. Βλ. λυμένη άσκηση 35β) και άλυτη άσκηση 47 κεφαλαίου 9.
2. Επειδή $2^n n! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$.

ΑΣΚΗΣΗ 11 (Θ)

Να αποδειχθεί η πρόταση 2.1.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις:

$f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ και $\alpha_n = \lim\limits_{x\to\xi} f_n(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, θα αποδειχθεί ότι η ακολουθία (α_n) συγκλίνει, και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{x\to\xi} f(x) \qquad (1)$$

Αρχικά, προκειμένου να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (α_n) είναι συγκλίνουσα, αρκεί να αποδειχθεί ότι είναι βασική.

Επειδή $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ έπεται ότι η (f_n) θα είναι ομοιόμορφα βασική, οπότε για $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } x \in A.$$

Τότε όμως, για $m, n \geq n_0$ θα είναι

$$\left|\alpha_m - \alpha_n\right| = \left|\lim_{x\to\xi} f_m(x) - \lim_{x\to\xi} f_n(x)\right| = \lim_{x\to\xi}\left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$

οπότε η ακολουθία (α_n) είναι βασική και, σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy, θα συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό α.

Για την απόδειξη της σχέσης (1) αρχικά εφαρμόζεται ο ορισμός της σύγκλισης της ακολουθίας (α_n) για $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, οπότε θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται ο ορισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης της (f_n) για $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ οπότε θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_2 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

για κάθε $x \in A$.

Τέλος, αν $n \in \mathbb{N}^*$ με $n > \max\{n_1, n_2\}$, εφαρμόζεται ο ορισμός της σύγκλισης της συνάρτησης f_n για $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, οπότε θα υπάρχει $\delta > 0$ με

$$x \in A,\ 0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (2), (3), (4) και για $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} |f(x) - \alpha| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12 (Θ)

Να αποδειχθεί η πρόταση 2.3.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις:

$f_n \xrightarrow{ομ} f$ και f_n ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, θα αποδειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, και ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)dx.$$

Αρχικά, εφαρμόζοντας τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης της (f_n) για $\dfrac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)} > 0$, προκύπτει ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)} \qquad (1)$$

για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Ακολούθως, εφαρμόζοντας το κριτήριο του Riemann για τη συνάρτηση f_{n_0} και $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$, προκύπτει ότι υπάρχει διαμέριση $\delta = (x_i)$, $i = 0,1,\dots,n$ του $[\alpha,\beta]$ με

$$U\left(f_{n_0},\delta\right) - L\left(f_{n_0},\delta\right) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις

$$U(f,\delta) \leq U\left(f_{n_0},\delta\right) + \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

και

$$L(f,\delta) \geq L\left(f_{n_0},\delta\right) - \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4)$$

Πραγματικά, για τη σχέση (3) είναι

$$U(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} \sup\left\{f(x) : x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]\right\} \Delta x_i$$

$$\overset{1}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \left(\sup\left\{f_{n_0}(x) : x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]\right\} + \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)} \right) \Delta x_i$$

$$= U\left(f_{n_0},\delta\right) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η σχέση (4).

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) προκύπτει ότι

$$U(f,\delta) - L(f,\delta) = U\left(f_{n_0},\delta\right) + \frac{\varepsilon}{3} - L\left(f_{n_0},\delta\right) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο του Riemann, η συνάρτηση f θα είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

Τέλος, ισχύει ότι

$$\left| \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| \leq \int_\alpha^\beta \left| f_n(x) - f(x) \right| dx$$

$$\overset{1}{\leq} \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}\,dx = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$.

Άρα,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx.$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11:
ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Δυναμοσειρές

Ακτίνα σύγκλισης, διάστημα σύγκλισης

Παραγώγιση και ολοκλήρωση δυναμοσειράς

3. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Κάθε σειρά της μορφής

$$\alpha_0 + \alpha_1 \left(x - \xi\right) + \alpha_2 \left(x - \xi\right)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(x - \xi\right)^n$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** με **κέντρο** $\xi \in \mathbb{R}$ και **συντελεστές** $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ στο $\mathbb{R}$.

Κάθε δυναμοσειρά μπορεί να αναχθεί σε μια δυναμοσειρά κέντρου 0. Συγκεκριμένα, αν τεθεί

$$t = x - \xi$$

τότε η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(x - \xi\right)^n$$

ανάγεται στη μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n .$$

Κατόπιν τούτου, είναι αρκετό να μελετηθούν οι σειρές κέντρου 0, δηλαδή της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n .$$

Σημαντικά παραδείγματα δυναμοσειρών έχουν δοθεί ως εφαρμογές των σειρών Maclaurin.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκλιση των δυναμοσειρών. Προφανώς, για $x = 0$ κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει. Υπάρχουν περιπτώσεις δυναμοσειρών που συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ άλλες συγκλίνουν μόνο για $x = 0$. Τέλος, υπάρχουν δυναμοσειρές που συγκλίνουν για ορισμένα $x \in \mathbb{R}^*$, ενώ για άλλα δεν συγκλίνουν.

Για παράδειγμα, η εκθετική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

συγκλίνει μόνο για $x = 0$,

ενώ η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$ και δεν συγκλίνει για κάθε $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.

Πρόταση 3.1

Αν μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ συγκλίνει για ένα (τουλάχιστον) $x_0 \in \mathbb{R}^*$, τότε θα συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \left(-|x_0|, |x_0|\right)$.

Αν υποτεθεί ότι μια δυναμοσειρά συγκλίνει για ένα (τουλάχιστον) $x_0 \in \mathbb{R}^*$ τότε, από την προηγούμενη πρόταση, προκύπτει ότι το σύνολο

$$A = \left\{ x \in (0, +\infty) : \sum_{n=0}^{\infty} \left|\alpha_n x^n\right| < +\infty \right\}$$

είναι μη κενό. Τότε, ορίζεται το $\rho = \sup A \in (0, +\infty]$ και ισχύουν τα παρακάτω:

- Αν $\rho = +\infty$ (ισοδύναμα το A δεν είναι φραγμένο) τότε η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ
- αν $0 < \rho < +\infty$ (ισοδύναμα το A είναι φραγμένο) τότε η σειρά συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως) για κάθε $x \in (-\rho, \rho)$ και δεν συγκλίνει για κάθε $x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$.

Πράγματι, αν $\xi \in (-\rho, \rho)$, δηλαδή $|\xi| < \rho$, τότε το $|\xi|$ δεν είναι άνω φράγμα του A, άρα υπάρχει $x_0 \in A$ με $|\xi| < x_0$ και, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, η σειρά θα συγκλίνει απολύτως για $x = \xi$.

Ανάλογα προκύπτει ότι αν $\xi \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$, τότε η σειρά δεν συγκλίνει για $x = \xi$.

Ο αριθμός ρ ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς, ενώ το διάστημα $I=(-\rho,\rho)$ ονομάζεται **διάστημα σύγκλισης** αυτής. Στην περίπτωση όπου μια δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x=0$ (ισοδύναμα $A=\varnothing$), θεωρείται $\rho=0$ και $I=\{0\}$.

Πρέπει να τονισθεί ότι στην περίπτωση όπου $0<\rho<+\infty$, είναι δυνατόν η δυναμοσειρά να συγκλίνει στο ένα ή και στα δύο άκρα του διαστήματος σύγκλισης.

Πρόταση 3.2

Για την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n$ ισχύουν οι τύποι:

(i) $\dfrac{1}{\rho}=\limsup\sqrt[n]{|\alpha_n|}$, **(ii)** $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right|$,

όταν το όριο υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Παραδείγματα

1. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!}{(\lambda n)!} x^n$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$ με $k < \lambda$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(kn)!}{(\lambda n)!}}{\dfrac{(kn+k)!}{(\lambda n+\lambda)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(kn)!}{(\lambda n)!} \cdot \frac{1\cdot 2\cdots(\lambda n)(\lambda n+1)\cdots(\lambda n+\lambda)}{1\cdot 2\cdots(kn)(kn+1)\cdots(kn+k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda n+1)(\lambda n+2)\cdots(\lambda n+\lambda)}{(kn+1)(kn+2)\cdots(kn+k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\lambda}\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)\left(\lambda+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\lambda+\frac{\lambda}{n}\right)}{n^{k}\left(k+\frac{1}{n}\right)\left(k+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(k+\frac{k}{n}\right)} = \frac{\lambda^{\lambda}}{k^{k}} \lim_{n\to\infty} n^{\lambda-k} = +\infty.$$

2. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ συγκλίνει μόνο για $x = 0$, διότι $\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n|} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$, οπότε $\rho = 0$.

3. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ συγκλίνει στο διάστημα $(-e, e)$, διότι

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

4. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ με

$$\alpha_n = \begin{cases} -2\cdot 3^n, & \text{αν n είναι περιττός} \\ n^2+n+1, & \text{αν n είναι άρτιος} \end{cases}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Πραγματικά, επειδή

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \begin{cases} 3\cdot\sqrt[n]{2}, & \text{αν n είναι περιττός} \\ \sqrt[n]{n^2+n+1}, & \text{αν n είναι άρτιος} \end{cases}$$

και $\lim_{n\to\infty} 3\cdot\sqrt[n]{2} = 3$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n+1} = 1$, προκύπτει ότι $\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \max\{1,3\} = 3$, οπότε $\rho = \frac{1}{3}$.

Για την ομοιόμορφη σύγκλιση των δυναμοσειρών ισχύουν οι ακόλουθες δύο προτάσεις.

Πρόταση 3.3

Αν μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ **έχει ακτίνα σύγκλισης** $\rho \neq 0$**, τότε θα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής** $[-r, r]$**, όπου** $0 < r < \rho$**.**

Πρόταση 3.4 (Abel)

Αν μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ **με ακτίνα σύγκλισης** $0 < \rho < +\infty$ **συγκλίνει για** $x = \rho$ **(αντ.** $x = -\rho$**), τότε θα συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα** $[0, \rho]$ **(αντ.** $[-\rho, 0]$**).**

Συνάρτηση δυναμοσειράς

Κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ με ακτίνα σύγκλισης $\rho \neq 0$ ορίζει μια συνάρτηση $f/(-\rho,\rho)$ με $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ η οποία ονομάζεται **συνάρτηση της δυναμοσειράς**.

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος σύγκλισης.

Πραγματικά, αν $x_0 \in (-\rho,\rho)$ τότε επιλέγεται $r \in (0,\rho)$ με $|x_0| \leq r$. Επειδή οι $f_n(x)=\alpha_n x^n / [-r,r]$ είναι συνεχείς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα[5] προς την f στο $[-r,r]$, έπεται[6] ότι η f θα είναι συνεχής στο $[-r,r]$.

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0 και επομένως[7], θα είναι συνεχής για κάθε $x \in (-\rho,\rho)$.

Αν, επιπλέον, $\rho \neq +\infty$ και η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει για $x=\rho$ (αντ. $x=-\rho$) τότε προφανώς η f ορίζεται και για $x=\rho$ (αντ. $x=-\rho$) και, από την πρόταση 3.4, προκύπτει ανάλογα ότι θα είναι αριστερά συνεχής στο ρ (αντ. δεξιά συνεχής στο $-\rho$).

---

[5] Σύμφωνα με την πρόταση 3.3

[6] Σύμφωνα με το πόρισμα 2.2.

[7] Αφού η επιλογή του σημείου x_0 είναι τυχαία.

4. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ

Πρόταση 4.1

Η συνάρτηση μιας δυναμοσειράς

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n/(-\rho,\rho),$$

με $\rho\neq 0$**, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι**

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n x^{n-1},$$

για κάθε $x\in(-\rho,\rho)$**.**

Από τη πρόταση αυτή προκύπτει ότι οι συναρτήσεις που ορίζονται από δυναμοσειρές παραγωγίζονται όπως τα πολυώνυμα. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται επαγωγικά για τις παραγώγους τους όλων των τάξεων.

Πόρισμα 4.2

Η συνάρτηση $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n/(-\rho,\rho)$ **όπου** $\rho\neq 0$ **μιας δυναμοσειράς έχει παράγωγο** k **τάξης, και ισχύει ότι**

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)\alpha_n x^{n-k},$$

για κάθε $x\in(-\rho,\rho)$ **και** $k\in\mathbb{N}^*$**.**

Υπενθυμίζεται ότι το γινόμενο $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ είναι το παραγοντικό πολυώνυμο $F_k(n)$.

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο πόρισμα για $x = 0$, προκύπτει άμεσα ότι οι συντελεστές μιας δυναμοσειράς $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n / (-\rho, \rho)$, όπου $\rho > 0$, δίδονται από τις σχέσεις

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει άμεσα το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 4.3

Αν δυο δυναμοσειρές συγκλίνουν στο διάστημα $(-r, r)$, όπου $r > 0$, και ισχύει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$$

για κάθε $x \in (-r, r)$, τότε $\alpha_n = \beta_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Με τη βοήθεια της παραγώγισης των δυναμοσειρών μπορούν να υπολογισθούν με σύντομο τρόπο τα αθροίσματα ορισμένων σειρών.

Εφαρμογή

Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=e^{-x^2}/\mathbb{R}$, και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{2^n n!}$.

Λύση

Βάσει της σειράς Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης, προκύπτει ότι $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$.

Κατόπιν τούτων, παραγωγίζοντας δύο φορές διαδοχικά την παραπάνω δυναμοσειρά, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\left(e^{-x^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n\frac{x^{2n-1}}{n!}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$\left(e^{-x^2}\right)''=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n!}x^{2n},\qquad x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Εξάλλου, παραγωγίζοντας δύο φορές την f, προκύπτει ότι

$$\left(e^{-x^2}\right)'=-2xe^{-x^2} \text{ και } \left(e^{-x^2}\right)''=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right),\qquad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=e^{-x^2}\left(2x^2-1\right), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

προκύπτει $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+1$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)+1=1.$$

Πρόταση 4.4

Αν $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n / (-\rho,\rho)$**, όπου** $\rho\neq 0$**, τότε ισχύει ότι**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\alpha_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{n+1},$$

για κάθε $\alpha,\beta\in(-\rho,\rho)$ **με** $\alpha<\beta$**.**

Η πρόταση αυτή χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη ορισμένων συναρτήσεων σε δυναμοσειρές και για τον υπολογισμό αθροισμάτων.

Εφαρμογή

Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά η συνάρτηση

$$f(x) = \operatorname{arctg} x / (-1,1),$$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Λύση

Επειδή $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, για κάθε $x \in (-1,1)$, και $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}$, για κάθε $t \in (-1,1)$, προκύπτει ότι

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (1)$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

Επειδή η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ συγκλίνει[8] έπεται ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} / (-1,1]$ είναι αριστερά συνεχής[9] στο 1, οπότε από την (1) προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

---

[8] Σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz.

[9] Σύμφωνα με την πρόταση 3.4.

ΑΣΚΗΣΗ 21 (*)

Να ευρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$, β) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)!}{n^n} x^n$,

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}{3^n (n+1)!} x^n$.

ΛΥΣΗ

Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι οι ακτίνες σύγκλισης των δοσμένων δυναμοσειρών αντίστοιχα, τότε θα είναι:

α) $$\rho_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} \right| = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \right) \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(\ln(x+1))'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

β) $$\rho_2 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n (n+2)!}{n^n}}{\frac{(-1)^{n+1} (n+3)!}{(n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n (n+3)}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} \right) \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = 1 \cdot e = e.$$

γ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}{3^n(n+1)!}x^n$

$$\rho_3=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}{3^n(n+1)!}}{\dfrac{(-1)^{n+2}\cdot 2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2\cdot(2n+2)^2}{3^{n+1}(n+2)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+2)}{(2n+2)^2}=0$$

Τα αντίστοιχα διαστήματα σύγκλισης I_1, I_2, I_3 είναι

$$I_1=(-1,1),\ I_2=(-e,e),\ I_3=\{0\}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 23 (*)

Να ευρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n, \text{ όταν } \alpha_n = \begin{cases} n^2+2n-2, & \text{αν } n=3\rho,\ \rho\in\mathbb{N}^* \\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}, & \text{αν } n=3\rho+1,\ \rho\in\mathbb{N} \\ 2^n, & \text{αν } n=3\rho+2,\ \rho\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Εδώ δεν εφαρμόζεται ο τύπος που εφαρμόσθηκε στις προηγούμενες δύο ασκήσεις, διότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right|$. Εντούτοις, εφαρμόζεται ο τύπος

$$\frac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} \tag{1}$$

Επειδή

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n^2+2n-2}, & \text{αν } n=3\rho,\ \rho\in\mathbb{N}^* \\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}, & \text{αν } n=3\rho+1,\ \rho\in\mathbb{N} \\ 2, & \text{αν } n=3\rho+2,\ \rho\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2n-2} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

από την πρόταση 5.2 του Κεφάλαιου 2 προκύπτει ότι τα μοναδικά σημεία συσσωρεύσεως της ακολουθίας $\left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right)$ είναι οι αριθμοί 1, e και 2.

Άρα,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \max\{1, e, 2\} = e$$

και επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\rho = \dfrac{1}{e}$.

ΑΣΚΗΣΗ 25 (*)

Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά η $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}/(-1,1)$, και στη συνέχεια να ευρεθεί το άθροισμα της σειράς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τη διωνυμική σειρά, προκύπτει ότι

$$f(x)=(1+x)(1-x)^{-3}=(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-x)^n\right)$$

$$=(1+x)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n x^n\right)$$

$$=(1+x)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!}(-1)^n x^n\right)$$

$$=(1+x)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{2\cdot n!}x^n\right)=(1+x)\left(1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n\right)$$

$$=1+x+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+1}$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\frac{1}{2}\left(2x+\sum_{n=2}^{\infty}n(n+1)x^n\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)(n+2)+n(n+1)\big)x^n=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}2(n+1)^2x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n \text{ για κάθε } x\in(-1,1).$$

Αν εφαρμοσθεί η προηγούμενη σχέση για $x=\dfrac{1}{2}\in(-1,1)$ προκύπτει ότι $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{3}{2}\cdot 8=12$.

ΑΣΚΗΣΗ 28

Να αναπτυχθεί σε σειρά η συνάρτηση $f(x)=\ln\left((1+x)^{1+x}\right)+\ln\left((1-x)^{1-x}\right)/(-1,1)$, και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της λογαριθμικής συνάρτησης, προκύπτει ότι

$$f(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$$

$$=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}-1\right)\frac{x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}+1\right)\frac{x^n}{n}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}+2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}\qquad(1)$$

για κάθε $x\in(-1,1)$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$ συγκλίνει, έπεται ότι η

$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}/[-1,1]$ είναι αριστερά συνεχής στο 1 και

επομένως, με τη βοήθεια της (1):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}=g(1)=\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left((1+x)\ln(1+x)\right)+\lim_{x\to1^-}\left((1-x)\ln(1-x)\right)$$

$$=2\ln2+\lim_{x\to1^-}\frac{\left(\ln(1-x)\right)'}{\left((1-x)^{-1}\right)'}=2\ln2+\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)^{-1}}{(1-x)^{-2}}=2\ln2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31 (*)

Να αναπτυχθεί σε σειρά η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{2x^3}/(0,+\infty)$ και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2n+1)!}=\dfrac{1}{2e}$.

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας τη σχέση $e^t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$ για $t=x^3$ και $t=-x^3$, προκύπτουν οι σχέσεις

$$e^{x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!} \text{ και } e^{-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{n!},$$

οπότε θα είναι

$$f(x)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{3n}}{n!}}{2x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\dfrac{x^{3n}}{n!}}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^{2n+2}\right)\frac{x^{3(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2\frac{x^{6n}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n}}{(2n+1)!} \qquad (1)$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{6n}}{(2n+1)!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6nx^{6n-1}}{(2n+1)!} \qquad (2)$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Από την άλλη, η παράγωγος της συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ είναι

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2}\frac{\left(\left(e^{x^3}\right)'-\left(e^{-x^3}\right)'\right)x^3-3x^2\left(e^{x^3}-e^{-x^3}\right)}{x^6}\\&=\frac{1}{2}\frac{\left(3x^2e^{x^3}+3x^2e^{-x^3}\right)x^3-3x^2\left(e^{x^3}-e^{-x^3}\right)}{x^6}\\&=\frac{3}{2}\frac{\left(e^{x^3}+e^{-x^3}\right)x^3-\left(e^{x^3}-e^{-x^3}\right)}{x^4} \qquad (3)\end{aligned}$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6nx^{6n-1}}{(2n+1)!}=\frac{3}{2}\frac{\left(e^{x^3}+e^{-x^3}\right)x^3-\left(e^{x^3}-e^{-x^3}\right)}{x^4}$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $x=1$, προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2e}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 37 (*)

Να αναπτυχθούν σε σειρές τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^x \cos t^2 dt$, β) $\int_0^x e^{-t^2} dt$, γ) $\int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+t^4}-1}{t^2} dt$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή

$$\cos t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)!}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι

$$\int_0^x \cos t^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^{4n}}{(2n)!} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} \right]_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}.$$

β) Επειδή

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

γ) Επειδή

$$\frac{\sqrt[4]{1+t^4}-1}{t^2}=\frac{\left(1+t^4\right)^{\frac{1}{4}}-1}{t^2}$$

$$=\frac{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)\left(t^4\right)^n}{n!}-1}{t^2}$$

$$=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\cdots\left(-\frac{4n-5}{4}\right)t^{4n}}{n!}}{t^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)\cdot 3\cdot 7\cdots(4n-5)}{4^n n!}t^{4n-2}$$

για κάθε $t\in(-1,1)\setminus\{0\}$, προκύπτει ότι

$$\int_0^x\frac{\sqrt[4]{1+t^4}-1}{t^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)\cdot 3\cdot 7\cdots(4n-5)}{4^n n!}\int_0^x t^{4n-2}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)\cdot 3\cdot 7\cdots(4n-5)}{4^n n!(4n-1)}x^{4n-1}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 38 (*)

Να υπολογισθεί, κατά προσέγγιση, η τιμή του $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ εκφράζοντας αυτό σε σειρά και χρησιμοποιώντας τρεις όρους αυτής. Ποιο είναι το σφάλμα της προσέγγισης;

ΛΥΣΗ

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(x^4\right)^n$$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^{4n}$, προκύπτει ότι

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_0^{1/2} 1dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!} \int_0^{1/2} x^{4n} dx$$

$$= [x]_0^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!(4n+1)} \left[x^{4n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{5n+1} n!(4n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^6 \cdot 1! \cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2^{11}\cdot 2!\cdot 9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^{16}\cdot 3!\cdot 13} + \cdots \simeq 0.496953.$$

Επειδή η σειρά που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της τιμής του δοσμένου ορισμένου ολοκληρώματος είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$ με $\alpha_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και (α_n) φθίνουσα, προκύπτει ότι το σφάλμα της προσέγγισης που έγινε χρησιμοποιώντας τους τρεις πρώτους όρους θα είναι μικρότερο από τον $\alpha_4 = 0.0000029$.

ΑΣΚΗΣΗ 20 (Θ)

Να αποδειχθεί η πρόταση 3.1.

ΛΥΣΗ

Υποθέτοντας ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_0^n$ συγκλίνει, θα αποδειχθεί ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \left(-|x_0|, |x_0|\right)$.

Πραγματικά, από τη συγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_0^n$ προκύπτει ότι η ακολουθία $\left(\alpha_n x_0^n\right)$ είναι μηδενική, και επομένως φραγμένη.

Έτσι, αν $M > 0$ με $\left|\alpha_n x_0^n\right| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, προκύπτει ότι

$$\left|\alpha_n x^n\right| \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

για κάθε $x \in \left(-|x_0|, |x_0|\right)$ και $n \in \mathbb{N}^*$, και επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ συγκλίνει, έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης Ι, ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \left(-|x_0|, |x_0|\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 22 (*)

Να ευρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών:

α) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}x^n$, β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot(2n-1)^2}{2^{2n}(2n)!}x^n$,

γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}x^n$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Αν ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι οι ακτίνες σύγκλισης των δοσμένων δυναμοσειρών αντίστοιχα, τότε θα είναι:

α)

$$\rho_1=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)!(n+3)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+3)}{n!(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{n+2}=+\infty$$

β)

$$\rho_2=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^{2n}(2n)!}}{\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)^2}{2^{2n+2}(2n+2)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4(2n+1)(2n+2)}{(2n+1)^2}=4$$

γ) $$\rho_3=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{n!}{\alpha^n}}{(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{\alpha^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|}{n+1}=0.$$

Τα αντίστοιχα διαστήματα σύγκλισης I_1,I_2,I_3 είναι

$I_1=(-\infty,+\infty)$, $I_2=(-4,4)$, $I_3=\{0\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 24 (*)

Να ευρεθεί το σύνολο των σημειών $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n (n+2)^2}(x-5)^n$ συγκλίνει.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $t = x-5$, τότε προκύπτει η αντίστοιχη δυναμοσειρά κέντρου 0: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n (n+2)^2} t^n$,

η οποία έχει ακτίνα σύγκλισης

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n+1}{3^n (n+2)^2}}{\dfrac{2n+3}{3^{n+1} (n+3)^2}} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^2 = 3$$

Επομένως, η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n (n+2)^2} t^n$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $t \in (-3,3)$ και δεν συγκλίνει για κάθε $t \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$. Για τη σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης έχουμε ότι:

1. Αν $t=-3$, τότε προκύπτει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n+2)^2}$ η οποία συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz, αφού η ακολουθία $\left(\frac{2n+1}{(n+2)^2} \right)$ είναι φθίνουσα και μηδενική.

2. Αν $t=3$, τότε προκύπτει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+2)^2}$ η οποία απειρίζεται θετικά, αφού $\frac{2n+1}{(n+2)^2}\geq\frac{1}{3n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=+\infty$.

Κατόπιν τούτων, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n(n+1)^2}t^n$ συγκλίνει μόνο για τα $t\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει η σχέση $-3\leq t<3$.

Άρα το διάστημα $[2,8)$ είναι το ζητούμενο σύνολο των σημείων για το οποίο η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n(n+2)^2}(x-5)^n$ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 29

Να αποδειχθεί η τριγωνομετρική ταυτότητα
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$
με τη βοήθεια των δυναμοσειρών.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τις σειρές Maclaurin του ημιτόνου και του συνημιτόνου, προκύπτει ότι
$$\sin x\cos x = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (1)$$
όπου
$$f_n(x)\overset{1}{=}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}\cdot(-1)^{n-i}\frac{x^{2(n-i)}}{(2(n-i))!}$$
$$=(-1)^{n-1}x^{2n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)!(2n-2i)!}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\sum_{i=1}^{n}\binom{2n-1}{2i-1}$$
$$\overset{2}{=}\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$
Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι
$$2\sin x\cos x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin 2x,$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 (Θ)

Να αποδειχθεί η πρόταση 4.1.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, επειδή

$$\limsup \sqrt[n]{|n\alpha_n|} = \left(\limsup \sqrt[n]{n}\right)\left(\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) = 1 \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}$$

προκύπτει ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμόσειρας $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1}$ των παραγώγων είναι επίσης ρ.

Κατόπιν τούτων, επειδή οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα[10] σε κάθε διάστημα της μορφής $[-r, r]$ με $0 < r < \rho$, προκύπτει ότι θα ισχύει[11]

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1}$$

για κάθε $x \in (-\rho, \rho)$.

[10] Σύμφωνα με την πρόταση 3.3.

[11] Εφαρμόζοντας το πόρισμα 2.5 για τη συνάρτηση $f_n(x) = x^n / [-r, r]$.

ΑΣΚΗΣΗ 32 (*)

Να αναπτυχθεί σε σειρά η παράγωγος της $f(x)=x^2e^{-x}/\mathbb{R}$, και στη συνέχεια να ευρεθεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n+1}\frac{n+2}{n!}$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας το άθροισμα της εκθετικής σειράς προκύπτει ότι

$$f(x)=x^2e^{-x}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n!} \qquad (1)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε όμως, παραγωγίζοντας την προηγούμενη δυναμοσειρά, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)\frac{x^{n+1}}{n!}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Από την άλλη, η παράγωγος της $f/\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)\frac{x^{n+1}}{n!}=xe^{-x}(2-x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν εφαρμοσθεί η προηγούμενη σχέση για $x=2$, προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)\frac{2^{n+1}}{n!}=0$$

και επομένως $$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n+1}\frac{n+2}{n!}=4.$$

ΑΣΚΗΣΗ 33

Να ευρεθεί το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου της.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, παρατηρείται ότι η ακτίνα σύγκλισης ρ της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ είναι

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+3)=+\infty$$

οπότε η σειρά συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ /\ \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

και

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}2nx^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}=f(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Κατόπιν τούτου, η ζητούμενη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ θα είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - y = 0.$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι δεύτερης τάξης, γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές, και για τη λύση της θεωρούμε την αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

η οποία δίδει λύσεις $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$.

Άρα, η γενική λύσης της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}.$$

Τότε όμως, επειδή $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, προκύπτει το σύστημα

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= c_1 e^0 + c_2 e^0 \\ 1 &= c_1 e^0 - c_2 e^0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Άρα, θα είναι

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{x} - \frac{1}{2} e^{-x} = \sinh x,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 34

Να λυθεί, με τη βοήθεια μιας δυναμοσειράς, η διαφορική εξίσωση

$$y'' - xy = 0, \text{ όταν } y(0) = 0 \text{ και } y'(0) = 1.$$

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, τότε θα είναι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n x^{n-1} \text{ και } f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Οι συντελεστές α_0, α_1 προκύπτουν εύκολα:

$$\alpha_0 = f(0) = 0 \text{ και } \alpha_1 = f'(0) = 1.$$

Επιπλέον, θα ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$f''(x) - xf(x) = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n n(n-1) x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+1} = 0$$

$$2\alpha_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+1} = 0$$

$$2\alpha_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_{n+3}(n+3)(n+2) - \alpha_n\right) x^{n+1} = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως,

$$\alpha_2 = 0 \text{ και } \alpha_{n+3} = \frac{\alpha_n}{(n+3)(n+2)}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Τότε όμως θα είναι

$$\alpha_{3n} = \frac{\alpha_{3n-3}}{3n(3n-1)} = \frac{\alpha_{3n-6}}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4)} = \cdots$$

$$= \frac{\alpha_0}{3n(3n-1)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} = 0$$

$$\alpha_{3n+1} = \frac{\alpha_{3n-2}}{(3n+1)3n} = \frac{\alpha_{3n-5}}{(3n+1)3n(3n-2)(3n-3)} = \cdots$$

$$= \frac{\alpha_1}{(3n+1)3n\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} = \frac{1}{(3n+1)3n\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}$$

$$\alpha_{3n+2} = \frac{\alpha_{3n-1}}{(3n+2)(3n+1)} = \frac{\alpha_{3n-4}}{(3n+2)(3n+1)(3n-1)(3n-2)} = \cdots$$

$$= \frac{\alpha_2}{(3n+2)(3n+1)\cdots 8\cdot 7\cdot 5\cdot 4} = 0.$$

Άρα, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3n(3n+1)} x^{3n+1}$.

Η προηγούμενη δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3n(3n+1)}}{\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3n(3n+1)(3n+3)(3n+4)}} = \lim_{n\to\infty}(3n+3)(3n+4) =$$

Άρα η συνάρτηση-λύση ορίζεται σε όλη την πραγματική ευθεία.