ΔΙΑΛΕΞΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Επανάληψη: ορισμένο ολοκλήρωμα
Ολοκλήρωση συναρτήσεων σε ορθογώνια
Κριτήρια ολοκληρωσιμότητας
Ιδιότητες διπλού ολοκληρώματος
Επαναληπτικό ολοκλήρωμα

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ - ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Διαμέριση ενός κλειστού διαστήματος $\left[\alpha,\beta\right]\subseteq\mathbb{R}$ ονομάζεται κάθε πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο $\delta=\left(\mathrm{x_i}\right),\ \mathrm{i}=0,1,...,\mathrm{n}$ σημείων του $\left[\alpha,\beta\right]$ τέτοιο ώστε

$$\alpha=\mathrm{x_0}<\mathrm{x_1}<\cdots<\mathrm{x_{n-1}}<\mathrm{x_n}=\beta.$$

Το σύνολο των διαμερίσεων του διαστήματος $\left[\alpha,\beta\right]$ σημειώνεται με $\Delta\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)$.

Παρατήρηση

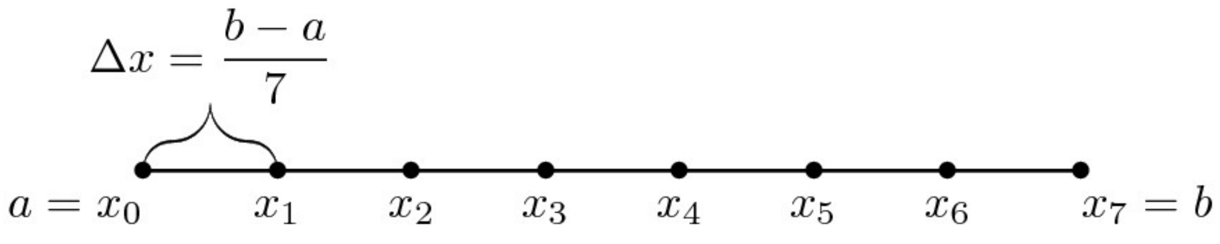
Σε πολλές περιπτώσεις, χρησιμοποιείται η διαμέριση

$$\delta_n=\left(x_i^{\ n}\right), i=0,1,2,\ldots,n,\quad n\in\mathbb{N}^*$$

που προκύπτει διαμερίζοντας ένα διάστημα $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα $\left[x_{i-1}^{\ n},x_i^{\ n}\right]$. Στην περίπτωση αυτή, τα διαστήματα που προκύπτουν έχουν μήκος $\dfrac{b-a}{n}$, δηλαδή τα άκρα τους δίνονται από τον τύπο

$$x_i^{\ n}=a+i\frac{b-a}{n},\qquad i=0,1,2,\ldots,n$$

όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα για $n=7$



Λεπτότητα της διαμέρισης $\delta = (x_i), \quad i = 0,1,...,n$ ονομάζεται ο αριθμός

$$\lambda(\delta) = \max\{x_i - x_{i-1} : i \in [n]\}.$$

Μια διαμέριση $\delta \in \Delta([\alpha,\beta])$ ονομάζεται **λεπτότερη** μιας διαμέρισης $\delta' \in \Delta([\alpha,\beta])$ όταν $\delta' \subseteq \delta$. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι $\lambda(\delta) \leq \lambda(\delta')$.

Έστω $f/[\alpha,\beta]$ μια φραγμένη συνάρτηση και $\delta \in \Delta([\alpha,\beta])$ με $\delta = (x_i), \quad i = 0,1,...,n$. Τότε ορίζουμε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ για $i \in [n]$ και

$$M_i(f) = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$m_i(f) = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Τα αθροίσματα

$$U(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i \text{ και } L(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i$$

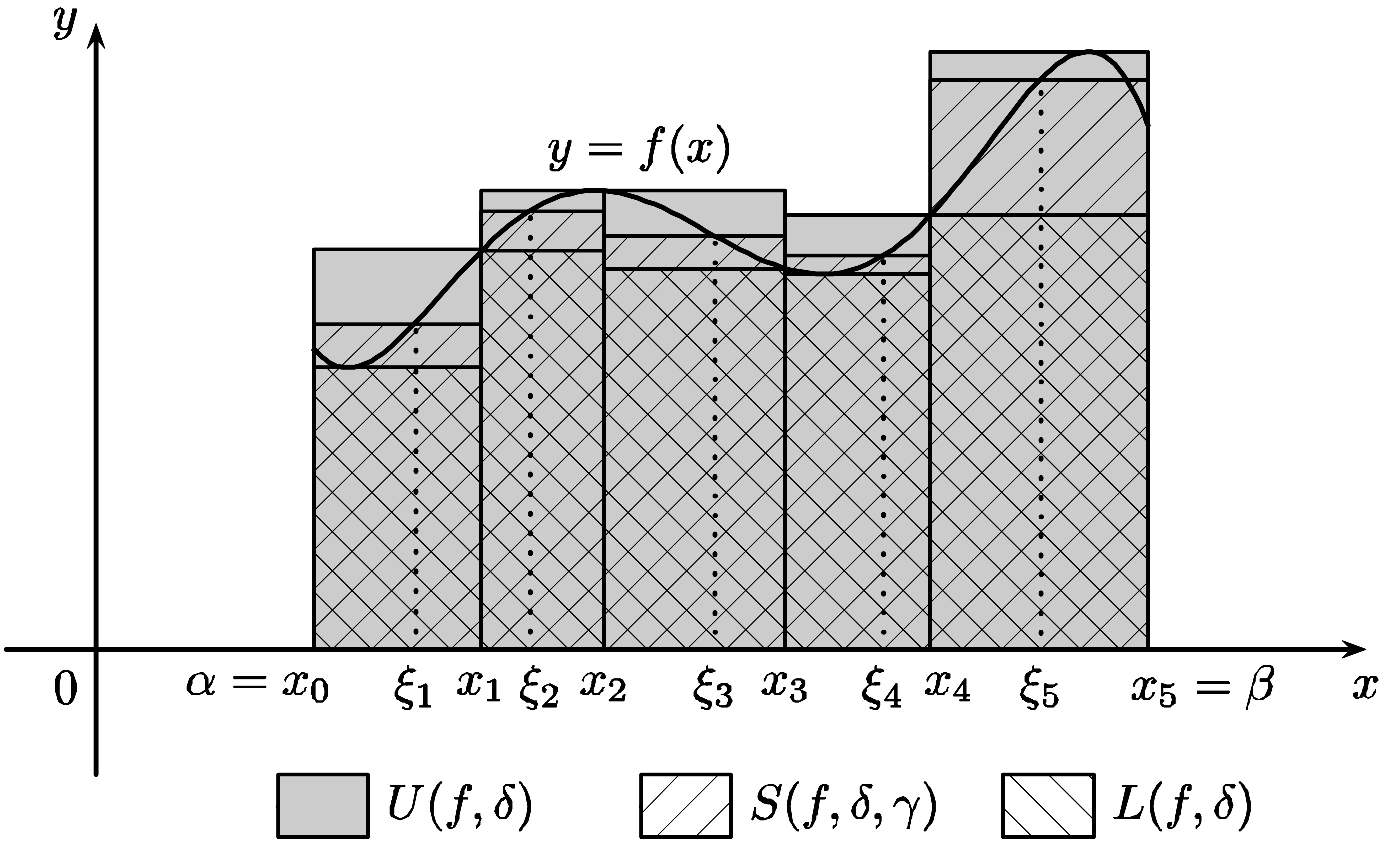
ονομάζονται αντίστοιχα **άνω** και **κάτω άθροισμα** της συνάρτησης f για τη διαμέριση δ.

Αν $\gamma = (\xi_i), \ i \in [n]$ είναι μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της διαμέρισης $\delta = (x_i), i = 0,1,...,n$, δηλαδή $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i \in [n]$, τότε το άθροισμα

$$S(f,\delta,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ονομάζεται **ενδιάμεσο άθροισμα** της συνάρτησης f για τη διαμέριση δ και την επιλογή γ.

Γεωμετρικά, για $f \geq 0$ τα $U(f,\delta), L(f,\delta)$ και $S(f,\delta,\gamma)$ είναι αθροίσματα από εμβαδά ορθογωνίων, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Ιδιότητες των αθροισμάτων

1. $m(\beta-\alpha) \leq L(f,\delta) \leq S(f,\delta,\gamma) \leq U(f,\delta) \leq M(\beta-\alpha)$, όπου

$$M = \sup\{f(x) : x \in [\alpha,\beta]\} \text{ και}$$

$$m = \inf\{f(x) : x \in [\alpha,\beta]\}.$$

2. $L(-f,\delta) = -U(f,\delta)$ και $U(-f,\delta) = -L(f,\delta)$.

3. $L(f,\delta') \leq L(f,\delta)$ και $U(f,\delta') \geq U(f,\delta)$, αν η δ είναι λεπτότερη της δ'.

4. $L(f,\delta_1) \leq U(f,\delta_2)$, για κάθε $\delta_{1,}\delta_2 \in \Delta([\alpha,\beta])$.

Αν $f/[\alpha,\beta]$ μια φραγμένη συνάρτηση, οι αριθμοί

$$U(f) = \inf\{U(f,\delta) : \delta \in \Delta([\alpha,\beta])\}$$

και

$$L(f) = \sup\{L(f,\delta) : \delta \in \Delta([\alpha,\beta])\}$$

ονομάζονται αντίστοιχα **άνω** και **κάτω ολοκλήρωμα** της f.

Από τις ιδιότητες 1 και 4 του άνω και του κάτω αθροίσματος προκύπτει ότι

$$m(\beta-\alpha) \leq L(f) \leq U(f) \leq M(\beta-\alpha).$$

Αν $L(f) = U(f)$, τότε η συνάρτηση ονομάζεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemann** (ή απλά **ολοκληρώσιμη**), η δε κοινή αυτή τιμή ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα κατά Riemann** (ή απλά **ορισμένο ολοκλήρωμα**) της συνάρτησης στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και σημειώνεται με

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Οι αριθμοί α, β ονομάζονται **άκρα του ορισμένου ολοκληρώματος**.

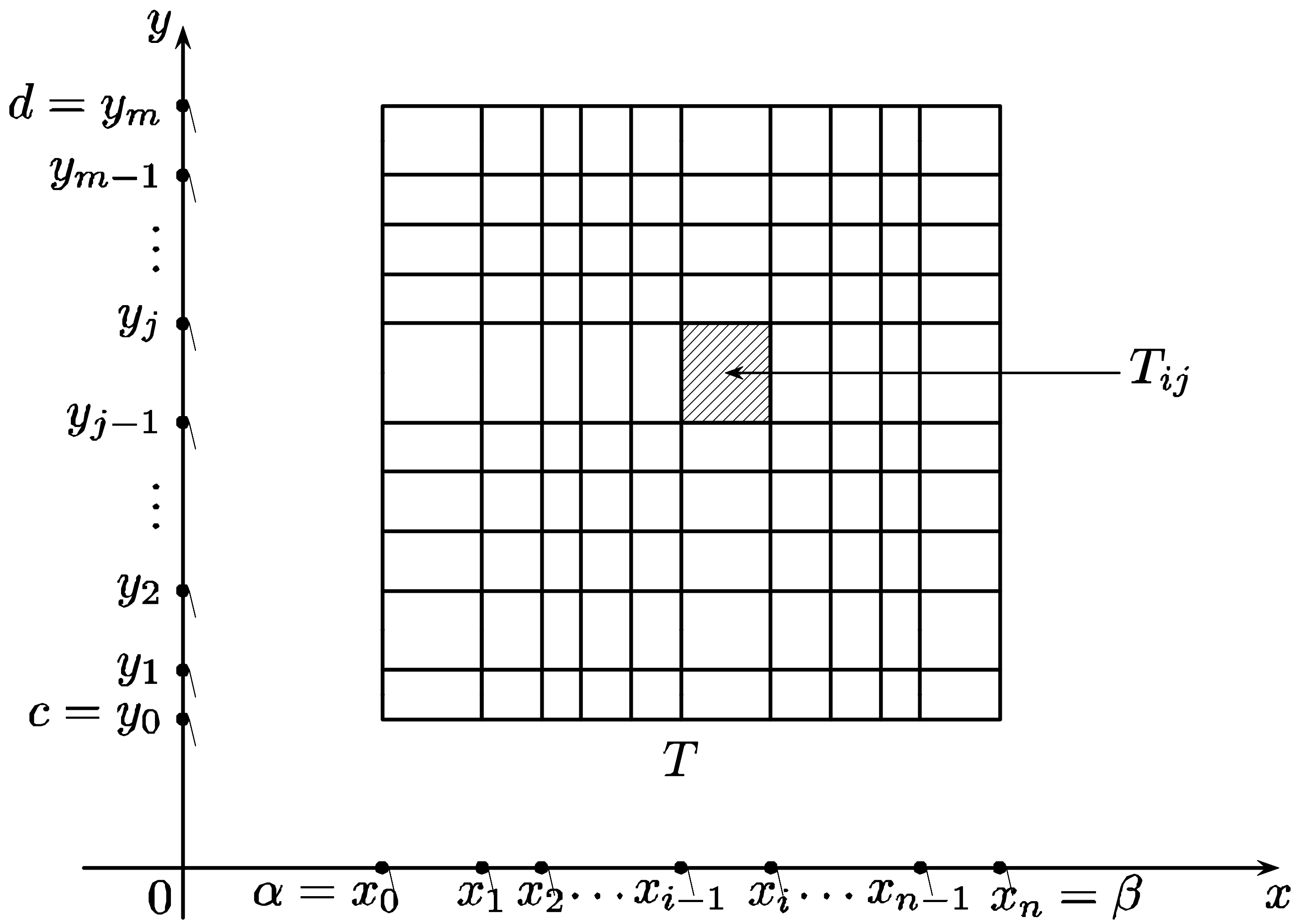
ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ

Θεωρούμε μια φραγμένη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα ορθογώνιο $T=[\alpha,\beta]\times[c,d]$ και δύο διαμερίσεις $\delta_1\in\Delta([\alpha,\beta])$ και $\delta_2\in\Delta([c,d])$ με

$$\delta_1=(x_i),\ i=0,1,\dots,n \text{ και } \delta_2=(y_j),\ j=0,1,\dots,m.$$

Το ορθογώνιο T χωρίζεται σε $n\cdot m$ ορθογώνια $T_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, όπου $i\in[n]$ και $j\in[m]$.



Τότε, ορίζουμε

$$\mathbf{M_{ij}}(\mathbf{f}) = \sup\left\{f(x,y) : (x,y) \in T_{ij}\right\},$$

$$\mathbf{m_{ij}}(\mathbf{f}) = \inf\left\{f(x,y) : (x,y) \in T_{ij}\right\}$$

και

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_j = y_j - y_{j-1},$$

για κάθε $i \in [n]$ και $j \in [m]$.

Τα αθροίσματα

$$U(f, \delta_1 \times \delta_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j$$

και

$$L(f, \delta_1 \times \delta_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j$$

ονομάζονται **άνω** και **κάτω άθροισμα** της συνάρτησης f για τις διαμερίσεις δ_1, δ_2.

Αν $\gamma_1 = (\xi_i)$, $i \in [n]$ και $\gamma_2 = (\eta_j)$, $j \in [m]$ είναι επιλογές ενδιάμεσων σημείων των διαμερίσεων δ_1 και δ_2 αντίστοιχα, δηλαδή $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i \in [n]$ και $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ για κάθε $j \in [m]$, τότε το άθροισμα

$$S(f, \delta_1 \times \delta_2, \gamma_1 \times \gamma_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

ονομάζεται **ενδιάμεσο άθροισμα** της συνάρτησης f για τις διαμερίσεις δ_1, δ_2 και τις επιλογές γ_1, γ_2.

Ιδιότητες

1. $m(\beta-\alpha)(d-c) \le L(f,\delta_1\times\delta_2) \le S(f,\delta_1\times\delta_2,\gamma_1\times\gamma_2)$
$\le U(f,\delta_1\times\delta_2) \le M(\beta-\alpha)(d-c)$, όπου
$M=\sup\{f(x,y):(x,y)\in T\}$ και $m=\inf\{f(x,y):(x,y)\in T\}$.
2. $L(-f,\delta_1\times\delta_2)=-U(f,\delta_1\times\delta_2)$, $U(-f,\delta_1\times\delta_2)=-L(f,\delta_1\times\delta_2)$.
3. $L(f,\delta_1'\times\delta_2')\le L(f,\delta_1\times\delta_2)$ και $U(f,\delta_1'\times\delta_2')\ge U(f,\delta_1\times\delta_2)$,
αν η δ_1 λεπτότερη της δ_1' και η δ_2 λεπτότερη της δ_2'.
4. $L(f,\delta_1'\times\delta_2')\le U(f,\delta_1\times\delta_2)$,
για κάθε $\delta_1,\delta_1'\in\Delta([\alpha,\beta])$ και $\delta_2,\delta_2'\in\Delta([c,d])$.

Αν $f/[\alpha,\beta]\times[c,d]$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, οι αριθμοί

$$\mathbf{U}(\mathbf{f})=\inf\{U(f,\delta_1\times\delta_2):\delta_1\in\Delta([\alpha,\beta]),\delta_2\in\Delta([c,d])\}$$
$$\mathbf{L}(\mathbf{f})=\sup\{L(f,\delta_1\times\delta_2):\delta_1\in\Delta([\alpha,\beta]),\delta_2\in\Delta([c,d])\}$$

ονομάζονται αντίστοιχα **άνω και κάτω ολοκλήρωμα** της f. Από τις ιδιότητες 1 και 4 των άνω και κάτω αθροισμάτων, προκύπτει ότι

$$m(\beta-\alpha)(d-c)\le L(f)\le U(f)\le M(\beta-\alpha)(d-c).$$

Αν $L(f)=U(f)$ τότε η f ονομάζεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemann** (ή, απλά, **ολοκληρώσιμη**), η δε κοινή αυτή τιμή ονομάζεται **διπλό ολοκλήρωμα** της f στο ορθογώνιο $T=[\alpha,\beta]\times[c,d]$ και σημειώνεται με

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy.$$

Παράδειγμα

Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = x\sin y / [1,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

και ζητείται να αποδειχθεί ότι είναι ολοκληρώσιμη και να υπολογισθεί το διπλό της ολοκλήρωμα.

Για το σκοπό αυτό, κατ' αρχήν θεωρούμε $n, m \in \mathbb{N}^*$ και διαμερίζουμε τα διαστήματα $[1,2]$ και $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ σε n και m ίσα μέρη αντίστοιχα, οπότε προκύπτουν οι διαμερίσεις

$$\delta_1 = (x_i),\ i = 0,1,...,n \text{ με } x_i = 1 + \frac{i}{n}$$

και

$$\delta_2 = (y_j),\ j = 0,1,...,m \text{ με } y_j = \frac{\pi j}{2m},$$

των διαστημάτων $[1,2]$ και $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ αντίστοιχα.

Τότε θα είναι $\Delta x_i = \frac{1}{n},\ \Delta y_j = \frac{\pi}{2m}$.

Επιπλέον,

$$U(f,\delta_1\times\delta_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_{ij}(f)\Delta x_i\Delta y_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(1+\frac{i}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi j}{2m}\right)\frac{1}{n}\frac{\pi}{2m}=\frac{\pi}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\sum_{j=1}^{m}\sin\left(\frac{\pi j}{2m}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2nm}\left(n+\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right)\sin\left(\frac{(m+1)\pi}{4m}\right)\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4m}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3n+1}{n}\sin\left(\frac{(m+1)\pi}{4m}\right)\frac{\frac{\pi}{4m}}{\sin\left(\frac{\pi}{4m}\right)} \qquad (1)$$

Σημειώνεται ότι χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα:

$$\sum_{j=1}^{m}\sin(jx)=\sin\frac{(m+1)x}{2}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι

$$L(f,\delta_1\times\delta_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3n-1}{n}\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{4m}\right)\frac{\frac{\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}} \qquad (2)$$

Επειδή $L(f,\delta_1\times\delta_2)\le L(f)\le U(f)\le U(f,\delta_1\times\delta_2)$, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3n-1}{n}\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{4m}\right)\frac{\frac{\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}} \le L(f) \le U(f)$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3n+1}{n}\sin\left(\frac{(m+1)\pi}{4m}\right)\frac{\frac{\pi}{4m}}{\sin\left(\frac{\pi}{4m}\right)}, \text{για κάθε } n,m\in\mathbb{N}^*.(3)$$

Επιπλέον, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3n-1}{n}\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{4m}\right)\frac{\frac{\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}\lim_{m\to\infty}\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{4m}\right)\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

Ανάλογα, $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3n+1}{2}\sin\left(\frac{(m+1)\pi}{4m}\right)\frac{\frac{\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}}\right)=\frac{3}{2}$,

οπότε από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $U(f)=L(f)=\frac{3}{2}$.

Άρα η συνάρτηση $f(x,y)=x\sin y/[1,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

είναι ολοκληρώσιμη με $\iint_T x\sin y\,dxdy=\frac{3}{2}$.

Πρέπει να τονισθεί ότι τα διπλά ολοκληρώματα δεν υπολογίζονται στις εφαρμογές με τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα, αλλά με την βοήθεια επαναληπτικών ολοκληρωμάτων που συνήθως ανάγονται σε γινόμενο ορισμένων ολοκληρωμάτων. Εντούτοις, η μέθοδος που είδαμε είναι σημαντική για την κατανόηση και εμπέδωση της έννοιας του διπλού ολοκληρώματος.

2. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Στην παράγραφο αυτή, θα δοθούν δυο κριτήρια για την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων δυο μεταβλητών που ορίζονται σε ορθογώνια. Τα κριτήρια αυτά αποδεικνύονται ανάλογα με τα αντίστοιχα κριτήρια ολοκληρωσιμότητας συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Το πρώτο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, που δίδεται στην επόμενη πρόταση, στηρίζεται στα άνω και κάτω αθροίσματα.

Πρόταση 2.1

Μια φραγμένη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]\times[c,d]$ **είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε ε>0 υπάρχουν** $\delta_1 \in \Delta\left([\alpha,\beta]\right)$ **και** $\delta_2 \in \Delta\left([c,d]\right)$ **με**

$$U\left(f,\delta_1\times\delta_2\right)-L\left(f,\delta_1\times\delta_2\right)<\varepsilon.$$

Με εφαρμογή της πρότασης αυτής, προκύπτει ότι ενδιαφέρουσες κλάσεις συναρτήσεων δύο μεταβλητών είναι ολοκληρώσιμες.

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι οι συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σε ορθογώνια είναι ολοκληρώσιμες.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα κλάση συναρτήσεων είναι αυτή των μονότονων συναρτήσεων δύο μεταβλητών.

Μια συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]\times[c,d]$ ονομάζεται **αύξουσα ως προς x** (αντ. **φθίνουσα ως προς x**) όταν $f(x_1,y)\le f(x_2,y)$ (αντ. $f(x_1,y)\ge f(x_2,y)$) για κάθε $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1\le x_2$και $y\in[c,d]$.

Ανάλογα ορίζονται οι αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις ως προς y.

Μια συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]\times[c,d]$ ονομάζεται **μονότονη** όταν είναι αύξουσα ή φθίνουσα ως προς x και ως προς y. Έτσι, οι συναρτήσεις

$$f(x,y)=x^3\ln y/[0,2]\times[3,4],$$

$$g(x,y)=\frac{x^2e^x}{y^2+1}/[1,2]\times[0,2],$$

$$h(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x}}+y^3/[1,3]\times[-2,4],$$

$$\varphi(x,y)=e^{\frac{1}{x^2}}\cos y/[1,3]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

είναι μονότονες[1].

Αποδεικνύεται ότι κάθε μονότονη συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι ολοκληρώσιμη.

Το δεύτερο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, το οποίο αποδεικνύεται με τη βοήθεια της πρότασης 2.1, δίδεται στην επόμενη πρόταση και στηρίζεται στα ενδιάμεσα αθροίσματα.

---

[1] Η f είναι αύξουσα ως προς x και y, η g είναι αύξουσα ως προς x και φθίνουσα ως προς y, η h είναι φθίνουσα ως προς x και αύξουσα ως προς y, η φ είναι φθίνουσα ως προς x και y.

Πρόταση 2.2

Μια φραγμένη συνάρτηση $f / T=[\alpha, \beta] \times [c, d]$ **είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει αριθμός** $I \in \mathbb{R}$ **τέτοιος ώστε, για κάθε ε>0 υπάρχει θ>0 έτσι ώστε** $\left|S\left(f, \delta_1 \times \delta_2, \gamma_1 \times \gamma_2\right)-I\right|<\varepsilon$

για κάθε $\delta_1 \in \Delta([\alpha, \beta])$, $\delta_2 \in \Delta([c, d])$ **με** $\lambda\left(\delta_1\right)<\theta$, $\lambda\left(\delta_2\right)<\theta$ **και για οποιεσδήποτε επιλογές** γ_1, γ_2 **ενδιάμεσων σημείων των** δ_1, δ_2 **αντίστοιχα.**

Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι $I=\iint_T f(x, y) dxdy$.

Άμεση συνέπεια είναι η επόμενη πρόταση, η οποία χρησιμοποιείται για το (θεωρητικό) υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος.

Πρόταση 2.3

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f / T=[\alpha, \beta] \times [c, d]$ **ισχύει ο τύπος**

$$\iint_T f(x, y) dxdy=\lim_{n \rightarrow \infty} S\left(f, \delta_{1,n} \times \delta_{2,n}, \gamma_{1,n} \times \gamma_{2,n}\right)$$

όπου $\left(\delta_{1,n}\right),\left(\delta_{2,n}\right)$ **είναι δύο ακόλουθίες διαμερίσεων των** $[\alpha, \beta]$ **και** $[c, d]$ **αντίστοιχα με**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\left(\delta_{1,n}\right)=\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\left(\delta_{2,n}\right)=0,$$

και $\gamma_{1,n}, \gamma_{2,n}$ **είναι επιλογές ενδιάμεσων σημείων των διαμερίσεων** $\delta_{1,n}, \delta_{2,n}$ **αντίστοιχα.**

Παράδειγμα

Αν για την $f(x,y)=y^3e^x \,/\, T=[0,1]\times[0,1]$ ληφθούν $\delta_{1,n}=(x_i^n)$, $i=0,1,\dots,n$, $\delta_{2,n}=(y_j^n)$, $j=0,1,\dots,n$, $\gamma_{1,n}=(\xi_i^n)$, $i\in[n]$ και $\gamma_{2,n}=(\eta_j^n)$, $j\in[n]$ με $x_0^n=y_0^n=0$, $x_i^n=\frac{i}{n}$, $\xi_i^n=\frac{i-1}{n}$ για κάθε $i\in[n]$ και $y_j^n=\eta_j^n=\frac{j}{n}$ για κάθε $j\in[n]$, τότε θα είναι $\Delta x_i^n=\Delta y_j^n=\frac{1}{n}$ και $\lambda(\delta_{1,n})=\lambda(\delta_{2,n})=\frac{1}{n}\to 0$, οπότε

$$S(f,\delta_{1,n}\times\delta_{2,n},\gamma_{1,n}\times\gamma_{2,n})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_i^n,\eta_j^n)\Delta x_i^n\Delta y_j^n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j^3}{n^3}e^{\frac{i-1}{n}}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^5}\left(\sum_{j=1}^{n}j^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i-1}{n}}\right)=\frac{1}{n^5}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

Κατόπιν τούτων, θα είναι

$$\iint_T y^3e^x dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

$$=\frac{e-1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{e-1}{4}\cdot 1\cdot 1=\frac{e-1}{4}.$$

Χρησιμοποιήθηκε το γνωστό όριο από την Ανάλυση 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Το διπλό ολοκλήρωμα των συναρτήσεων που ορίζονται σε ορθογώνια έχει παρόμοιες ιδιότητες με το ορισμένο ολοκλήρωμα. Παρακάτω, δίδονται οι κυριότερες από αυτές.

1. Αν οι $f, g / T = [\alpha, \beta] \times [c, d]$ είναι ολοκληρώσιμες και $f(x, y) \leq g(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in T$, τότε ισχύει
$$\iint\limits_T f(x, y)\,dxdy \leq \iint\limits_T g(x, y)\,dxdy.$$
2. Αν η $f / T = [\alpha, \beta] \times [c, d]$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η $|f| / T$ είναι ολοκληρώσιμη, και ισχύει
$$\left|\iint\limits_T f(x, y)\,dxdy\right| \leq \iint\limits_T |f(x, y)|\,dxdy.$$
3. Έστω μια φραγμένη συνάρτηση $f / T = [\alpha, \beta] \times [c, d]$ και δύο μη επικαλυπτόμενα ορθογώνια T_1, T_2 με $T_1 \cup T_2 = T$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν οι περιορισμοί της στα ορθογώνια T_1, T_2 είναι ολοκληρώσιμες. Επιπλέον, ισχύει η σχέση
$$\iint\limits_T f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{T_1} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{T_2} f(x, y)\,dxdy.$$
Η παραπάνω ισότητα, που είναι επέκταση της σχέσης του Chasles για συναρτήσεις δύο μεταβλητών, ισχύει γενικότερα όταν το ορθογώνιο T ισούται με τη ένωση πεπερασμένου πλήθους μη επικαλυπτόμενων ανά δύο ορθογωνίων.

4. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω $f/T=[\alpha,\beta]\times[c,d]$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση. Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ η

$$g_x(y)=f(x,y)/[c,d]$$

είναι ολοκληρώσιμη, τότε ορίζεται η $h/[\alpha,\beta]$ με

$$h(x)=\int_c^d g_x(y)\,dy=\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Αν, επιπλέον, η συνάρτηση h είναι ολοκληρώσιμη τότε το ορισμένο ολοκλήρωμά της

$$\int_\alpha^\beta h(x)\,dx=\int_\alpha^\beta\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

ονομάζεται **επαναληπτικό ολοκλήρωμα** της f. Ανάλογα ορίζεται και το επαναληπτικό ολοκλήρωμα

$$\int_c^d\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Πρόταση 4.1

Αν για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/T=[\alpha,\beta]\times[c,d]$ οι $g_x(y)=f(x,y)/[c,d]$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε και η $h(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη και το ορισμένο ολοκλήρωμά της θα είναι ίσο με το διπλό ολοκλήρωμα της f, δηλαδή ισχύει ότι

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy=\int_\alpha^\beta\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Ανάλογα, αν οι συναρτήσεις $\varphi_y(x) = f(x,y)/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμες για $y \in [c,d]$ τότε ισχύει ότι

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Πρέπει να τονισθεί ότι είναι δυνατό μια συνάρτηση f/T να μην είναι ολοκληρώσιμη, ενώ υπάρχουν τα επαναληπτικά της ολοκληρώματα και είναι ίσα.

Από την άλλη, αν η συνάρτηση $f/T = [\alpha,\beta]\times[c,d]$ είναι μονότονη ή συνεχής τότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις της πρότασης 4.1, οπότε ισχύει ότι

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy \right) dx$$

Κατόπιν τούτων, τα διπλά ολοκληρώματα των μονότονων ή συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε ορθογώνια, υπολογίζονται με επαναληπτική ολοκλήρωση.

Παράδειγμα

Αν $f(x,y) = x\cos(x+y) / T = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]$ τότε

$$\iint_T x\cos(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x+y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin(x+y)\right)'\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\left[x\sin(x+y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right) + \left[\cos(x+y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)dy$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cos y + \cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right) - \cos y\right)dy$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\int_0^{\pi}\cos y\,dy - \int_0^{\pi}\sin y\,dy$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left[\sin y\right]_0^{\pi} + \left[\cos y\right]_0^{\pi}$$

$$= -2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να υπολογισθεί η τιμή των διπλών ολοκληρωμάτων:

α) $\iint_T \frac{\cos x}{1+y^2}dxdy,$ όπου $T=\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\times[0,1],$

β) $\iint_T \frac{ydxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},$ όπου $T=[0,1]\times[0,1].$

ΛΥΣΗ

α) $$\iint_T \frac{\cos x}{1+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_0^1 \frac{\cos x}{1+y^2}dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\left[\text{arctg}y\right]_0^1 dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\cdot\frac{\pi}{4}dx=\frac{\pi}{4}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{8}.$$

β) $$\iint_T \frac{ydxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^1 dx=-\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx \quad (1)$$

Προκειμένου να υπολογισθεί το τελευταίο ολοκλήρωμα της σχέσης (1) πρέπει να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\alpha + x^2}}\, dx$, όπου α>0.

Πραγματικά, αν τεθεί $\sqrt{\alpha + x^2} = t - x$ τότε είναι

$$\alpha + x^2 = t^2 - 2xt + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - \alpha}{2t},$$

οπότε $$dx = \frac{4t^2 - 2\left(t^2 - \alpha\right)}{4t^2} dt = \frac{t^2 + \alpha}{2t^2} dt$$

και $$t - x = t - \frac{t^2 - \alpha}{2t} = \frac{t^2 + \alpha}{2t}.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\alpha + x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha+1}+1} \frac{2t}{t^2 + \alpha} \frac{t^2 + \alpha}{2t^2} dt$$

$$= \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha+1}+1} \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha+1}+1} = \ln\left(\frac{\sqrt{\alpha+1}+1}{\sqrt{\alpha}}\right) \qquad (2)$$

Αν εφαρμοσθεί η σχέση (2) για α=1 και α=2 τότε, από τη σχέση (1), προκύπτει ότι

$$\iint_T \frac{y dx dy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 + x^2}}\, dx$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{1}}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}+1}\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού του διπλού ολοκληρώματος, ότι η συνάρτηση $f(x,y) = x \cdot e^y / [3,7]\times[0,1]$ είναι ολοκληρώσιμη, και να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματός της.

ΛΥΣΗ

Για $n, m \in \mathbb{N}^*$ θεωρούμε τις διαμερίσεις

$$\delta_1 = (x_i), i = 0,1,\dots,n \text{ και } \delta_2 = (y_j), j = 0,1,\dots,m$$

των διαστημάτων $[3,7]$ και $[0,1]$ αντίστοιχα, που ορίζονται από τις σχέσεις

$$x_i = 3 + \frac{7-3}{n} i = 3 + \frac{4}{n} i \text{ και } y_j = 0 + \frac{1-0}{m} j = \frac{j}{m}$$

για κάθε $i = 0,1,\dots,n$ και $j = 0,1,\dots,m$.

Τότε θα είναι $\Delta x_i = \frac{4}{n}$, $\Delta y_j = \frac{1}{m}$,

$$M_{ij}(f) = \sup\left\{f(x,y) : (x,y) \in [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\right\}$$

$$= \sup\left\{xe^y : x \in [x_{i-1}, x_i],\ y \in [y_{j-1}, y_j]\right\}$$

$$= x_i e^{y_j} = \left(3 + \frac{4i}{n}\right) e^{\frac{j}{m}}$$

και

$$m_{ij}(f) = \inf\left\{f(x,y) : (x,y) \in [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\right\}$$

$$= \inf\left\{xe^y : x \in [x_{i-1}, x_i],\ y \in [y_{j-1}, y_j]\right\}$$

$$= x_{i-1} e^{y_{j-1}} = \left(3 + \frac{4(i-1)}{n}\right) e^{\frac{j-1}{m}}$$

για κάθε $i \in [n]$ και $j \in [m]$. Κατόπιν τούτων, τα άνω και κάτω ολοκληρώματα της δοσμένης συνάρτησης είναι αντίστοιχα

$$U(f, \delta_1 \times \delta_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(f)\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(3+\frac{4i}{n}\right)e^{\frac{j}{m}}\frac{4}{n}\frac{1}{m}$$

$$= \frac{4}{nm}\sum_{i=1}^{n}\left(3+\frac{4i}{n}\right)\sum_{j=1}^{m}e^{\frac{j}{m}} = \frac{4}{mn}\left(3n+\frac{4n(n+1)}{2n}\right)\frac{e-1}{e^{\frac{1}{m}}-1}e^{\frac{1}{m}}$$

$$= 4(e-1)\left(5+\frac{2}{n}\right)\frac{\frac{1}{m}}{e^{\frac{1}{m}}-1}e^{\frac{1}{m}} \tag{1}$$

και

$$L(f, \delta_1 \times \delta_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(f)\Delta x_i \Delta y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(3+\frac{4(i-1)}{n}\right)e^{\frac{j-1}{m}}\frac{4}{n}\frac{1}{m} = \frac{4}{nm}\sum_{i=1}^{n}\left(3+\frac{4(i-1)}{n}\right)\sum_{j=1}^{m}e^{\frac{j-1}{m}}$$

$$= \frac{4}{mn}\left(3n+\frac{4n(n-1)}{2n}\right)\frac{e-1}{e^{\frac{1}{m}}-1}$$

$$= 4(e-1)\left(5-\frac{2}{n}\right)\frac{\frac{1}{m}}{e^{\frac{1}{m}}-1} \tag{2}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2), για το άνω και κάτω ολοκλήρωμα της δοσμένης συνάρτησης, ισχύουν διαδοχικά οι ανισότητες:

$$L(f,\delta_1\times\delta_2)\le L(f)\le U(f)\le U(f,\delta_1\times\delta_2)$$

$$4(e-1)\left(5-\frac{2}{n}\right)\frac{\frac{1}{m}}{e^{\frac{1}{m}}-1}\le L(f)\le U(f)\le 4(e-1)\left(5+\frac{2}{n}\right)\frac{\frac{1}{m}}{e^{\frac{1}{m}}-1}e^{\frac{1}{m}}$$

για κάθε $m,n\in\mathbb{N}^*$.

Τότε όμως, για $n\to\infty$ και $m\to\infty$ προκύπτει ότι

$$4(e-1)\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{2}{n}\right)\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{m}}{e^{\frac{1}{m}}-1}\le L(f)\le U(f)$$

$$\le 4(e-1)\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{2}{n}\right)\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{m}}{e^{\frac{1}{m}}-1}\lim_{m\to\infty}e^{\frac{1}{m}},$$

οπότε

$$4(e-1)\cdot 5\cdot 1\le L(f)\le U(f)\le 4(e-1)\cdot 5\cdot 1\cdot 1$$

και συνεπώς, $L(f)=U(f)=20(e-1)$.

Άρα η δοσμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη, το δε διπλό της ολοκλήρωμα είναι

$$\iint\limits_{[3,7]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy=20(e-1).$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f / T = [0,1]\times[0,1]$, με

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \text{ ή } y\in\mathbb{Q} \\ 2, & \text{αν } x\notin\mathbb{Q} \text{ και } y\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη.

ΛΥΣΗ

Έστω $\delta_1=(x_i), i=0,1,...,n$ και $\delta_2=(y_j), j=0,1,...,m$ δύο οποιεσδήποτε διαμερίσεις του διαστήματος [0,1].

Επειδή κάθε ορθογώνιο $T_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $i\in[n], j\in[m]$, περιέχει και σημεία με άρρητες συντεταγμένες, προκύπτει ότι $M_{ij}(f)=2$ για κάθε $i\in[n]$ και $j\in[m]$.

Άρα,

$$U(f,\delta_1\times\delta_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_{ij}(f)\Delta x_i\Delta y_j$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\Delta y_j\right)=2 \qquad (1)$$

Εξάλλου, επειδή κάθε ορθογώνιο $T_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ περιέχει και σημεία των οποίων μια τουλάχιστον συντεταγμένη είναι ρητή προκύπτει ότι $m_{ij}(f)=x_{i-1}+y_{j-1}$ για κάθε $i\in[n]$ και $j\in[m]$.

Άρα,

$$L(f,\delta_1\times\delta_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}(f)\Delta x_i\Delta y_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{i-1}+y_{j-1})\Delta x_i\Delta y_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}\Delta x_i+\sum_{j=1}^{m}y_{j-1}\Delta y_j \qquad (2)$$

Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις

$$\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}\Delta x_i=x_0(x_1-x_0)+x_1(x_2-x_1)+\cdots+x_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$

$$=-\frac{1}{2}\left((x_1-x_0)^2+(x_2-x_1)^2+\cdots+(x_n-x_{n-1})^2-x_n^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left((x_1-x_0)^2+(x_2-x_1)^2+\cdots+(x_n-x_{n-1})^2\right)+\frac{1}{2}x_n^2$$

$$\le\frac{1}{2}.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\sum_{j=1}^{m}y_{j-1}\Delta y_j\le\frac{1}{2}$

και επομένως, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$$L(f,\delta_1\times\delta_2)\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι $U(f)=2$ και $L(f)\le 1$, οπότε θα είναι

$$L(f)<U(f)$$

και άρα η συνάρτηση f/T δεν είναι ολοκληρώσιμη.

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

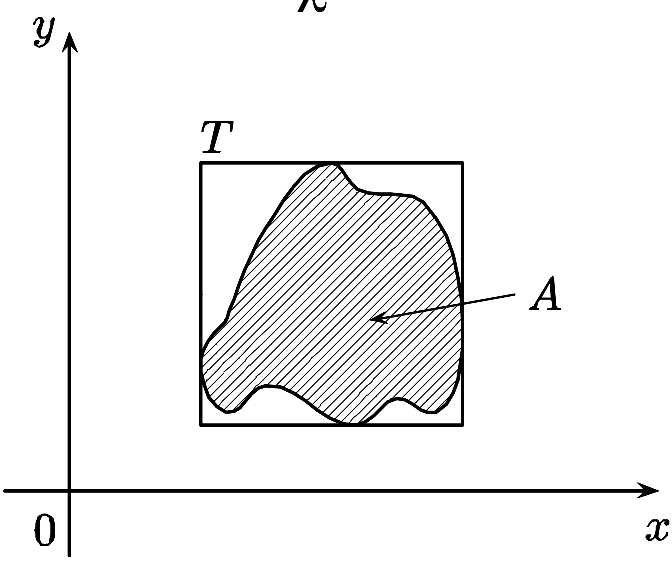
Ολοκλήρωση συναρτήσεων σε φραγμένα σύνολα
Αλλαγή μεταβλητών

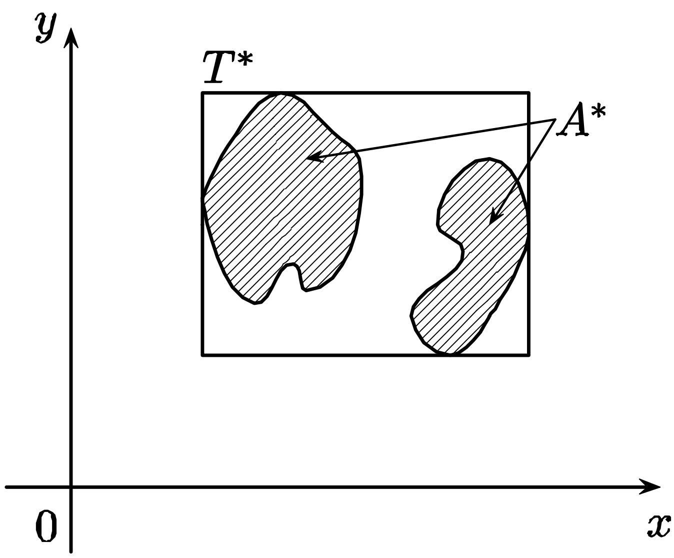
ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΦΡΑΓΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

Στην παράγραφο αυτή, θα επεκταθεί η έννοια του διπλού ολοκληρώματος για συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού είναι οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι φραγμένο όταν υπάρχουν $\varphi_1, \varphi_2 > 0$ με $|x| \leq \varphi_1$ και $|y| \leq \varphi_2$ για κάθε $(x, y) \in A$ ή, ισοδύναμα, όταν το σύνολο A περιέχεται σε ένα ορθογώνιο.

Στα επόμενα σχήματα δίδονται το φραγμένο συνεκτικό σύνολο A και το φραγμένο μη συνεκτικό σύνολο A^* τα οποία περιέχονται στα ορθογώνια T και T^* αντίστοιχα.





Η ολοκλήρωση των συναρτήσεων που ορίζονται σε φραγμένα σύνολα θα ορισθεί μέσω της ολοκλήρωσης των συναρτήσεων που ορίζονται σε ορθογώνια.

Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθεί η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.1

Έστω $f/A\subseteq\mathbb{R}^2$ **μια φραγμένη συνάρτηση με A φραγμένο σύνολο και T,** T_1 **δύο ορθογώνια τα οποία περιέχουν το A.**

Αν $\overline{f},\overline{f_1}$ **είναι οι επεκτάσεις της f στα T,** T_1 **αντίστοιχα, οι οποίες μηδενίζονται εκτός του A, τότε η** $\overline{f}/T$ **είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η** $\overline{f_1}/T_1$ **είναι ολοκληρώσιμη, και ισχύει η σχέση**

$$\iint_T \overline{f}(x,y)dxdy=\iint_{T_1}\overline{f_1}(x,y)dxdy.$$

Αν τώρα f είναι μια φραγμένη συνάρτηση ορισμένη στο φραγμένο σύνολο A, T ορθογώνιο που περιέχει το A και $\overline{f}/T$ με $\overline{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in A \\ 0, & (x,y)\in T\setminus A, \end{cases}$

τότε η συνάρτηση f/A ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** όταν η συνάρτηση $\overline{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο A. Στην περίπτωση αυτή, το διπλό ολοκλήρωμα της f στο A ορίζεται από τη σχέση

$$\iint_A f(x,y)dxdy=\iint_T \overline{f}(x,y)dxdy.$$

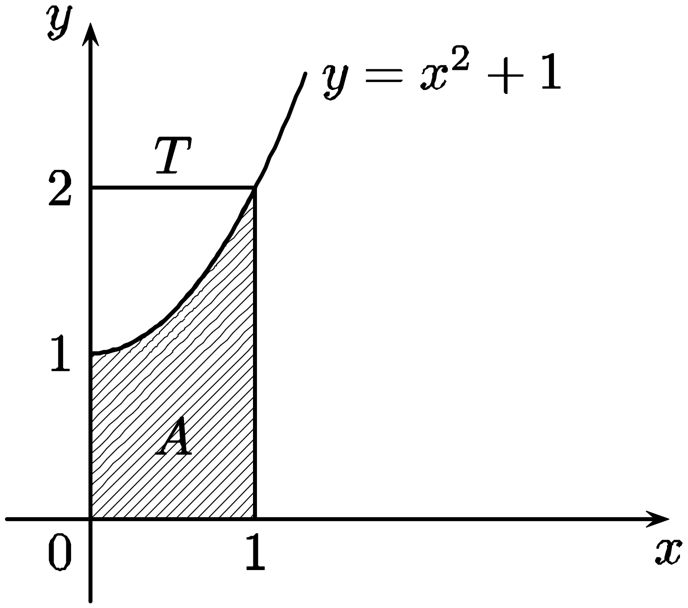
Η ολοκλήρωση της συνάρτησης f/A και το διπλό ολοκλήρωμά της είναι καλά ορισμένα αφού, όπως προκύπτει από τη πρόταση 5.1, δεν εξαρτώνται από την επιλογή του ορθογώνιου T.

Στις εφαρμογές, ως T χρησιμοποιείται το ελάχιστο ορθογώνιο (εφ' όσον υπάρχει) που περιέχει το A.

Παράδειγμα

Για τη συνάρτηση $f(x,y) = x\cos y / A$ με

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x^2 + 1 \text{ και } 0 \le x \le 1\}$$



είναι $T = [0,1] \times [0,2]$ και $\bar{f}(x,y) = \begin{cases} x\cos y, & \text{αν } (x,y) \in A \\ 0, & \text{αν } (x,y) \in T \setminus A. \end{cases}$

Συνεπώς,

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_T \bar{f}(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 \bar{f}(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2+1} \bar{f}(x,y)\,dy + \int_{x^2+1}^2 \bar{f}(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2+1} x\cos y\,dy + \int_{x^2+1}^2 0\,dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^{x^2+1} \cos y\,dy \right) dx$$

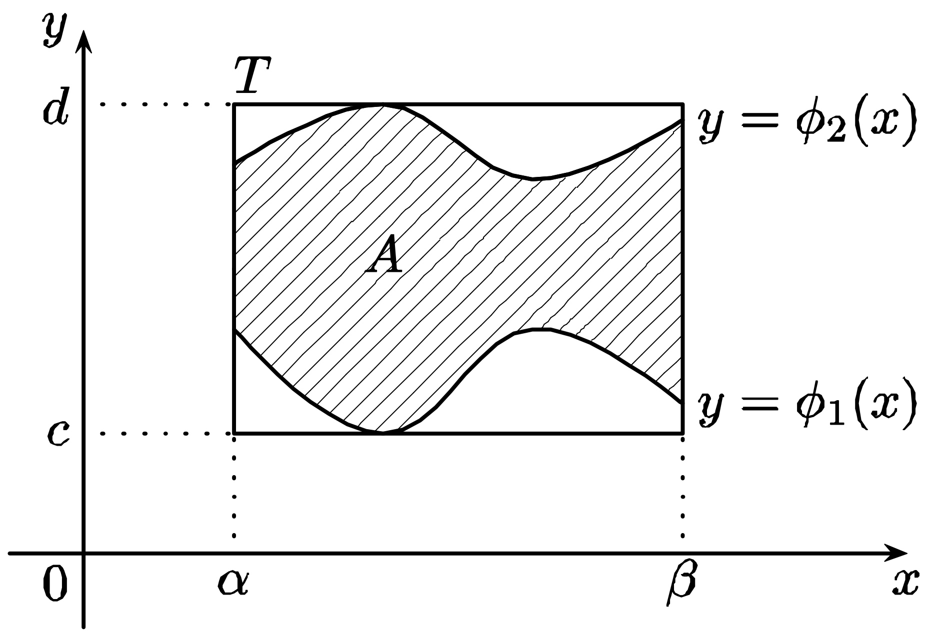
$$= \int_0^1 x [\sin y]_0^{x^2+1}\,dx = \int_0^1 x\sin(x^2+1)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\cos(x^2+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 1 - \cos 2).$$

Σημειώνεται ότι οι ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος της παραγράφου 3 επεκτείνονται σε συναρτήσεις που ορίζονται σε φραγμένα σύνολα.

Το διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί με επαναληπτική ολοκλήρωση στις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

1. Έστω $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \alpha\le x\le\beta \text{ και } \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, το σύνολο όπου $\varphi_1,\varphi_2/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.



Τότε ισχύει ότι

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy=\int_\alpha^\beta\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Πραγματικά,

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_T \overline{f}(x,y)\,dxdy=\int_\alpha^\beta\left(\int_c^d \overline{f}(x,y)\,dy\right)dx \quad (1)$$

όπου $c=\inf\{\varphi_1(x): x\in[\alpha,\beta]\}$ και $d=\sup\{\varphi_2(x): x\in[\alpha,\beta]\}$.

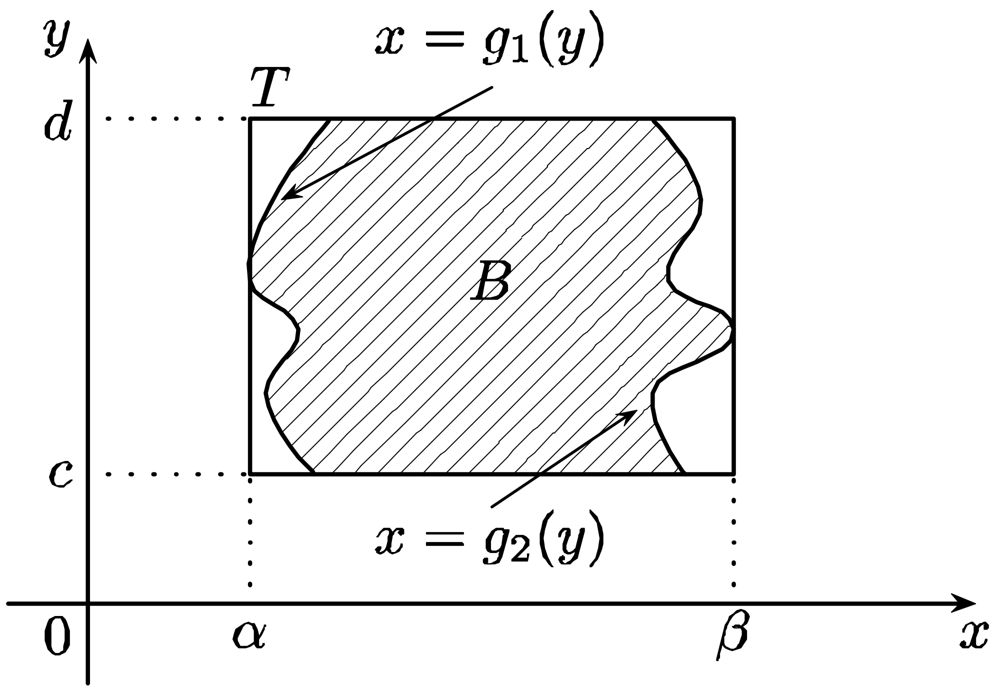
Επιπλέον, για $x \in [\alpha, \beta]$ είναι

$$\int_c^d \overline{f}(x,y)dy = \int_c^{\varphi_1(x)} \overline{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \overline{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} \overline{f}(x,y)dy$$

$$= \int_c^{\varphi_1(x)} 0dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} 0dy$$

$$= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

2. Έστω $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(y) \le x \le g_2(y) \text{ και } c \le y \le d\}$ το σύνολο, όπου g_1, $g_2 / [c,d]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με $g_1(y) \le g_2(y)$, για κάθε $y \in [c,d]$.



Τότε αποδεικνύεται, ανάλογα με τη προηγούμενη περίπτωση, ότι

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Παραδείγματα

1. Αν $f(x,y) = x^3 + 3y^2 x / A$ όπου

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \text{ και } 0 \le x \le 1\right\}$$

τότε είναι

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^3 + 3y^2 x\right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^3 y + y^3 x\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Αν

$$f(x,y) = \sqrt{x}\,y^3 / B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le x \le 4y^2, 0 \le y \le 1\right\}$$

τότε είναι

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{4y^2} \sqrt{x}\,y^3\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 y^3 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_{y^2}^{4y^2} dy = \frac{2}{3}\int_0^1 y^3\left(8y^3 - y^3\right) dy = \frac{2}{3}.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν φραγμένα σύνολα τα οποία μπορούν να διασπαθούν σε φραγμένα σύνολα των προηγουμένων δύο περιπτώσεων, οπότε το διπλό ολοκλήρωμα προκύπτει ως άθροισμα διπλών ολοκληρωμάτων των προηγούμενων μορφών.

Παράδειγμα

Ζητείται να ευρεθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_A x^2 y^2 dxdy$,

όπου A είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία

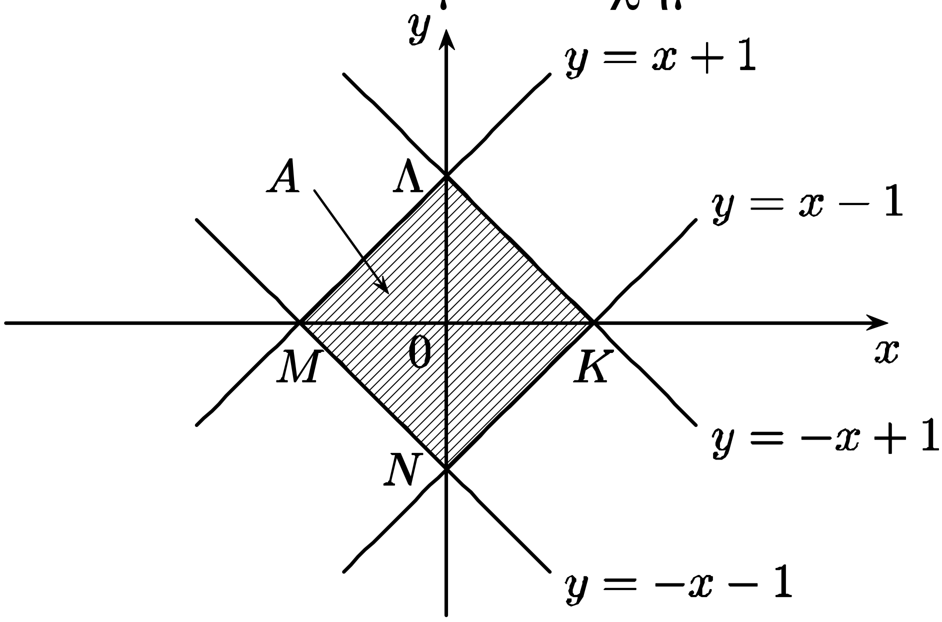
$$K(1,0), \Lambda(0,1), M(-1,0) \text{ και } N(0,-1).$$

Για το σκοπό αυτό, αρχικά, ευρίσκουμε τις εξισώσεις των πλευρών του δοσμένου τετραγώνου:

$$K\Lambda : y = -x + 1, \Lambda M : y = x + 1$$

$$MN : y = -x - 1, NK : y = x - 1$$

όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



Αν A_1, A_2, A_3 και A_4 είναι αντίστοιχα τα τρίγωνα ΟΚΛ, ΟΛΜ, ΟΜΝ και ΟΝΚ τότε προκύπτει ότι:

$$A_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ και } 0 \le y \le 1 - x\right\},$$

$$A_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0 \text{ και } 0 \le y \le x + 1\right\},$$

$$A_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0 \text{ και } -x - 1 \le y \le 0\right\},$$

$$A_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ και } x - 1 \le y \le 0\right\}.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint_{A_1} x^2y^2dxdy + \iint_{A_2} x^2y^2dxdy + \iint_{A_3} x^2y^2dxdy + \iint_{A_4} x^2y^2dxdy$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-x} x^2y^2dy\right)dx + \int_{-1}^0\left(\int_0^{x+1} x^2y^2dy\right)dx +$$

$$+ \int_{-1}^0\left(\int_{-x-1}^0 x^2y^2dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^0 x^2y^2dy\right)dx$$

$$= \int_0^1\left[\frac{x^2y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx + \int_{-1}^0\left[\frac{x^2y^3}{3}\right]_0^{x+1} dx + \int_{-1}^0\left[\frac{x^2y^3}{3}\right]_{-x-1}^0 dx +$$

$$+ \int_0^1\left[\frac{x^2y^3}{3}\right]_{x-1}^0 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^3}{3}dx + \int_{-1}^0 \frac{x^2(x+1)^3}{3}dx + \int_{-1}^0 \frac{x^2(x+1)^3}{3}dx$$

$$+ \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^3}{3}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx + \int_{-1}^0 x^2(x+1)^3 dx\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx + \int_1^0 (-t)^2(-t+1)^3 d(-t)\right)$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx = \frac{4}{3}B(3,4) = \frac{4}{3}\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{45}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A \frac{e^x y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 - 2x + 1}}\, dxdy$$

όπου A είναι το χωρίο του επιπέδου που ορίζεται από τις ανισότητες $x + y \le 1,\ x - y \le 1$ και $x \ge 0$.

ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό του χωρίου A, έπεται ότι

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \le y \le 1 - x \text{ και } 0 \le x \le 1 \right\}.$$

Έτσι, το ζητούμενο διπλό ολοκλήρωμα είναι

$$\iint_A \frac{e^x y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 - 2x + 1}}\, dxdy = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \frac{e^x y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 - 2x + 1}}\, dydx$$

$$= \int_0^1 e^x \left(\int_{x-1}^{1-x} \frac{y^2}{\sqrt{(1-x)^2 - y^2}} dy \right) dx \qquad (1)$$

Προκειμένου να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{x-1}^{1-x} \frac{y^2}{\sqrt{(1-x)^2 - y^2}} dy$$

τίθεται $y = (1-x)\sin\theta$, όπου $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Τότε θα είναι

$$\sqrt{(1-x)^2 - y^2} = \sqrt{(1-x)^2 - (1-x)^2 \sin^2\theta} = (1-x)\sqrt{1 - \sin^2\theta} = (1-x)\cos\theta,$$

$$dy = (1-x)\cos\theta d\theta$$

και

$$\int_{x-1}^{1-x}\frac{y^2}{\sqrt{(1-x)^2-y^2}}dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-x)^2\sin^2\theta(1-x)\cos\theta d\theta}{(1-x)\cos\theta}$$

$$=(1-x)^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\frac{(1-x)^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{(1-x)^2}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{(1-x)^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin(-\pi)\right)$$

$$=\frac{(1-x)^2\pi}{2} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\iint_A\frac{e^x y^2}{\sqrt{x^2-y^2-2x+1}}\,dxdy=\int_0^1 e^x\,\frac{(1-x)^2\pi}{2}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1(e^x)'(1-x)^2dx=\frac{\pi}{2}\left[e^x(1-x)^2\right]_0^1-\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^x\left((1-x)^2\right)'dx$$

$$=\frac{\pi}{2}(0-1)+\frac{\pi}{2}\int\ e^x\cdot 2(1-x)dx=-\frac{\pi}{2}+\pi\int_0^1(e^x)'(1-x)\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\pi\left[e^x(1-x)\right]_0^1-\pi\int_0^1 e^x(1-x)'dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\pi(0-1)+\pi\left[e^x\right]_0^1=-\frac{\pi}{2}-\pi+\pi e-\pi=\frac{\pi(2e-5)}{2}.$$

6. ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Όπως έχει ήδη λεχθεί, για τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος χρησιμοποιείται πολλές φορές αλλαγή μεταβλητής $x=\varphi(t)$, οπότε προκύπτει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{c}^{d} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

όπου $\alpha=\varphi(c)$ και $\beta=\varphi(d)$.

Αντίστοιχος τύπος θα δοθεί για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος.

Η κατάσταση εδώ είναι πιο πολύπλοκη, αφού πρέπει να γίνουν δύο αντικαταστάσεις, μια για το x και μια για το y, δηλαδή

$$x=\varphi(u,v) \text{ και } y=\sigma(u,v).$$

Πρακτικά, στον τύπο (1) το διαφορικό dx αντικαθίσταται από το $\varphi'(t)dt$. Στον αντίστοιχο τύπο για συναρτήσεις δύο μεταβλητών, οι μεταβλητές x, y εξαρτώνται και οι δύο από τις μεταβλητές u,v οπότε κατά την αντικατάσταση του γινομένου dxdy στο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{A} f(x,y)dxdy$$

θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν και οι τέσσερεις μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}, \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}$.

Ιακωβιανή ορίζουσα (ή ορίζουσα του Jacobi)

Αν $\varphi(u,v), \sigma(u,v) / \Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις, τότε η ορίζουσα

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial u} & \dfrac{\partial\sigma}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ονομάζεται **ιακωβιανή ορίζουσα** αυτών.

Παράδειγμα

Αν $\varphi(u,v) = v\sin u - u\cos v$, $\sigma(u,v) = v\cos u + u\sin v$ τότε είναι

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} v\cos u - \cos v & \sin u + u\sin v \\ -v\sin u + \sin v & \cos u + u\cos v \end{vmatrix}$$

$$= (v\cos u - \cos v)(\cos u + u\cos v) - $$
$$- (\sin u + u\sin v)(-v\sin u + \sin v)$$
$$= v(\cos^2 u + \sin^2 u) - u(\cos^2 v + \sin^2 v)$$
$$+ (uv - 1)(\cos u\cos v + \sin u\sin v)$$
$$= v - u + (uv-1)\cos(u-v).$$

Πρόταση 6.1

Έστω ότι οι συναρτήσεις $x=\varphi(u,v)$ **και** $y=\sigma(u,v)$ **έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, ορίζουν μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των χωρίων[2] A του xy επιπέδου και** A' **του uv-επιπέδου και η ιακωβιανή ορίζουσα τους** $J(u,v)$ **διατηρεί σταθερό πρόσημο.**

Αν η συνάρτηση f/A είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η

$$g(u,v)=f\left(\varphi(u,v),\sigma(u,v)\right)/A'$$

θα είναι επίσης ολοκληρώσιμη, με

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy=\iint_{A'} g(u,v)\left|J(u,v)\right|dudv.$$

Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου, και χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό, υπολογίζονται πολλά διπλά ολοκληρώματα.

Παρακάτω, γίνεται εφαρμογή του τύπου για δύο κλασικούς μετασχηματισμούς.

[2] Χωρίο είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου που περικλείεται από μια κλειστή καμπύλη.

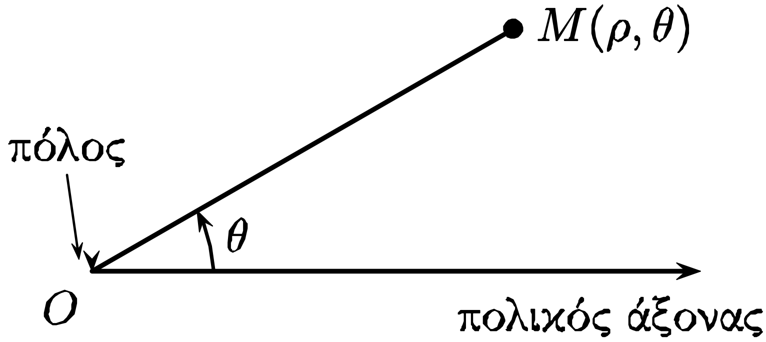
1. Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες

Πολικές συντεταγμένες

Όπως είναι γνωστό, η θέση ενός σημείου Μ του επιπέδου καθορίζεται από το ζεύγος (x,y)των καρτεσιανών του συντεταγμένων.

Ένας άλλος τρόπος για τον καθορισμό της θέσης των σημείων του επιπέδου είναι ο εξής:

Θεωρούμε ένα σημείο Ο του επιπέδου το οποίο ονομάζεται **πόλος** και ένα ημιάξονα με αφετηρία το Ο, ο οποίος ονομάζεται **πολικός άξονας**. Κατόπιν τούτου η θέση ενός σημείου Μ του επιπέδου καθορίζεται από το ζεύγος (ρ,θ), όπου ρ είναι η απόσταση του σημείου Μ από τον πόλο Ο και θ η γωνία που σχηματίζει ο πολικός άξονας με την ημιευθεία ΟΜ.

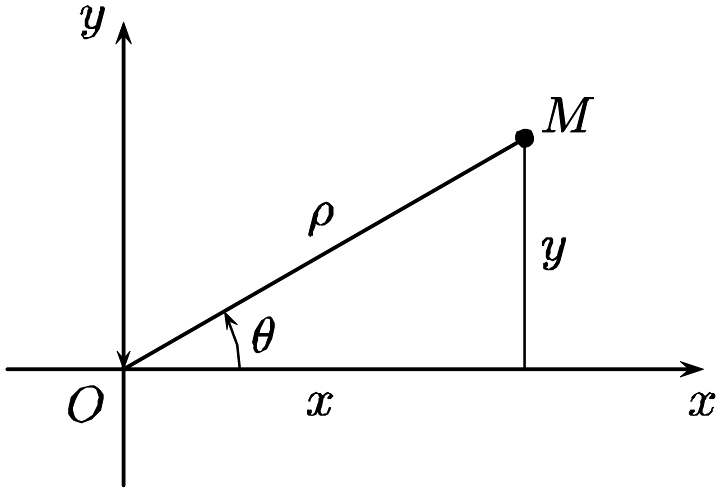


Τα στοιχεία του ζεύγους (ρ,θ)ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου Μ.

Προκειμένου να συσχετισθούν οι πολικές και οι καρτεσιανές συντεταγμένες λαμβάνεται ως πόλος η αρχή των αξόνων και ως πολικός άξονας ο ημιάξονας Ox. Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \mathbf{x = \rho cos\theta} \\ \mathbf{y = \rho sin\theta} \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\rho} = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2} \\ \mathbf{tg\theta} = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} \end{cases}$$

όπως προκύπτει άμεσα από το επόμενο ορθογώνιο τρίγωνο.



Είναι φανερό ότι οι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου M δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες, αφού τα σημεία με συντεταγμένες (ρ,θ) και $(\rho,\theta+2n\pi)$, όπου $n \in \mathbb{Z}$, συμπίπτουν.

Έτσι, προκειμένου να υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των σημείων του επιπέδου (εκτός του O, όπου $\rho = 0$) και των πολικών συντεταγμένων τους, θα θεωρούμε ότι $\rho > 0$ και ότι το θ ανήκει σε ένα διάστημα μήκους 2π, συνήθως το $[0,2\pi)$ ή το $(-\pi,\pi]$.

Κατόπιν τούτων, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ τίθεται

$$x = \varphi(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \text{ και } y = \sigma(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$$

όπου ρ>0 και $\theta \in [0,2\pi)$. Στην περίπτωση αυτή, είναι

$$J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \rho.$$

Παράδειγμα

Ζητείται να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint_A \ln\left(1+x^2+y^2\right)dxdy$

όπου A είναι το ένα τέταρτο του κύκλου $x^2+y^2 \le 1$, που ευρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

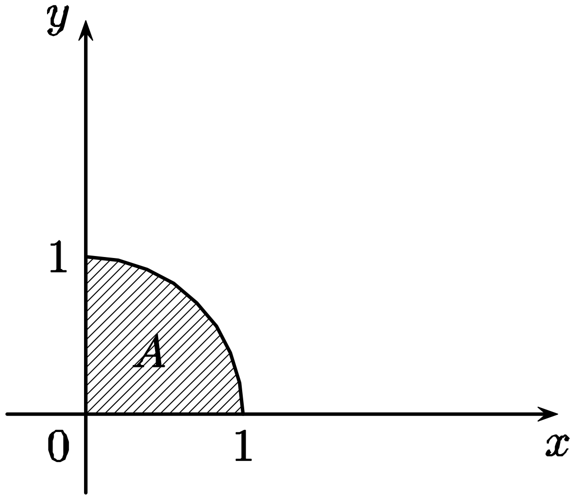
Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες:

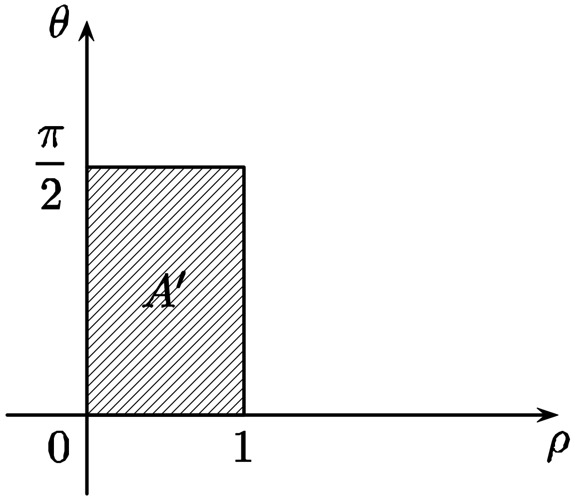
$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta, \text{ όπου } \rho>0 \text{ και } \theta \in [0,2\pi)$$

σύμφωνα με τον οποίο το χωρίο A του xy-επιπέδου μετατρέπεται στο ορθογώνιο[3] $A' = [0,1] \times \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ του ρθ-επιπέδου, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:

---

[3] Ακριβέστερα στο χωρίο $A'' = \left((0,1] \times \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right) \cup \{(0,0)\}$ το οποίο περιέχεται στο A' και έχει το ίδιο εμβαδό με αυτό. Επειδή τα διπλά ολοκληρώματα οποιασδήποτε ολοκληρώσιμης συνάρτησης f στα A', A'' ταυτίζονται, θα χρησιμοποιείται το A' αντί του A'', για απλούστευση.





Κατόπιν τούτων, είναι

$$\iint_A \ln\left(1+x^2+y^2\right)dxdy = \iint_{A'} \ln\left(1+\rho^2\right)|J|\,d\rho d\theta =$$

$$=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\ln\left(1+\rho^2\right)\,d\theta d\rho = \int_0^1 \rho\ln\left(1+\rho^2\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right]d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\ln\left(1+\rho^2\right)d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \ln\left(1+\rho^2\right)d\left(1+\rho^2\right) = \frac{\pi}{4}\int_1^2 \ln t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_1^2 t'\ln t\,dt = \frac{\pi}{4}\left(\left[t\ln t\right]_1^2 - \int_1^2 t\left(\ln t\right)'dt\right) = \frac{\pi}{4}\left(2\ln 2 - \int_1^2 1dt\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1).$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι για τον υπολογισμό της τιμής ορισμένων διπλών ολοκληρωμάτων εφαρμόζεται ο ακόλουθος γενικότερος μετασχηματισμός:

$$x = \alpha\rho\cos\theta,\ y = \beta\rho\sin\theta, \text{ όπου } \rho>0 \text{ και } \theta \in \left[0,2\pi\right)$$

όπου α,β δύο θετικές σταθερές.

ΑΣΚΗΣΗ 18

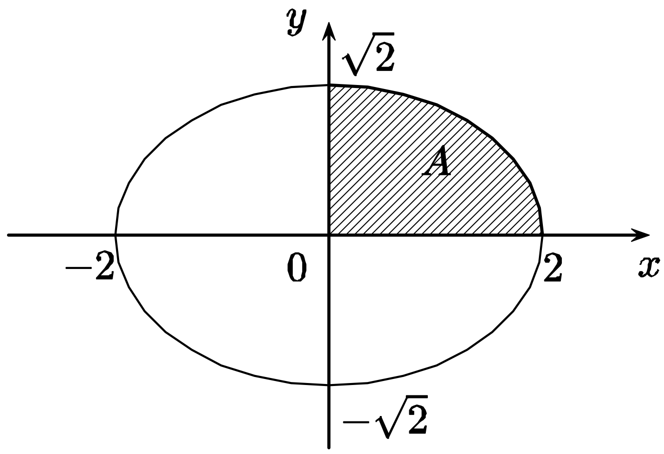
Να υπολογισθεί η τιμή του $\iint_{A} xydxdy$, όπου το Α αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου που περιέχονται στο 1° τεταρτημόριο της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

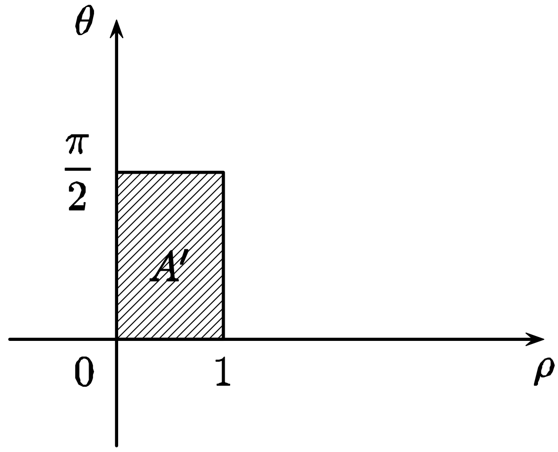
ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός:

$$x = 2\rho\cos\theta,\ y = \sqrt{2}\rho\sin\theta,\ \rho>0 \text{ και } \theta \in [0, 2\pi).$$

Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει το χωρίο Α του xy-επιπέδου στο ορθογώνιο $A' = [0,1]\times[0,\pi/2]$ του ρθ-επιπέδου.





διότι

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2} \le 1 \text{ και } x, y \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\rho^2\cos^2\theta}{4}+\frac{2\rho^2\sin^2\theta}{2} \le 1 \text{ και } 2\rho\cos\theta, \sqrt{2}\rho\sin\theta \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \rho \le 1 \text{ και } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Έτσι, προκύπτει ότι

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\cos\theta & -2\rho\sin\theta\\ \sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\rho\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=2\sqrt{2}\rho\cos^2\theta+2\sqrt{2}\rho\sin^2\theta=2\sqrt{2}\rho$$

οπότε

$$\iint_A xydxdy=\iint_{A'}2\rho\cos\theta\sqrt{2}\rho\sin\theta\cdot 2\sqrt{2}\rho d\rho d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\rho^3\cos\theta\sin\theta d\rho d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\rho^4/4\right]_0^1\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d(2\theta)=-\frac{1}{2}[\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

2. **Γραμμικός μετασχηματισμός**

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός ορίζεται από δύο εξισώσεις της μορφής

$$x = \alpha u + \beta v,\ y = cu + dv$$

όπου α,β,c,d σταθεροί αριθμοί. Στην περίπτωση αυτή,

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha d - c\beta.$$

Παράδειγμα

Ζητείται να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint\limits_{A} (2x+y)^2 (x-y)^3\, dxdy$

όπου A είναι το παραλλήλογραμμο που ορίζεται από τις ευθείες

$$2x + y = 1, 2x + y = -2, x - y = 2 \text{ και } x - y = -1.$$

Για το σκοπό αυτό, τίθεται

$$u = 2x + y \text{ και } v = x - y$$

ή, ισοδύναμα,

$$x = \frac{u+v}{3} \text{ και } y = \frac{u-2v}{3}.$$

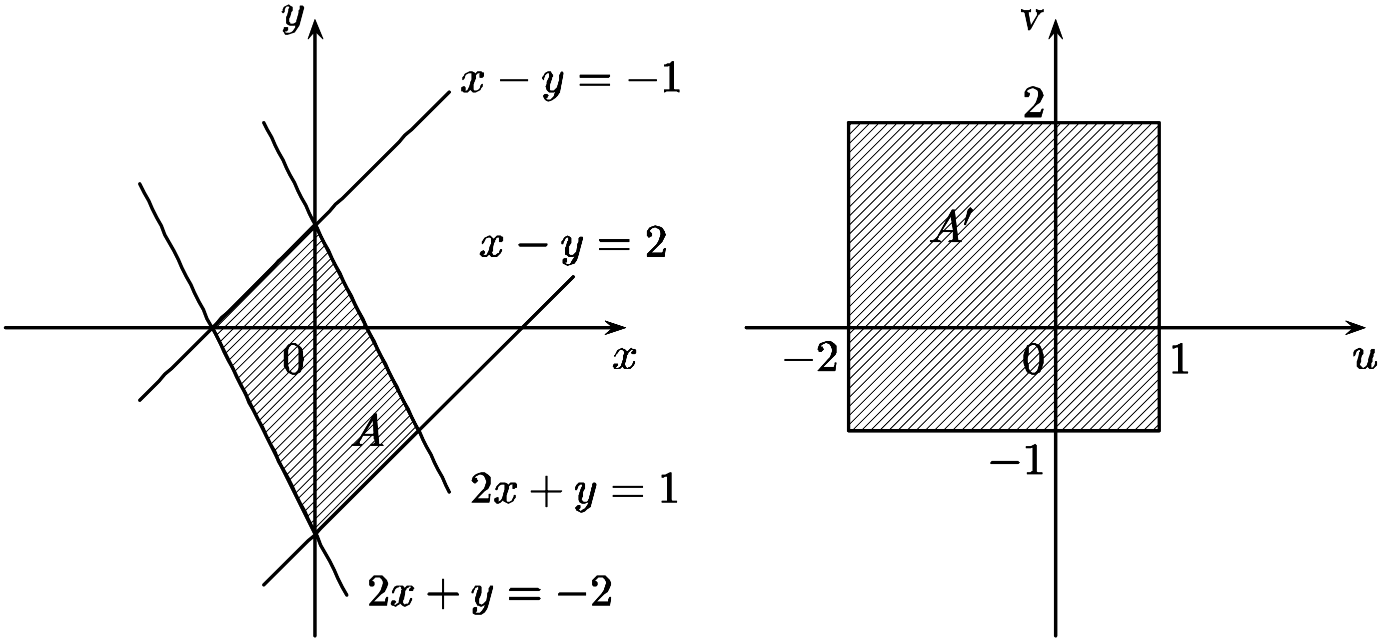
Επειδή

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le 2x + y \le 1 \text{ και } -1 \le x - y \le 2\right\}$$

προκύπτει ότι $(x,y) \in A \Leftrightarrow -2 \le u \le 1 \text{ και } -1 \le v \le 2$

$$\Leftrightarrow (u,v) \in [-2,1] \times [-1,2]$$

Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει το παραλληλόγραμμο A του xy-επιπέδου στο τετράγωνο $A' = [-2,1]\times[-1,2]$ του uv-επιπέδου, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



Επιπλέον, ισχύει ότι $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{3}$

και

$$\iint\limits_{A} (2x+y)^2 (x-y)^3\, dxdy = \iint\limits_{A'} u^2 v^3 \, |J| \, dudv = \int_{-1}^{2}\int_{-2}^{1} u^2 v^3 \frac{1}{3} dudv$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{2} v^3 dv\right)\left(\int_{-2}^{1} u^2 du\right) = \frac{1}{3}\left[\frac{v^4}{4}\right]_{-1}^{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{15}{4}.$$

Τέλος, σημειώνεται ότι υπάρχουν και άλλοι, λιγότερο γνωστοί αλλά πολύ ενδιαφέροντες μετασχηματισμοί, οι οποίοι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dxdy$$

όπου A είναι το χωρίο που ευρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου που φράσσεται από τις ευθείες

$$y = x,\ y = 4x$$

και τις υπερβολές

$$xy = 1,\ xy = 9.$$

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός:

$$u = \sqrt{\frac{y}{x}}, v = \sqrt{xy}$$

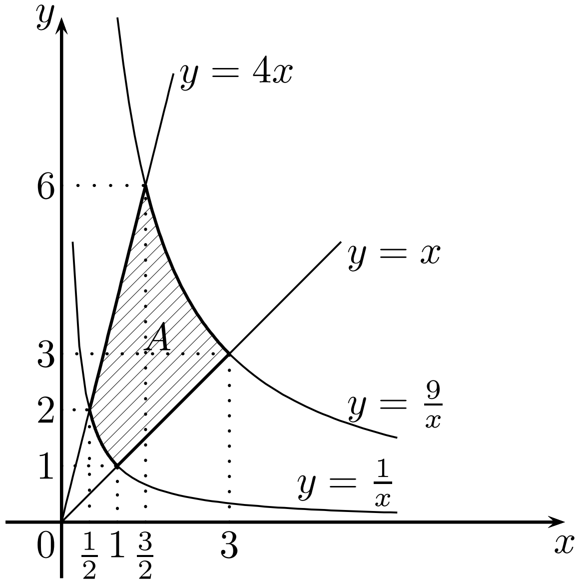
ο οποίος μετατρέπει το χωρίο A του xy-επιπέδου στο ορθογώνιο $A' = [1,2]\times[1,3]$ του uv-επιπέδου, διότι

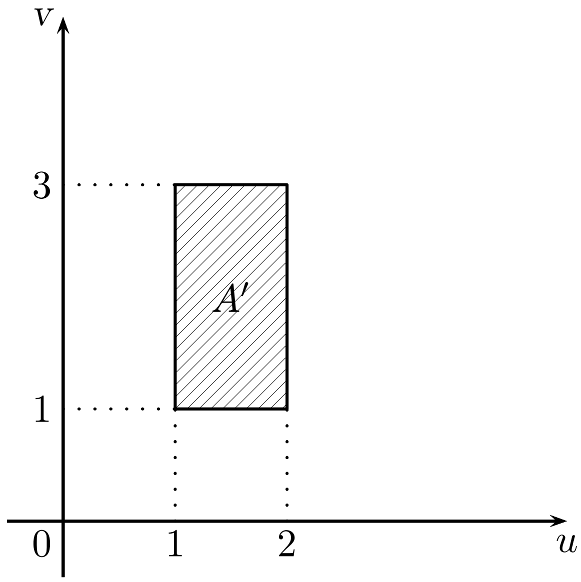
$$(x,y) \in A \Leftrightarrow x, y > 0, x \le y \le 4x \text{ και } \frac{1}{x} \le y \le \frac{9}{x},$$

$$\Leftrightarrow 1 \le u \le 2 \text{ και } 1 \le v \le 3,$$

$$\Leftrightarrow (u,v) \in A'.$$

Η αντιστοιχία των χωρίων A, A′ φαίνεται γεωμετρικά στο επόμενο σχήμα:





Έτσι, προκύπτει ότι $x = \dfrac{v}{u},\ y = uv$, οπότε

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \\ v & u \end{vmatrix} = -\frac{2v}{u},\ \text{οπότε}$$

$$\iint_A \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dxdy = \iint_{A'} (u+v)\left|J\right| dudv$$

$$= 2\int_1^2 \left(\int_1^3 (u+v)\frac{v}{u} dv \right) du = 2\int_1^2 \left[\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3u} \right]_1^3 du$$

$$= 2\int_1^2 \left(4 + \frac{26}{3u} \right) du = 2\left[4u + \frac{26}{3}\ln u \right]_1^2 = 8 + \frac{52}{3}\ln 2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να υπολογισθούν οι τιμές των διπλών ολοκληρωμάτων:

α) $\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^5}{y^3} dydx$, β) $\int_0^{\pi} \int_y^{\pi} \cos(x+y) dxdy$.

ΛΥΣΗ

α) $$\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^5}{y^3} dydx = \int_1^2 x^5 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^3} dy \right) dx = \int_1^2 x^5 \left[\frac{y^{-2}}{-2} \right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 x^5 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^8}{8} - \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{227}{16}.$$

β) $$\int_0^{\pi} \int_y^{\pi} \cos(x+y) dxdy = \int_0^{\pi} \left(\int_y^{\pi} \cos(x+y) dx \right) dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\sin(x+y) \right]_y^{\pi} dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\sin(\pi+y) - \sin 2y \right) dy$$

$$= -\left(\int_0^{\pi} \sin y dy + \int_0^{\pi} \sin 2y dy \right)$$

$$= \left[\cos y \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\cos 2y \right]_0^{\pi}$$

$$= -2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

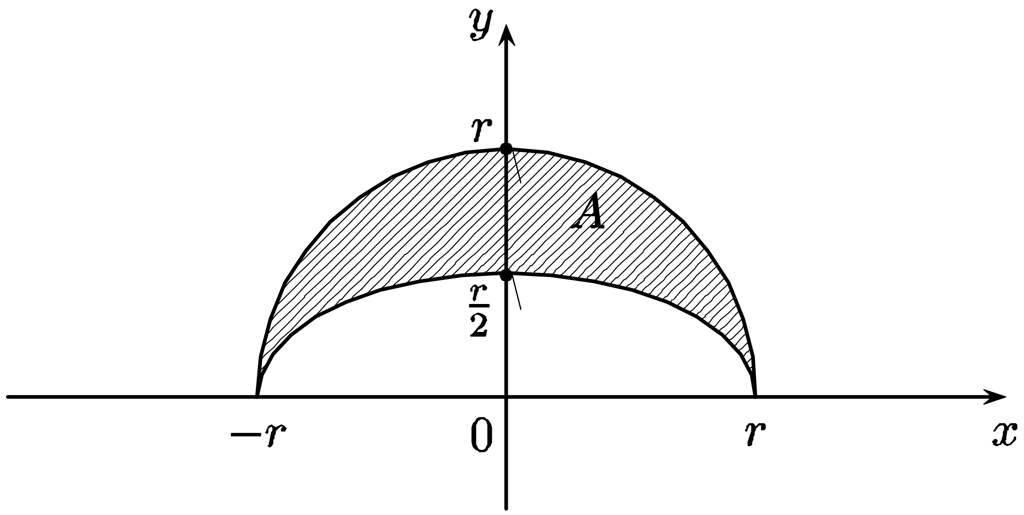
Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A e^x y\,dx\,dy$$

όπου A είναι το χωρίο του άνω ημιεπιπέδου που περικλείεται μεταξύ του κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας r, και της έλλειψης με εξίσωση $x^2+4y^2=r^2$.

ΛΥΣΗ

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}\le y\le\sqrt{r^2-x^2}\ \text{και}\ -r\le x\le r\right\}$$



$$\iint_A e^x y\,dx\,dy=\int_{-r}^{r}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} e^x y\,dy\,dx=\int_{-r}^{r} e^x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-r}^{r}e^x\left((r^2-x^2)-\frac{r^2-x^2}{4}\right)dx=\frac{3}{8}\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)(e^x)'\,dx$$

$$=\frac{3}{8}\left[e^x(r^2-x^2)\right]_{-r}^{r}-\frac{3}{8}\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)'\,e^x dx=\frac{3}{4}\int_{-r}^{r}xe^x dx$$

$$=\frac{3}{4}\int_{-r}^{r}x(e^x)'\,dx=\frac{3}{4}\left[xe^x\right]_{-r}^{r}-\frac{3}{4}\int_{-r}^{r}x'e^x dx=\frac{3}{4}\left(re^r+re^{-r}-e^r+e^{-r}\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

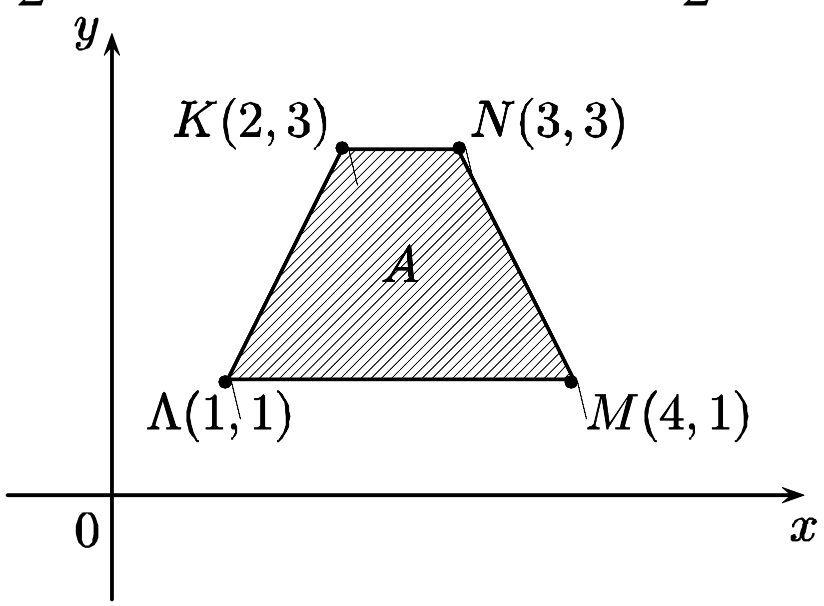
Να υπολογισθεί η τιμή του $\iint\limits_A \left(2x+y^2\right)dxdy$

όπου A είναι το τραπέζιο με κορυφές τα σημεία $K(2,3), \Lambda(1,1), M(4,1)$ και $N(3,3)$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, ευρίσκουμε τις εξισώσεις των πλευρών του δοσμένου τραπεζίου:

$$K\Lambda : x=\frac{y+1}{2},\ \ \Lambda M : y=1,\ MN : x=\frac{9-y}{2},\ \ NK : y=3.$$



$$\text{Επειδή } A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{y+1}{2}\le x\le\frac{9-y}{2} \text{ και } 1\le y\le 3\right\},$$

$$\iint\limits_A \left(2x+y^2\right)dxdy=\int_1^3\int_{\frac{y+1}{2}}^{\frac{9-y}{2}}\left(2x+y^2\right)dxdy=\int_1^3\left[x^2+xy^2\right]_{\frac{y+1}{2}}^{\frac{9-y}{2}}dy$$

$$=\int_1^3\left(\frac{(9-y)^2}{4}+\frac{(9-y)}{2}y^2-\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{y+1}{2}y^2\right)dy$$

$$=\int_1^3\left(-y^3+4y^2-5y+20\right)dy=\left[-\frac{y^4}{4}+4\frac{y^3}{3}-5\frac{y^2}{2}+20y\right]_1^4=\frac{171}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

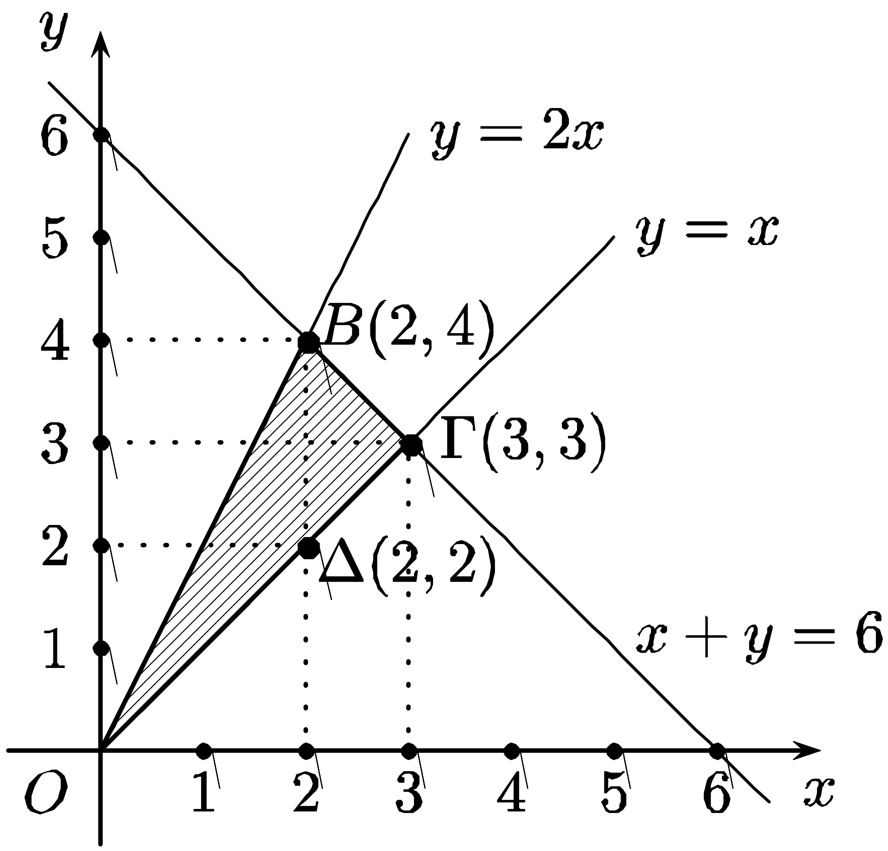
Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_{A}\left(x^{3}y+2x+5\right)dxdy$$

όπου A είναι το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις ευθείες $y=x$, $y=2x$ και $x+y=6$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, ευρίσκουμε ότι οι τρεις δοσμένες ευθείες τέμνονται ανά δύο στα σημεία $O(0,0), B(2,4)$ και $\Gamma(3,3)$, που είναι οι κορυφές του τριγώνου A.



Αν A_1, A_2 είναι τα τρίγωνα ΟΒΔ και ΔΒΓ αντίστοιχα, τότε προκύπτει ότι

$$\iint_A \left(x^3y+2x+5\right)\,dxdy$$

$$=\iint_{A_1}\left(x^3y+2x+5\right)\,dxdy+\iint_{A_2}\left(x^3y+2x+5\right)\,dxdy$$

Αλλά, επειδή είναι

$$A_1=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x\le y\le 2x \text{ και } 0\le x\le 2\right\}$$

και

$$A_2=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x\le y\le 6-x \text{ και } 2\le x\le 3\right\},$$

προκύπτει ότι

$$\iint_A\left(x^3y+2x+5\right)dxdy=$$

$$=\int_0^2\int_x^{2x}\left(x^3y+2x+5\right)dydx+\int_2^3\int_x^{6-x}\left(x^3y+2x+5\right)dydx$$

$$=\int_0^2\left[x^3\frac{y^2}{2}+\left(2x+5\right)y\right]_x^{2x}dx+\int_2^3\left[x^3\frac{y^2}{2}+\left(2x+5\right)y\right]_x^{6-x}dx$$

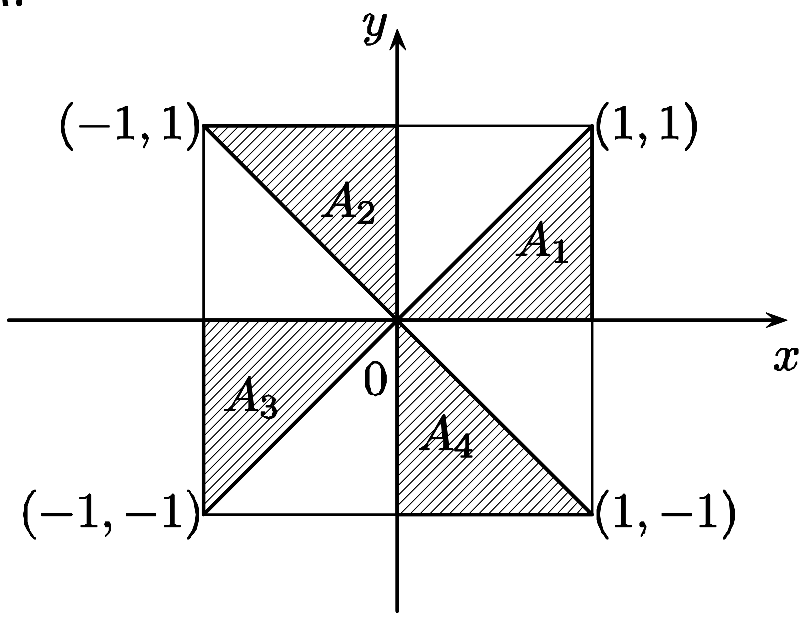
$$=\int_0^2\left(3\frac{x^5}{2}+2x^2+5x\right)dx+\int_2^3\left(-6x^4+18x^3-4x^2+2x+30\right)dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}\frac{x^6}{6}+\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right]_0^2++\left[-\frac{6x^5}{5}+18\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+x^2+30x\right]_2^3$$

$$=\frac{803}{10}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να υπολογισθεί η τιμή του $\iint\limits_{A} \sin x \cos y dxdy$, όπου A είναι το γραμμοσκιασμένο φραγμένο σύνολο στο επόμενο σχήμα:



ΛΥΣΗ

Το φραγμένο A γράφεται $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ όπου

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ και } 0 \leq x \leq 1 \right\},$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq 1 \text{ και } -1 \leq x \leq 0 \right\},$$

$$A_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 0 \text{ και } -1 \leq x \leq 0 \right\},$$

$$A_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq -x \text{ και } 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\iint\limits_A \sin x \cos y dx dy$$

$$= \iint\limits_{A_1} \sin x \cos y dx dy + \iint\limits_{A_2} \sin x \cos y dx dy$$

$$+ \iint\limits_{A_3} \sin x \cos y dx dy + \iint\limits_{A_4} \sin x \cos y dx dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^x \sin x \cos y dy \right) dx + \int_{-1}^0 \left(\int_{-x}^1 \sin x \cos y dy \right) dx +$$

$$+ \int_{-1}^0 \left(\int_x^0 \sin x \cos y dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{-1}^{-x} \sin x \cos y dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \sin x [\sin y]_0^x dx + \int_{-1}^0 \sin x [\sin y]_{-x}^1 dx +$$

$$+ \int_{-1}^0 \sin x [\sin y]_x^0 dx + \int_0^1 \sin x [\sin y]_{-1}^{-x} dx$$

$$= \int_0^1 \sin^2 x dx + \int_{-1}^0 \left(\sin x \sin 1 + \sin^2 x \right) dx$$

$$- \int_{-1}^0 \sin^2 x dx + \int_0^1 \left(\sin x \sin 1 - \sin^2 x \right) dx$$

$$= 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να υπολογισθεί η τιμή του $\iint\limits_A \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$

όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x, 0\le y \text{ και } x^2+y^2\le 1\right\}$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι $\iint\limits_A \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx$ (1)

Προκειμένου να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx$$

τίθεται $y=\sqrt{1-x^2}\sin\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

(το x θεωρείται σταθερό). Έτσι, προκύπτει ότι

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-x^2}\cos\theta, dy=\sqrt{1-x^2}\cos\theta d\theta \text{ και}$$

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-x^2}\cos\theta\cdot\sqrt{1-x^2}\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{1-x^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{1-x^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\left(1-x^2\right)\pi}{4} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\iint\limits_A \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{\pi}{4}\int_0^1(1-x^2)\,dx=\frac{\pi}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να υπολογισθεί η τιμή του $\iint\limits_{A} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

όπου A είναι το τέταρτο του κύκλου $x^2 + y^2 \leq (\ln 2)^2$ το οποίο ευρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \rho>0 \text{ και } \theta \in [0, 2\pi).$$

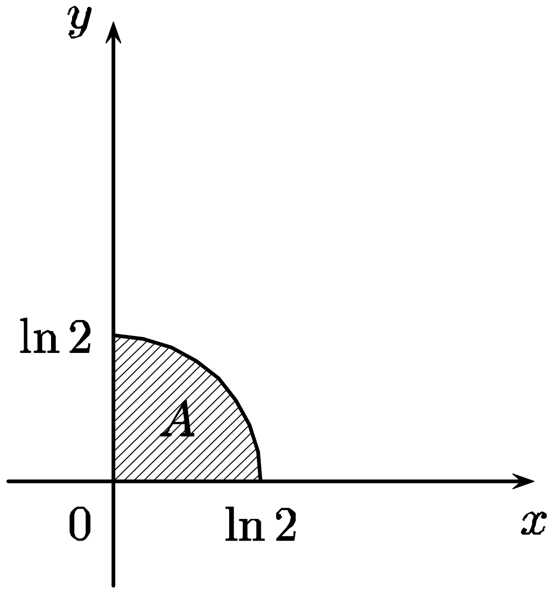
Επειδή

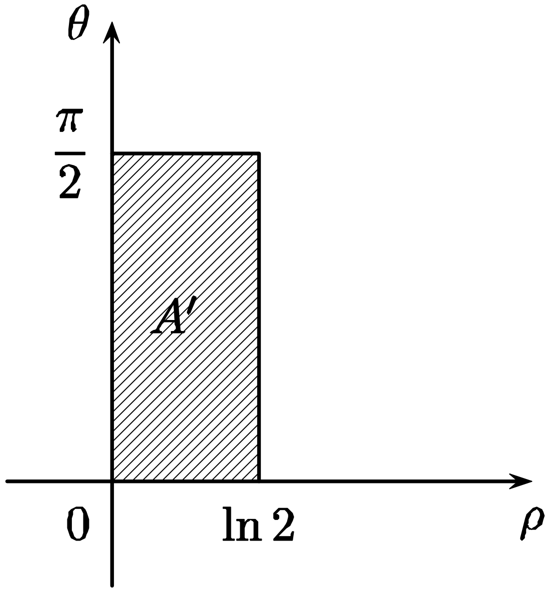
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0 \text{ και } x^2 + y^2 \leq (\ln 2)^2\right\},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(x, y) \in A &\Leftrightarrow \rho \leq \ln 2 \text{ και } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\Leftrightarrow (\rho, \theta) \in [0, \ln 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\end{aligned}$$

οπότε ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες μετατρέπει το A στο ορθογώνιο $A' = [0, \ln 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ του ρθ-επιπέδου, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:





Κατόπιν τούτων, είναι

$$\iint_{A} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_{A'} e^{\rho}\,|J|\,d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\ln 2} e^{\rho}\rho d\rho\right)d\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta\right)\left(\int_0^{\ln 2}\left(e^{\rho}\right)' \rho d\rho\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left[e^{\rho}\rho\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^{\rho}\left(\rho\right)' d\rho\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\ln 2 - \left[e^{\rho}\right]_0^{\ln 2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\ln 2 - 1\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να υπολογισθεί το $\iint\limits_{A} \left(x^2+y^2\right)^{\alpha} dxdy$

όπου α>0 και A το κλειστό χωρίο που ορίζουν οι περιφέρειες $x^2+y^2=r_1^2$ και $x^2+y^2=r_2^2$, όπου $0<r_1<r_2$.

ΛΥΣΗ

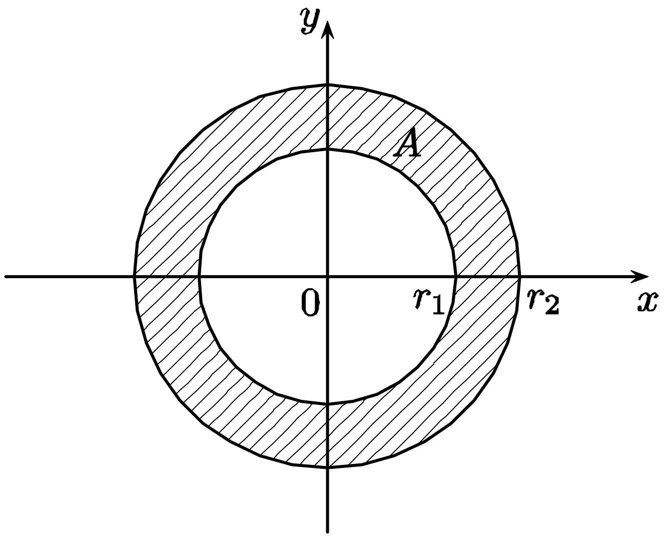
Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες: $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ \rho>0$ και $\theta\in[0,2\pi)$.

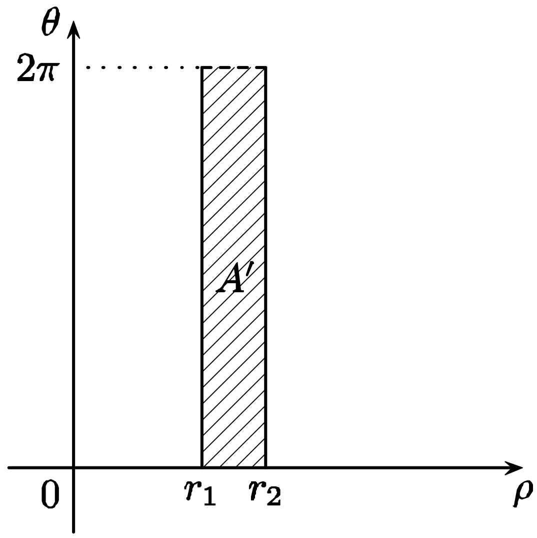
Επειδή $\quad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : r_1^2\le\rho\le r_2^2\right\},$

προκύπτει ότι $\quad (x,y)\in A \Leftrightarrow r_1^2\le\rho\le r_2^2$ και $\theta\in[0,2\pi)$

$$\Leftrightarrow (\rho,\theta)\in[r_1,r_2]\times[0,2\pi),$$

οπότε ο μετασχηματισμός μετατρέπει το χωρίο A του xy-επιπέδου στο $A'=[r_1,r_2]\times[0,2\pi)$ του ρθ-επιπέδου





Κατόπιν τούτων, είναι

$$\iint\limits_{A}\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}dxdy=\iint\limits_{A'}\rho^{2\alpha}|J|d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_{r_1}^{r_2}\rho^{2\alpha}\rho d\rho\right)d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}1d\theta\right)\left(\int_{r_1}^{r_2}\rho^{2\alpha+1}d\rho\right)=2\pi\left[\frac{\rho^{2\alpha+2}}{2\alpha+2}\right]_{r_1}^{r_2}=\frac{\pi}{\alpha+1}\left(r_1^{2(\alpha+1)}-r_2^{2(\alpha+1)}\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Να υπολογισθεί η τιμή του $\iint\limits_{A} x\,dx\,dy$

όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 9 \text{ και } 0\le y\le x\right\}$.

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες: $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ \rho>0,\ \theta\in[0,2\pi)$.

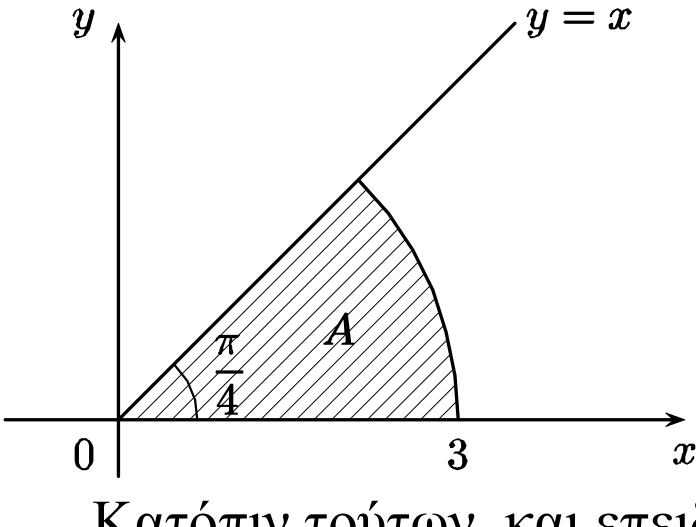
Επειδή $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 9 \text{ και } 0\le y\le x\right\}$,

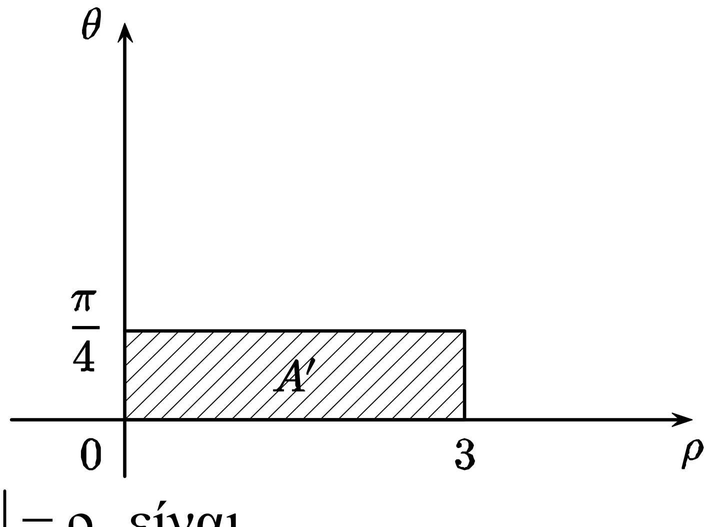
προκύπτει ότι $(x,y)\in A \Leftrightarrow \rho^2\le 9 \text{ και } 0\le\rho\sin\theta\le\rho\cos\theta$

$$\Leftrightarrow \rho\le 3 \text{ και } 0\le\theta\le\pi/4$$

$$\Leftrightarrow (\rho,\theta)\in[0,3]\times[0,\pi/4],$$

οπότε ο μετασχηματισμός μετατρέπει το χωρίο A του xy-επιπέδου στο $A'=[0,3]\times[0,\pi/4]$ του ρθ-επιπέδου.





Κατόπιν τούτων, και επειδή $|J|=\rho$, είναι

$$\iint\limits_{A} x\,dx\,dy=\iint\limits_{A'}\rho\cos\theta|J|\,d\rho\,d\theta=\int_0^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\cos\theta\,d\theta\,d\rho=\int_0^3\rho^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,d\theta\right)d\rho$$

$$=\int_0^3\rho^2\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}d\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^3\rho^2\,d\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3=\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Να υπολογισθεί η τιμή του

$$\iint\limits_{A} \sin^2(x-y)\cos^2(x+y)\,dxdy$$

όπου το A είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία

$$(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi) \text{ και } (0,\pi).$$

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός:

$$u = x-y, v = x+y.$$

Επειδή οι εξισώσεις των πλευρών του A είναι

$$x-y=-\pi,\ x-y=\pi,\ x+y=\pi \text{ και } x+y=3\pi,$$

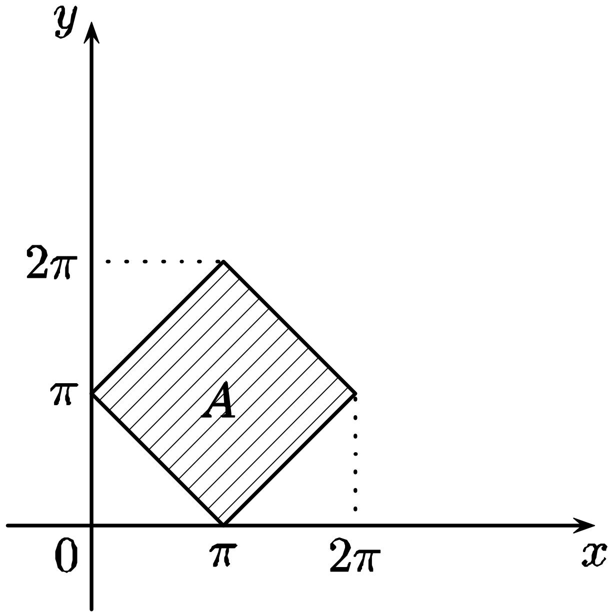
προκύπτει ότι

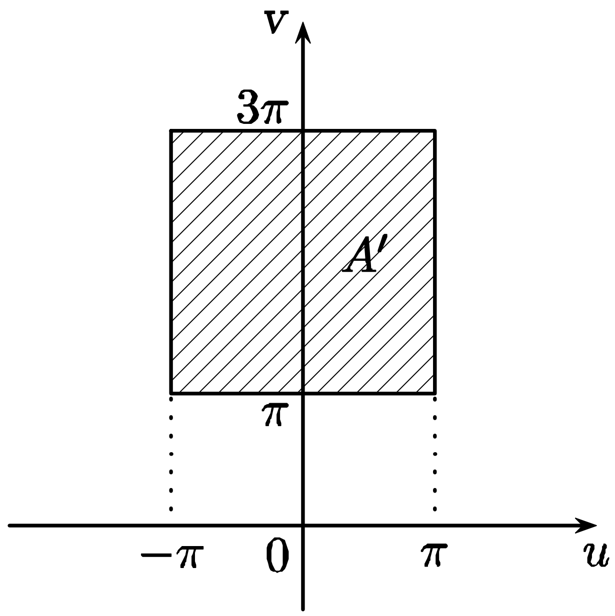
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\pi \le x-y \le \pi \text{ και } \pi \le x+y \le 3\pi\right\},$$

οπότε

$$\begin{aligned}(x,y)\in A &\Leftrightarrow -\pi \le u \le \pi \text{ και } \pi \le v \le 3\pi \\ &\Leftrightarrow (u,v)\in[-\pi,\pi]\times[\pi,3\pi].\end{aligned}$$

Έτσι, ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει το παραλληλόγραμμο A του xy-επιπέδου στο ορθογώνιο $A'=[-\pi,\pi]\times[\pi,3\pi]$ του uv-επιπέδου.





Κατόπιν τούτων, είναι $x = \dfrac{u+v}{2}, y = \dfrac{v-u}{2}$, οπότε

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}, \text{ οπότε}$$

$$\iint_A \sin^2(x-y)\cos^2(x+y)\,dxdy = \iint_{A'} \sin^2 u \cos^2 v \cdot |J|\,dudv$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 u \cos^2 v \cdot \frac{1}{2} dv\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 u du\right)\left(\int_{\pi}^{3\pi} \cos^2 v dv\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2u)du\right)\left(\int_{\pi}^{3\pi}(1+\cos 2v)dv\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[u - \frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\pi}^{\pi}\left[v + \frac{1}{2}\sin 2v\right]_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να υπολογισθεί το $\iint\limits_A (x+y)^2 e^{x^2-y^2}dxdy$, όπου A το τρίγωνο που ορίζουν οι ευθείες $x=0, y=0$, $x+y=1$.

ΛΥΣΗ

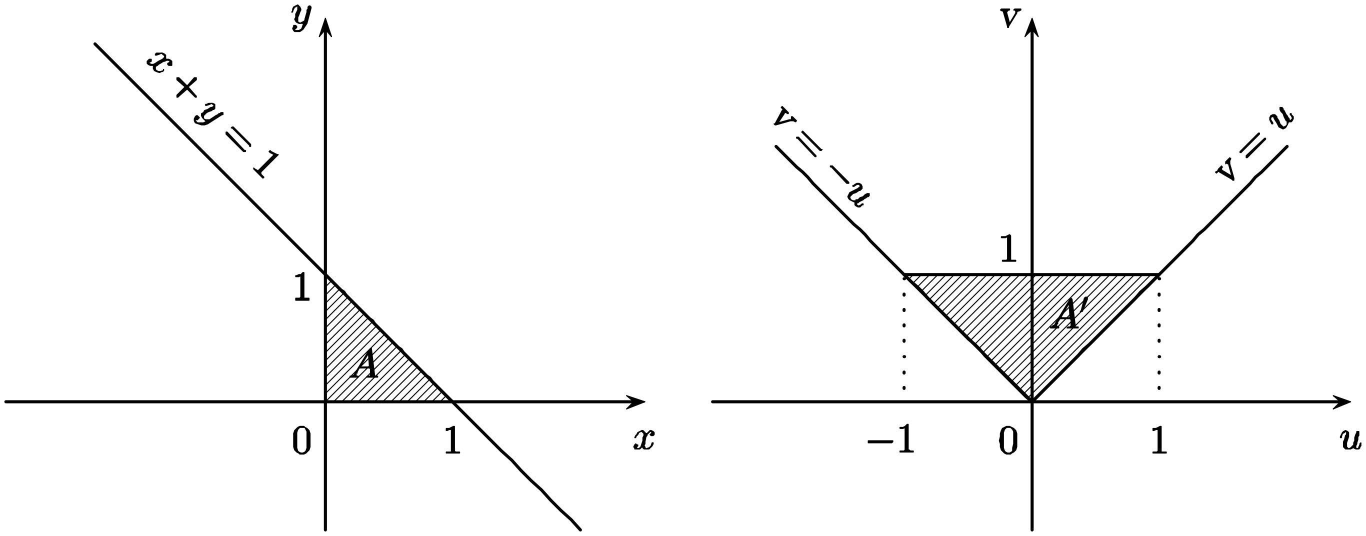
Εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός: $u=x-y, v=x+y$ οπότε προκύπτει ότι $x=\dfrac{u+v}{2}, y=\dfrac{v-u}{2}$, $J=\dfrac{1}{2}$. Επειδή

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0 \text{ και } x+y\leq 1\right\},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(x,y)\in A &\Leftrightarrow u+v\geq 0, v-u\geq 0 \text{ και } v\leq 1\\ &\Leftrightarrow -v\leq u\leq v \text{ και } v\leq 1\\ &\Leftrightarrow (u,v)\in A',\end{aligned}$$

όπου A' είναι το τρίγωνο του uv-επιπέδου που ορίζεται από τις ευθείες $v=-u, v=u$ και $v=1$.



Κατόπιν τούτων, είναι

$$\iint\limits_A (x+y)^2 e^{x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_{A'} v^2e^{uv}\left|J\right|dudv=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_{-v}^{v} v^2e^{uv}du\right)dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left[e^{uv}\right]_{-v}^{v}dv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left(e^{v^2}-e^{-v^2}\right)dv=\frac{1}{4}\left[e^{v^2}+e^{-v^2}\right]_0^1=\frac{(e-1)^2}{4e}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A \left(x^3 + y^3\right) dxdy$$

όπου A είναι το καμπυλόγραμμο τετράπλευρο που ορίζουν οι παραβολές $y = x^2$ $y = 2x^2$, $y^2 = x$ και $y^2 = 2x$.

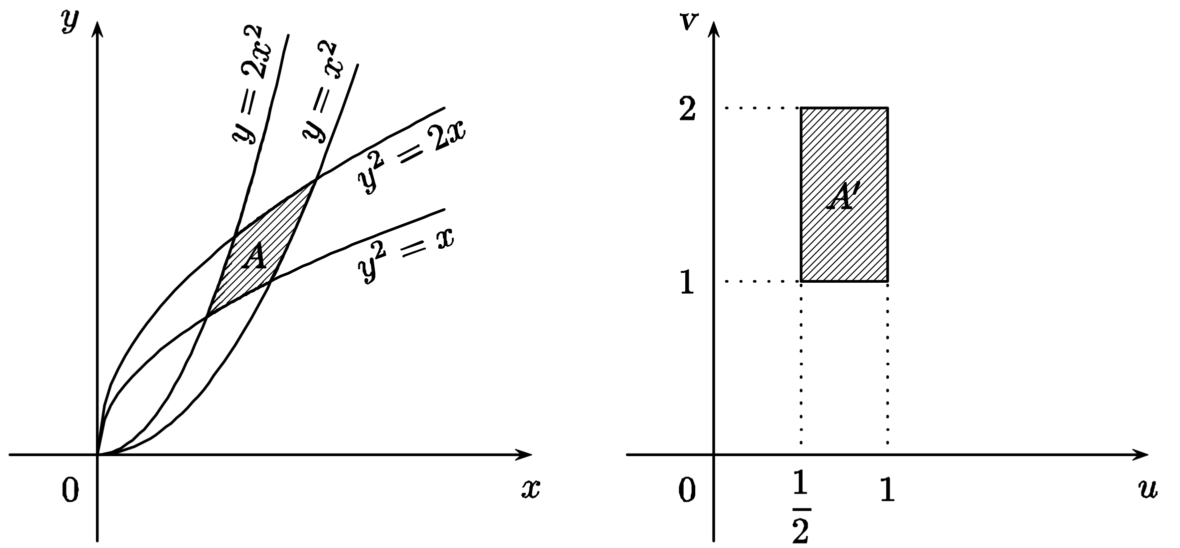
ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός $u = \dfrac{x^2}{y}$, $v = \dfrac{y^2}{x}$, ο οποίος μετατρέπει το καμπυλόγραμμο τετράπλευρο A του xy-επιπέδου στο ορθογώνιο $A' = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \times [1, 2]$ του uv-επιπέδου, διότι

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow \frac{y}{2} \le x^2 \le y \text{ και } x \le y^2 \le 2x,$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{x^2}{y} \le 1 \text{ και } 1 \le \frac{y^2}{x} \le 2, \Leftrightarrow (u, v) \in A'.$$

Η αντιστοιχία των A, A′ φαίνεται γεωμετρικά στο επόμενο σχήμα:



Έτσι, προκύπτει ότι

$$x = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}},\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}},$$

οπότε

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \\ \dfrac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \dfrac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

και οπότε

$$\iint_{A} \left(x^3 + y^3 \right) dxdy = \iint_{A'} \left[\left(u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} \right)^3 + \left(u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \right)^3 \right] |J| dudv$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{1}^{2} \left(u^2 v + u v^2 \right) dvdu$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{u^2 v^2}{2} + \frac{u v^3}{3} \right]_1^2 du$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{4u^2}{2} + \frac{8u}{3} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{3} \right) du$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{3u^2}{2} + \frac{7u}{3} \right) du$$

$$= \frac{7}{16}.$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Εφαρμογές: Υπολογισμός όγκου στερεού, εμβαδού επιφάνειας, μέσης τιμής συνάρτησης

7. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

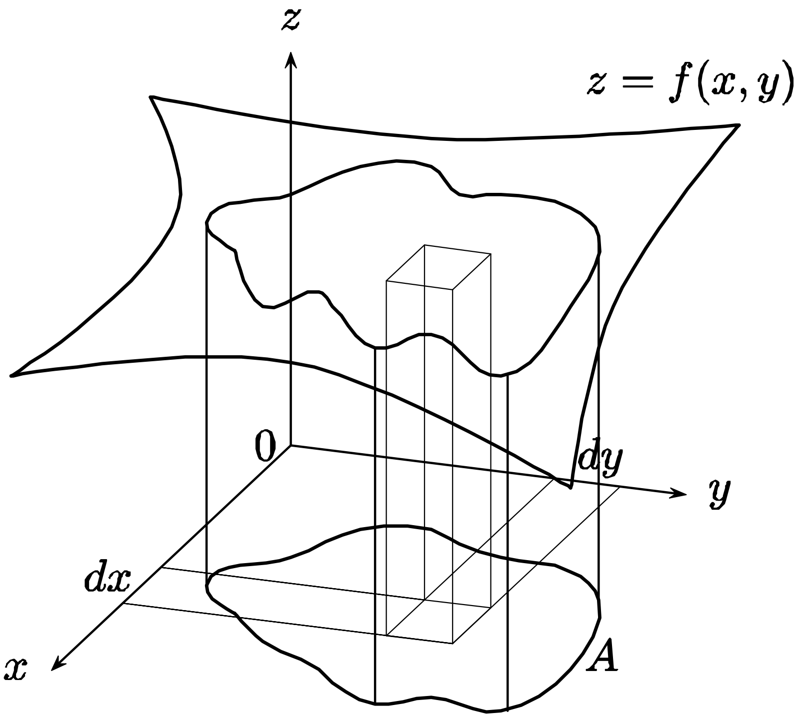
Όπως στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής το ορισμένο ολοκλήρωμα εκφράζεται γεωμετρικά από ένα έμβαδο, στην περίπτωση των δύο μεταβλητών το διπλό ολοκλήρωμα εκφράζεται από ένα όγκο.

Όγκος στερεού

Έστω f/A μια συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση, με A ένα χωρίο του επιπέδου και Σ το στερεό που ορίζεται από το επίπεδο Oxy, την κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό το σύνορο του χωρίου A και την επιφάνεια με εξίσωση $z = f(x, y)$, δηλαδή

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ και } 0 \leq z \leq f(x, y) \right\}.$$

Ο όγκος V του στερεού Σ μπορεί να θεωρηθεί ως το άπειρο άθροισμα των όγκων στοιχειωδών ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων με πλευρές βάσης dx, dy και ύψος $f(x, y)$.



Με άλλα λόγια, αν $A=[\alpha,\beta]\times[c,d]$ είναι ένα ορθογώνιο τότε ο όγκος V θα είναι το όριο μιας ακολουθίας από ενδιάμεσα αθροίσματα, δηλαδή

$$V=\lim_{n\to\infty} S\left(f,\delta_{1,n}\times\delta_{2,n},\gamma_{1,n}\times\gamma_{2,n}\right)$$

όπου $(\delta_{1,n})$, $(\delta_{2,n})$ είναι δύο ακολουθίες διαμερίσεων των $[\alpha,\beta]$, $[c,d]$ αντίστοιχα, με

$$\lim_{n\to\infty}\lambda\left(\delta_{1,n}\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda\left(\delta_{2,n}\right)=0$$

και $\gamma_{1,n},\gamma_{2,n}$ είναι επιλογές ενδιάμεσων σημείων των διαμερίσεων $\delta_{1,n},\delta_{2,n}$ αντίστοιχα. Τότε όμως, από την πρόταση 2.3, θα είναι

$$V=\iint_A f(x,y)\,dxdy.$$

Ο τύπος αυτός προκύπτει ανάλογα και στην περίπτωση όπου το A είναι ένα μη ορθογώνιο χωρίο, χρησιμοποιώντας αντί του A ένα ορθογώνιο T το οποίο περιέχει το A και αντί της f την επέκτασή της $\overline{f}/T$η οποία μηδενίζεται εκτος του A.

Ειδικά, αν $f(x,y)=1$ για κάθε $(x,y)\in A$, ο προηγούμενος τύπος δίδει το εμβαδό E του χωρίου, δηλαδή

$$E=\iint_A 1dxdy.$$

Παραδείγματα

1. Για τον υπολογισμό των όγκων V_k και V_σ του κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος h και της σφαίρας ακτίνας r αντίστοιχα, θεωρούμε το χωρίο

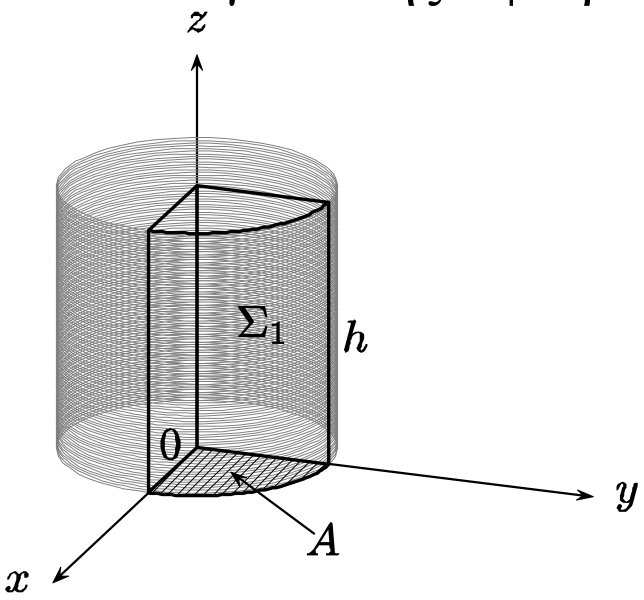
$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x, y \text{ και } x^2 + y^2 \le r^2 \right\}$$

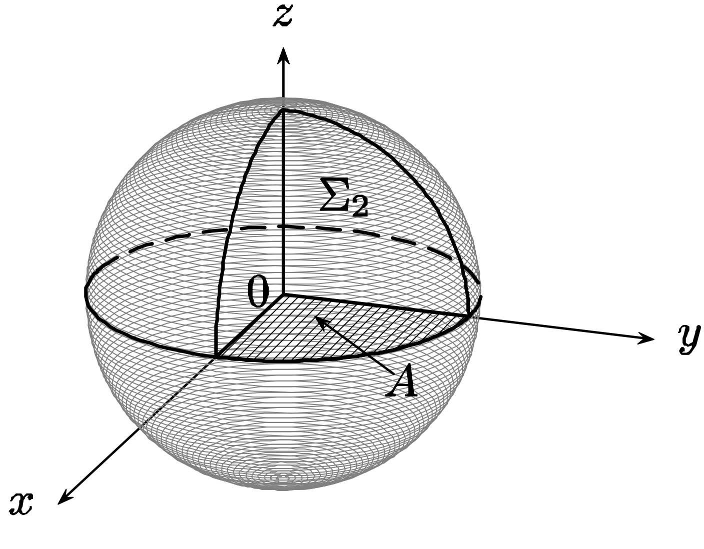
και τα στερεά

$$\Sigma_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ και } 0 \le z \le h \right\} \text{ και}$$

$$\Sigma_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ και } 0 \le z \le \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right\}$$

Τα στερεά Σ_1 και Σ_2 είναι το ένα τέταρτο του κυλίνδρου και το ένα όγδοο της σφαίρας αντίστοιχα.





Επομένως, αν V_1, V_2 είναι οι όγκοι των στερεών Σ_1, Σ_2 αντίστοιχα, εφαρμόζοντας τον τύπο του όγκου για τις συναρτήσεις $f_1(x,y)=h/A$ και $f_2(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}/A$, προκύπτουν οι τύποι:

$$V_\kappa = 4V_1 = 4\iint_A h dxdy \qquad (1)$$

και

$$V_\sigma = 8V_2 = 8\iint_A \sqrt{r^2-x^2-y^2}dxdy \qquad (2)$$

Τα διπλά ολοκληρώματα των σχέσεων (1) και (2) υπολογίζονται με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta, \text{ όπου } \rho>0 \text{ και } \theta\in[0,2\pi)$$

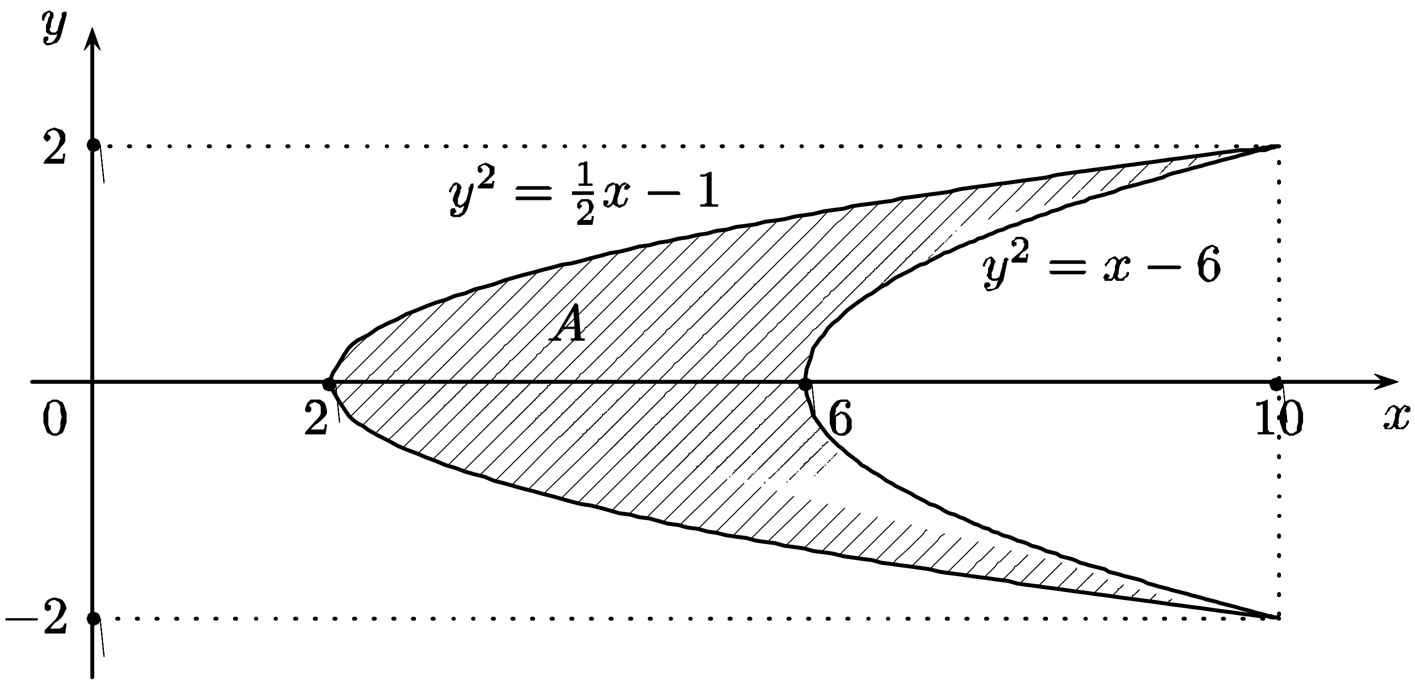
οπότε το χωρίο A του xy-επιπέδου μετατρέπεται στο ορθογώνιο $A'=[0,r]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ του ρθ-επιπέδου και επομένως προκύπτει ότι:

$$V_\kappa = 4\iint_{A'} h\rho d\rho d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} h\left(\int_0^r \rho d\rho\right)d\theta = 4h\frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^r = \pi r^2 h$$

$$V_\sigma = 8\iint_{A'} \sqrt{r^2-\rho^2}\rho d\rho d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta$$

$$=8\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(r^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

2. Το εμβαδό Ε του χωρίου Α (βλ. επόμενη σχήμα) που ορίζουν οι καμπύλες με εξισώσεις $y^2 = x - 6$ και $y^2 = \frac{1}{2}x - 1$ ισούται με



$$E = \iint_A 1dxdy = \int_{-2}^{2}\left(\int_{2y^2+2}^{y^2+6} 1dx\right)dy$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(y^2 + 6 - \left(2y^2 + 2\right)\right)dy = \int_{-2}^{2}\left(4 - y^2\right)dy = \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 29

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την τομή των κυλίνδρων $x^2+y^2=r^2$ και $x^2+z^2=r^2$, όπου r>0.

ΛΥΣΗ

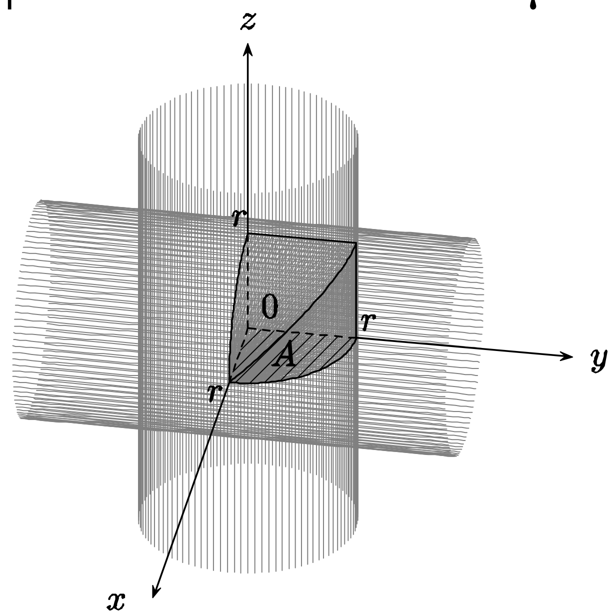
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2}\,/\,A$, όπου

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0 \text{ και } x^2+y^2\leq r^2\right\}$$

Ο όγκος V_Σ του στερεού

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y\geq 0,\ x^2+y^2\leq r^2 \text{ και } 0\leq z\leq f(x,y)\right\}$$

είναι λόγω συμμετρίας το ένα όγδοο του ζητούμενου όγκου V, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.



Κατόπιν τούτων, ο ζητούμενος όγκος ισούται με

$$V=8\iint_A f(x,y)dxdy=8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dydx$$

$$=8\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}1dy\right)dx=8\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx=8\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

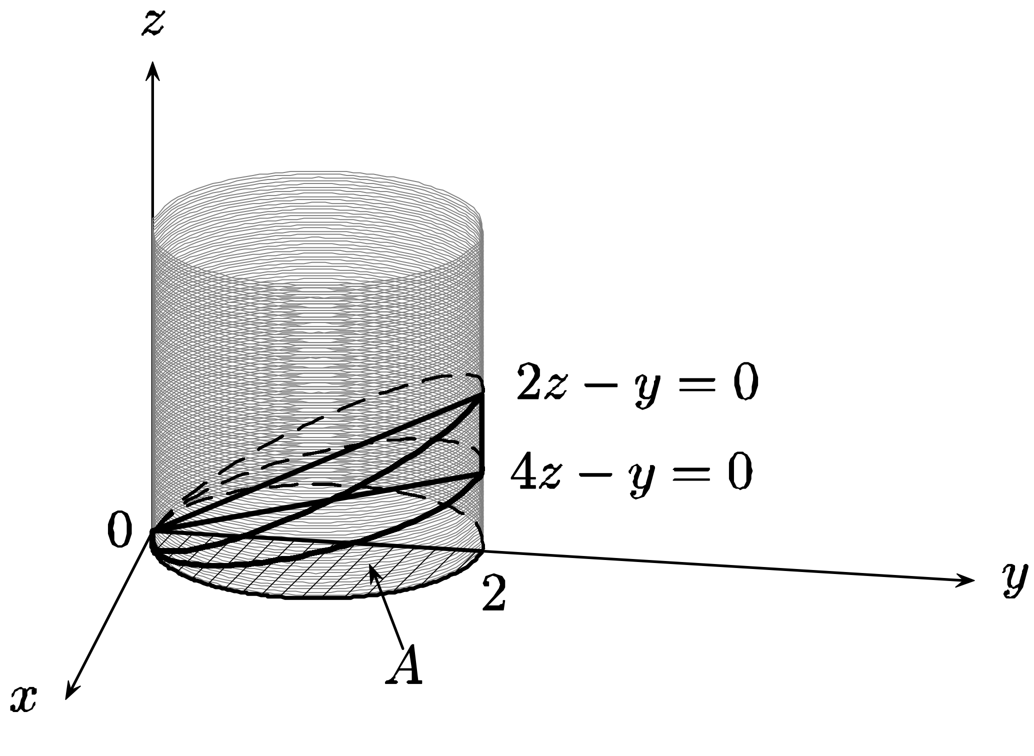
$$=\frac{16r^3}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 30

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που περιέχεται μεταξύ του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 2y$ και των επιπέδων $2z - y = 0$ και $4z - y = 0$.

ΛΥΣΗ

Ο ζητούμενος όγκος είναι $V = V_1 - V_2$,
όπου V_1 (αντ. V_2) είναι ο όγκος του στερεού που περιέχεται μεταξύ του κυλίνδρου και του επιπέδου $2z - y = 0$ (αντ. $4z - y = 0$).



Έτσι, θα είναι

$$V = 2\iint\limits_A \frac{y}{2}dxdy - 2\iint\limits_A \frac{y}{4}dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_A ydxdy$$

όπου $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ και } x^2 + y^2 \leq 2y\right\}$.

Συνεπώς, θα είναι

$$V=\frac{1}{2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} ydxdy=\frac{1}{2}\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 y\sqrt{1-(1-y)^2}dy \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος της (1), τίθεται $1-y=\sin\theta$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε προκύπτει ότι

$$dy=-\cos\theta d\theta, \qquad \sqrt{1-(1-y)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$$

και συνεπώς,

$$\int_0^2 y\sqrt{1-(1-y)^2}dy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\cos\theta(-\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d(\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}[\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}[\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $V=\frac{\pi}{4}$.

Μέση τιμή συνάρτησης δύο μεταβλητών

Υπενθυμίζουμε ότι η μέση τιμή μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f/[\alpha,\beta]$ είναι το πηλίκο του ορισμένου ολοκληρώματός της προς το μήκος $\beta-\alpha$ του διαστήματος όπου ορίζεται.

Ανάλογα, η μέση τιμή μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f/A, όπου A είναι χωρίο, είναι το πηλίκο του διπλού ολοκληρώματός της προς το εμβαδό του χωρίου A όπου ορίζεται, δηλαδή

$$\overline{f}=\frac{\iint\limits_A f(x,y)dxdy}{\iint\limits_A 1dxdy}.$$

Παραδείγματα

1. Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,/\,A$ με $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le 0, y\ge 0 \text{ και } x^2+y^2\le r^2\right\}$, όπου r>0, είναι $\overline{f}=\dfrac{\iint\limits_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy}{\iint\limits_A 1dxdy}$ (1)

Για τον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων της σχέσης (1) χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta, \text{ όπου } \rho>0 \text{ και } \theta \in [0, 2\pi)$$

οπότε το σύνολο A του xy-επιπέδου μετατρέπεται στο ορθογώνιο $A' = [0, r] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και ισχύει ότι

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_{A'} \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^r \rho^2 d\rho\right)d\theta$$

$$= \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r = \frac{\pi r^3}{6}$$

και

$$\iint_A 1dxdy = \iint_{A'} \rho d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^r \rho d\rho\right)d\theta = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^r = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Κατόπιν τούτων, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\overline{f} = \frac{\frac{\pi r^3}{6}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{2}{3}r.$$

2. Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = e^{\left(x^2+y^2\right)} / A$, όπου A είναι ο κυκλικός τομέας που αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $x^2 + y^2 \le 1$ και $-x \le y \le x$, είναι

$$\overline{f} = \frac{\iint\limits_A e^{\left(x^2+y^2\right)} dxdy}{\iint\limits_A 1 dxdy} \tag{1}$$

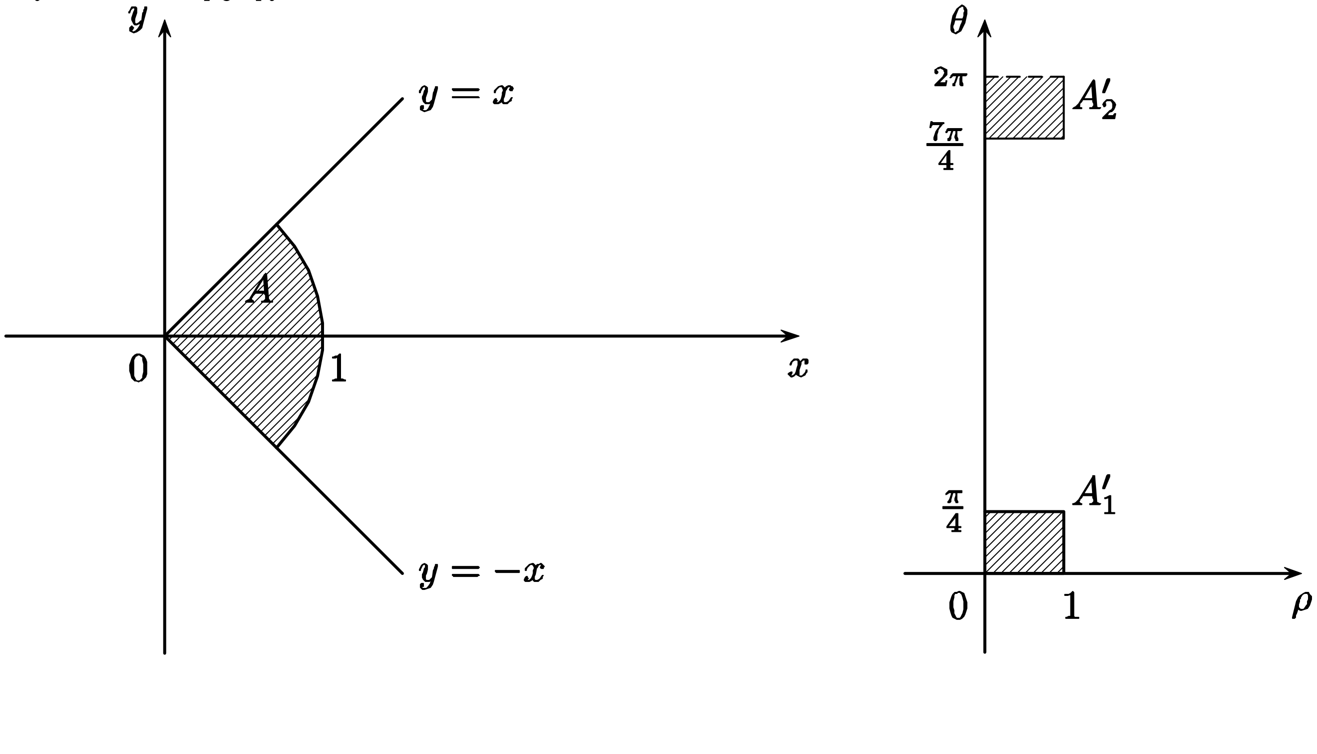
Θα χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες: $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, $\rho>0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$.

Επειδή

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow \rho^2 \leq 1 \text{ και } -\rho\cos\theta \leq \rho\sin\theta \leq \rho\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \rho \leq 1 \text{ και } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right),$$

οπότε ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες μετατρέπει το χωρίο A του xy-επιπέδου στο σύνολο $A' = A_1{}' \cup A_2{}'$ του ρθ-επιπέδου, όπου $A_1{}' = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και $A_2{}' = [0,1] \times \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



Κατόπιν τούτων, είναι

$$\iint_{A} e^{\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\iint_{A'} e^{\rho^2}\left|J\right|d\rho d\theta=\iint_{A_1'} e^{\rho^2}\rho d\rho d\theta+\iint_{A_2'} e^{\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\rho^2}\rho d\theta d\rho+\int_0^1\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} e^{\rho^2}\rho d\theta d\rho$$

$$=\int_0^1 e^{\rho^2}\rho\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\rho+\int_0^1 e^{\rho^2}\rho\left[\theta\right]_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} d\rho=\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho+\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{\rho^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}(e-1).$$

Επιπλέον,

$$\iint_{A} 1dxdy=\iint_{A'}\left|J\right|d\rho d\theta=\iint_{A_1'}\rho d\rho d\theta+\iint_{A_2'}\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho d\theta d\rho+\int_0^1\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\rho d\theta d\rho=\int_0^1\rho\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\rho+\int_0^1\rho\left[\theta\right]_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} d\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\rho d\rho+\frac{\pi}{4}\int_0^1\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

Κατόπιν τούτων, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\overline{f}=\frac{\frac{\pi}{4}(e-1)}{\frac{\pi}{4}}=e-1.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού επεκτείνεται για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι:

Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα συνεκτικό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ **τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο** $(\xi,\eta) \in A$ **με**

$$\iint_A f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint_A 1dxdy.$$

Κατόπιν τούτου, η μέση τιμή της συνάρτησης f θα λαμβάνεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του πεδίου ορισμού της.

Εμβαδό επιφάνειας

Έστω μια συνάρτηση f/A δύο μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραγώγους. Τότε το εμβαδό της επιφάνειας $z = f(x,y)$ ισούται με

$$E = \iint_A \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο τύπος αυτός είναι ανάλογος με τον τύπο που δίδει το μήκος τόξου επιπέδου καμπύλης.

Παράδειγμα

Για τον υπολογισμό του εμβαδού E της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας r θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}\,/\,A$$

όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2\right\}$.

Τότε είναι

$$E=2\iint_A\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$=2\iint_A\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=2\iint_A\frac{\sqrt{r^2-x^2-y^2+x^2+y^2}}{r^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$=2r\iint_A\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}dxdy\overset{*}{=}2r\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}d\rho d\theta$$

$$=2r\left(\int_0^{2\pi}1d\theta\right)\left(\int_0^r\frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}d\rho\right)=4\pi r\left[-\sqrt{r^2-\rho^2}\right]_0^r=4\pi r^2.$$

*Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες

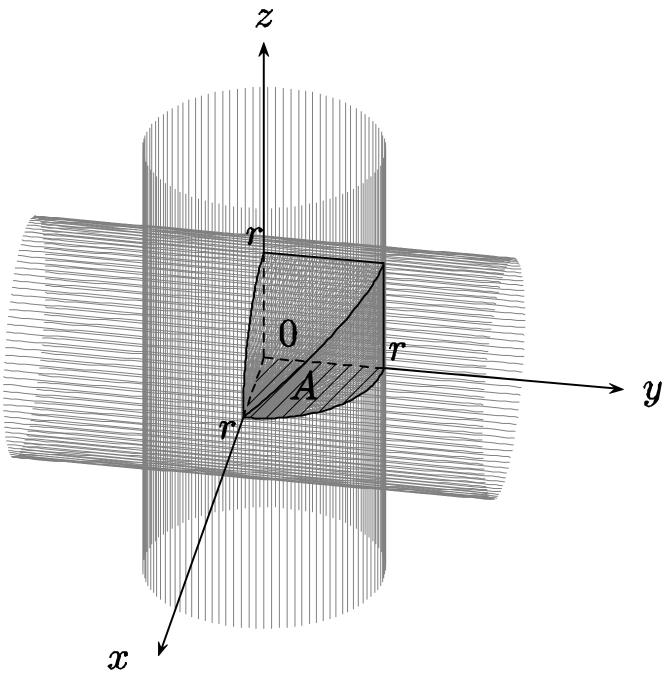
ΑΣΚΗΣΗ 35

Να υπολογισθεί το εμβαδό της επιφάνειας κατά την οποία κόβεται ο κύλινδρος $x^2+z^2=r^2$ από τον κύλινδρο $x^2+y^2=r^2$, όπου r>0.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2}\,/\,A$

όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0 \text{ και } x^2+y^2\leq r^2\right\}$.



Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=8\iint_A\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=8\iint_A\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2+0}\;dxdy$$

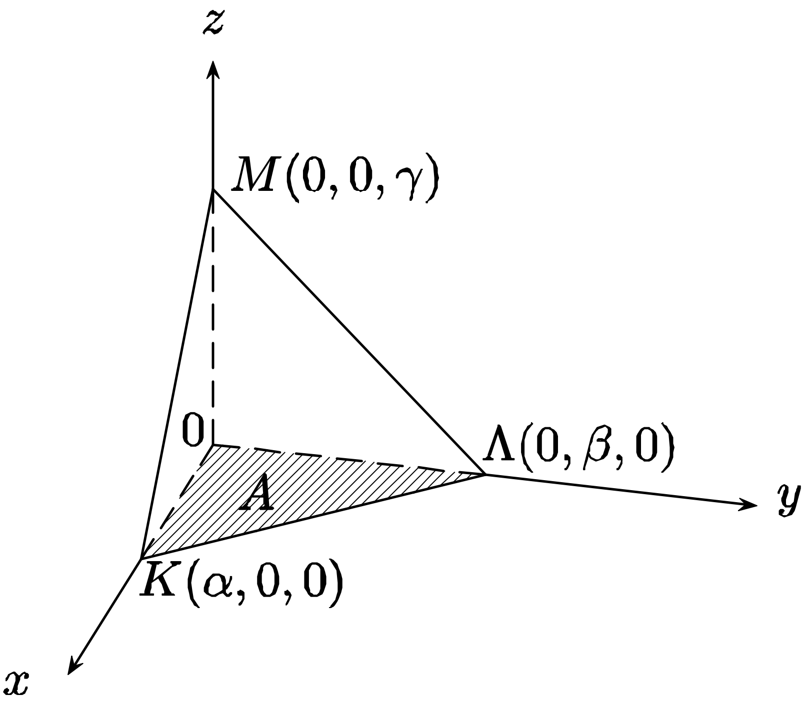
$$=8\iint_A\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dxdy=8r\int_0^r\left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}1dy\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

$$=8r\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=8r^2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 27

Να υπολογισθεί ο όγκος της πυραμίδας που περικλείεται από τα επίπεδα $x=0, y=0, z=0$ και $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$, όπου $\alpha,\beta,\gamma>0$.

ΛΥΣΗ



Ο ζητούμενος όγκος θα είναι

$$V=\iint_{A}\gamma\left(1-\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)dxdy \qquad (1)$$

όπου A είναι το τρίγωνο ΟΚΛ.

Εύκολα ευρίσκεται ότι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Κ, Λ έχει εξίσωση $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$, οπότε θα είναι

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0 \text{ και } \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\leq 1\right\}.$$

Κατόπιν τούτων, η σχέση (1) δίδει

$$V = \gamma \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)} \left(1 - \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) dy dx$$

$$= \gamma \int_0^{\alpha} \left[\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) y - \frac{y^2}{2\beta} \right]_0^{\beta\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)} dx$$

$$= \gamma \int_0^{\alpha} \left(\beta \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^2}{2\beta} \right) dx$$

$$= \frac{\beta\gamma}{2} \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{2} \left[-\frac{\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^3}{3} \right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{6}.$$

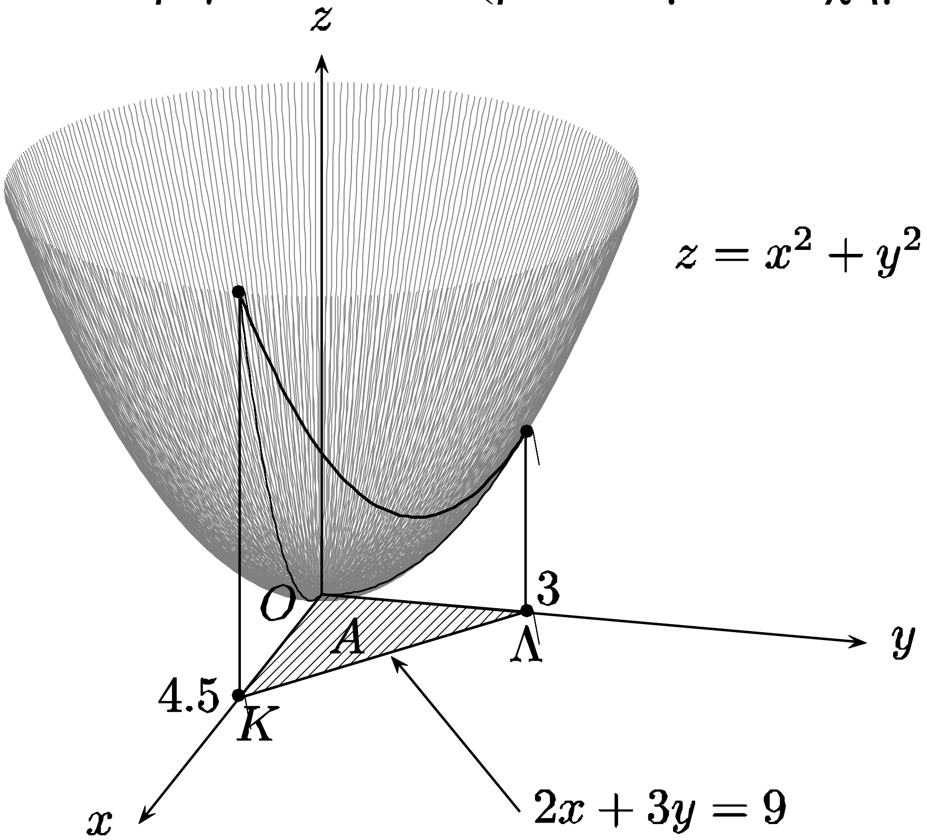
ΑΣΚΗΣΗ 28

Να υπολογισθεί όγκος του στερεού που φράσσεται από τα τέσσερα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 0$ και $2x + 3y = 9$ και την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$.

ΛΥΣΗ

Ο ζητούμενος όγκος θα είναι $V = \iint_A \left(x^2 + y^2\right) dxdy$ (1)

όπου A είναι το τρίγωνο ΟΚΛ (βλ. επόμενο σχήμα).



Κατόπιν τούτων, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$V = \int_0^3 \int_0^{\frac{9-3y}{2}} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^3 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_0^{\frac{9-3y}{2}} dy$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{(9-3y)^3}{24} + \frac{(9-3y)y^2}{2}\right) dy = \left[-\frac{3(3-y)^4}{32} + \frac{3y^3}{2} - \frac{3y^4}{8}\right]_0^3 = \frac{567}{32}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου A που ορίζουν οι καμπύλες:

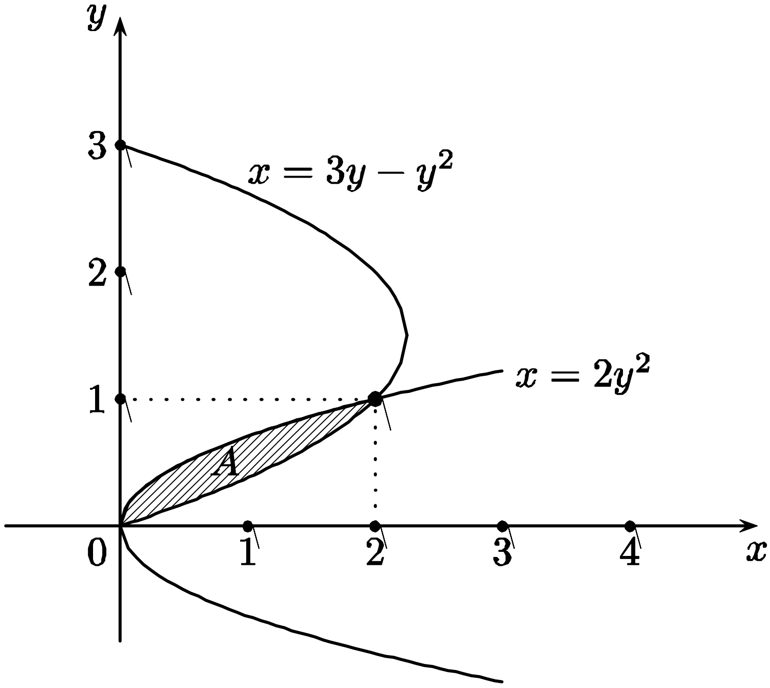
α) $x = 2y^2$ και $x = 3y - y^2$,

β) $y = \ln x, y = 3\ln x$ και $x = e$.

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδό E του χωρίου (βλ. επόμενο σχήμα)

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 \le x \le 3y - y^2 \text{ και } 0 \le y \le 1 \right\}$$



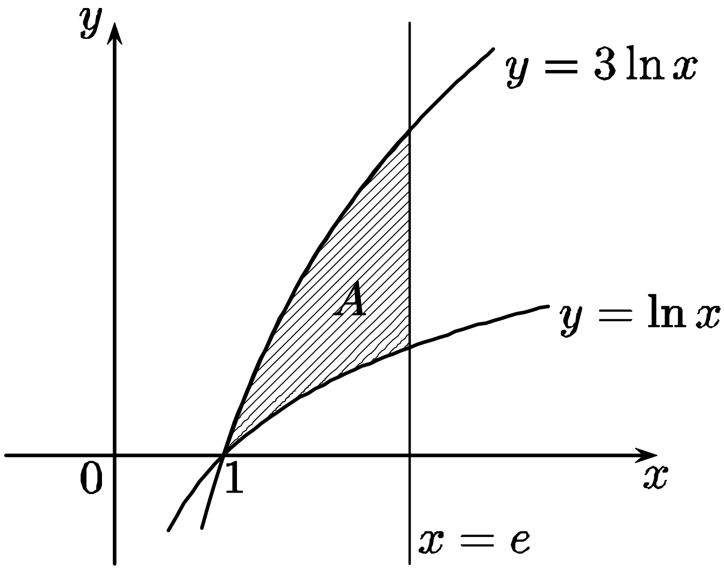
είναι

$$E = \iint\limits_A 1 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{2y^2}^{3y-y^2} 1 dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(3y - y^2 - 2y^2 \right) dy = 3\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

β) Το εμβαδό Ε του χωρίου (βλ. επόμενο σχήμα)

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ln x \le y \le 3\ln x \text{ και } 1\le x\le e\right\}$$



είναι

$$E=\iint_A 1\,dx\,dy$$

$$=\int_1^e\left(\int_{\ln x}^{3\ln x} 1\,dy\right)dx$$

$$=\int_1^e(3\ln x-\ln x)\,dx$$

$$=2\int_1^e x'\ln x\,dx$$

$$=2[x\ln x]_1^e-2\int_1^e x(\ln x)'\,dx$$

$$=2(e\cdot\ln e-1\cdot\ln 1)-2\int_1^e x\frac{1}{x}\,dx$$

$$=2e-2(e-1)$$

$$=2.$$

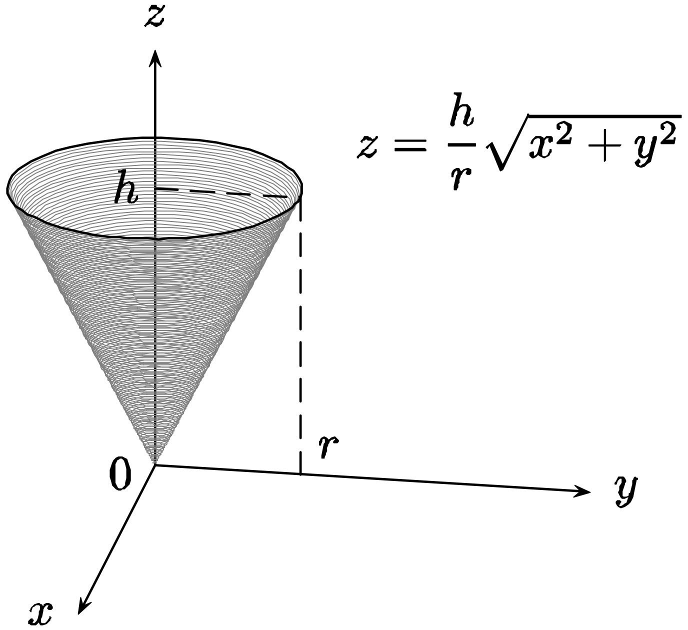
ΑΣΚΗΣΗ 34

Να υπολογισθεί το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου ύψους h και ακτίνας βάσης r.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y)=\frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}\ /\ A$

όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2\right\}$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι η επιφάνεια του κώνου ύψους h και ακτίνας βάσης r (βλ. επόμενο σχήμα).



Έτσι, το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου είναι

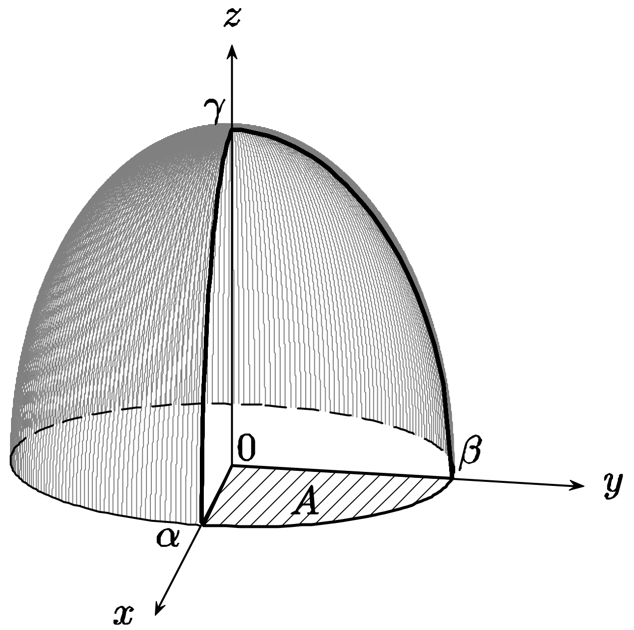
$$
\begin{aligned}
E &= \iint_A \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \\
&= \iint_A \sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{h}{r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy = \iint_A \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}\,dxdy \\
&= \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r \rho d\rho\right) d\theta = \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}\left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right)\left(\int_0^r \rho d\rho\right) \\
&= \pi r\sqrt{r^2+h^2}.
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να υπολογισθεί ο όγκος του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1.$$

ΛΥΣΗ



Ο όγκος του ελλειψοειδούς θα ισούται με

$$V=8\iint_A \gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}} \qquad (1)$$

όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0 \text{ και } \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\leq 1\right\}$, (βλ. προηγούμενο σχήμα).

Θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό:

$$x=\alpha\rho\cos\theta, y=\beta\rho\sin\theta, \rho\geq 0$$

που μετατρέπει το χωρίο A του xy-επιπέδου στο χωρίο $A'=[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ του ρθ-επιπέδου.

Επιπλέον, είναι

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}}=\sqrt{1-\rho^2} \qquad \text{και} \qquad |J|=\alpha\cdot\beta\cdot\rho.$$

Κατόπιν τούτων, η σχέση (1) δίδει

$$V=8\gamma\iint_{A'}\sqrt{1-\rho^2}\,|J|\,d\rho d\theta$$

$$=8\alpha\beta\gamma\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\theta d\rho$$

$$=8\alpha\beta\gamma\frac{\pi}{2}\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho$$

$$=-2\alpha\beta\gamma\pi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\left(1-\rho^2\right)$$

$$=-2\alpha\beta\gamma\pi\left[\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{3}\alpha\beta\gamma\pi.$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Τα γενικευμένα διπλά ολοκληρώματα των συναρτήσεων δύο μεταβλητών ορίζονται ανάλογα με τα γενικευμένα ολοκληρώματα των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, και κατατάσσονται σε δύο είδη.

Το **πρώτο είδος** αφορά την ολοκλήρωση συναρτήσεων δύο μεταβλητών που ορίζονται σε μη φραγμένα σύνολα, ενώ το **δεύτερο είδος** στην ολοκλήρωση συναρτήσεων δύο μεταβλητών που ορίζονται σε φραγμένα σύνολα αλλά δεν είναι φραγμένες[4].

Έτσι, το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_A \frac{xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^3}dxdy$$

όπου $A=[-2,+\infty)\times[3,+\infty)$ είναι πρώτου είδους[5], ενώ το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}$$

όπου $A=[-4,4]\times[-3,3]$ είναι δευτέρου είδους[6].

---

[4] Προφανώς, ανάλογα με τα γενικευμένα ολοκληρώματα των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, μπορεί να ορισθεί και το **τρίτο είδος** γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος ως συνδυασμός των δύο προηγούμενων ειδών.

[5] Αφού το σύνολο A δεν είναι φραγμένο.

[6] Αφού η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}$ δεν είναι φραγμένη στο σημείο $(1,-2)$

1. Πρώτο είδος

Υπενθυμίζεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους για μια συνάρτηση $f/[a,+\infty)$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx.$$

Αν (k_n) είναι μια οποιαδήποτε γνησίως αύξουσα μη φραγμένη ακολουθία με $k_n \geq a$, τελικά από το θεώρημα μεταφοράς προκύπτει ότι

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^{k_n} f(x)dx$$

ή ισοδύναμα

$$\int_A f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)dx, \tag{1}$$

όπου $A=[a,+\infty)$ και $A_n=[a,k_n]$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (A_n) είναι μια ακολουθία από κλειστά και φραγμένα υποδιαστήματα του A και ικανοποιεί τις ιδιότητες:

i) $A_n \subseteq A_{n+1}$

ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$

iii) Αν B είναι ένα κλειστό φραγμένο υποσύνολο του A, τότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}^*$ με $B\subseteq A_n$.

Κατόπιν τούτων, εύκολα προκύπτει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f / A υπάρχει αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\left(A_n\right)$ από κλειστά και φραγμένα υποδιαστήματα του A που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii), (iii), υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)dx$$

και η τιμή του είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της ακολουθίας. Στην περίπτωση αυτή, η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος δίνεται από τη σχέση (1).

Ανάλογα ορίζεται παρακάτω το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση, ορισμένη σε ένα μη φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x,y)\,dxdy$

υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) για οποιαδήποτε ακολουθία (A_n) κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του A με

(i) $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,

(ii) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

(iii)Αν $B \subseteq A$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ με $B \subseteq A_n$,

και η τιμή του ορίου αυτού είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της ακολουθίας (A_n), τότε λέγεται ότι το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο A **συγκλίνει** ή **υπάρχει** και η τιμή του είναι το όριο αυτό, δηλαδή

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x,y)\,dxdy.$$

Αν η συνάρτηση f/A είναι μη αρνητική τότε η ακολουθία (α_n) με $\alpha_n = \iint_{A_n} f(x,y)\,dxdy$ είναι αύξουσα,

διότι

$$\alpha_{n+1} = \iint\limits_{A_{n+1}} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{A_n} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{A_{n+1} \setminus A_n} f(x,y)\,dxdy$$

$$= a_n + \iint\limits_{A_{n+1} \setminus A_n} f(x,y)\,dxdy \geq a_n$$

αφού $\iint\limits_{A_{n+1} \setminus A_n} f(x,y)\,dxdy \geq \iint\limits_{A_{n+1} \setminus A_n} 0\,dxdy = 0$.

Κατόπιν τούτων, η ακολουθία θα συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Επιπλέον, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 8.1

Έστω f μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα μη φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (A_n), (B_n) δύο ακολουθίες κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του A οι οποίες ικανοποιούν τις τρεις συνθήκες στον προηγούμενο ορισμό. Τότε ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{B_n} f(x,y)\,dxdy.$$

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι αν η συνάρτηση f/A είναι μη αρνητική και (A_n) είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία από κλειστά και φραγμένα σύνολα η οποία ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες στον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος, τότε ισχύει ότι

$$\iint_{A} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} f(x,y)\,dxdy.$$

Έτσι, αν η παραπάνω ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι άνω φραγμένη (αντ. δεν είναι άνω φραγμένη), τότε το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης f/A θα συγκλίνει (αντ. απειρίζεται θετικά).

Παράδειγμα

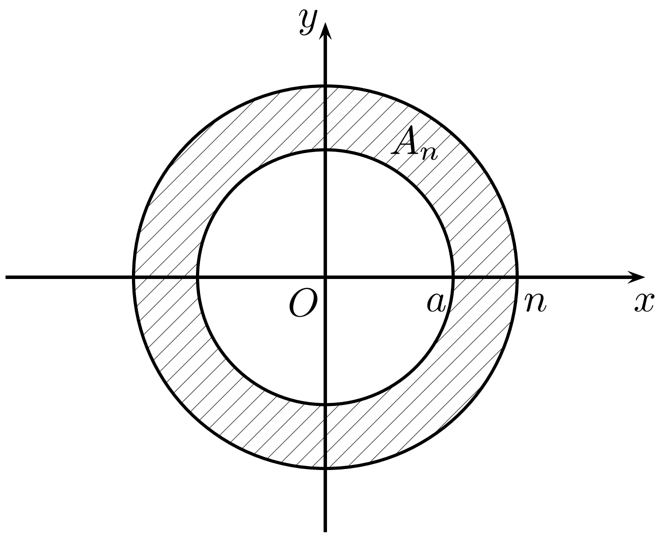
Για το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_A f(x,y)dxdy \text{ , όπου } f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^p}} \,/\, A,$$

$A=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : \alpha^2\le x^2+y^2\right\}$, όπου $\alpha>0$, και $p\in\mathbb{R}$, θεωρούμε την ακολουθία $\left(A_n\right)$ με

$$A_n=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : \alpha^2\le x^2+y^2\le n^2\right\}$$

όπου $n\ge[\alpha]+1$.



Προφανώς η ακολουθία $\left(A_n\right)$ αποτελείται από κλειστά και φραγμένα σύνολα και ικανοποιεί τις ιδιότητες

(i) $A_n\subseteq A_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$,

(ii) $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$,

(iii)Αν $B\subseteq A$είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο τότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}^*$ με $B\subseteq A_n$, Οπότε επειδή η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι μη αρνητική θα ισχύει ότι

$$\iint_{A} \frac{dxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^p}} = \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{dxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^p}}$$

Προκειμένου να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους χρησιμοποιείται η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες: $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, \rho>0, \theta\in[0,2\pi)$.

Επειδή

$(x,y)\in A_n \Leftrightarrow \alpha^2 \le x^2+y^2 \le n^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \le \rho^2 \le n^2 \Leftrightarrow \rho\in[\alpha,n]$

προκύπτει ότι

$$\iint_{A_n} \frac{dxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^p}} = \iint_{[\alpha,n]\times[0,2\pi]} \frac{|J|\,d\rho d\theta}{\sqrt{\left(\rho^2\right)^p}} = \int_0^{2\pi}\left(\int_\alpha^n \frac{\rho}{\rho^p}d\rho\right)d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi} 1d\theta\right)\left(\int_\alpha^n \frac{\rho}{\rho^p}d\rho\right) = \begin{cases} 2\pi\left(\dfrac{n^{-p+2}}{-p+2} - \dfrac{\alpha^{-p+2}}{-p+2}\right), & \text{αν } p\neq 2 \\ 2\pi\left(\ln n - \ln\alpha\right), & \text{αν } p=2. \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων, το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν p>2, και είναι

$$\iint_{A} \frac{dxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^p}} = \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{dxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^p}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi\left(\frac{n^{-p+2}}{-p+2} - \frac{\alpha^{-p+2}}{-p+2}\right) = \frac{2\pi\alpha^{-p+2}}{p-2}.$$

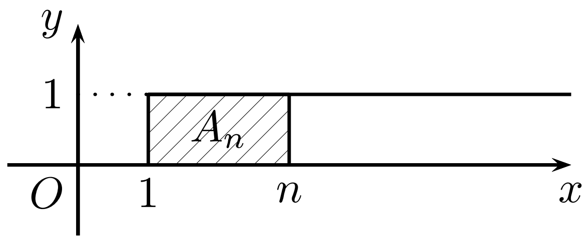
ΑΣΚΗΣΗ 36

Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A \frac{dxdy}{x^2\left(1+y^2\right)}$$

όπου $A=[1,+\infty)\times[0,1]$.

ΛΥΣΗ



Αν τεθεί $A_n=[1,n]\times[0,1], n\in\mathbb{N}^*$, τότε $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ και

$$\iint_A \frac{dxdy}{x^2\left(1+y^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}\frac{dxdy}{x^2\left(1+y^2\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\left(\int_0^1\frac{1}{x^2\left(1+y^2\right)}dy\right)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\left[\operatorname{arctg}y\right]_0^1\frac{1}{x^2}\,dx$$

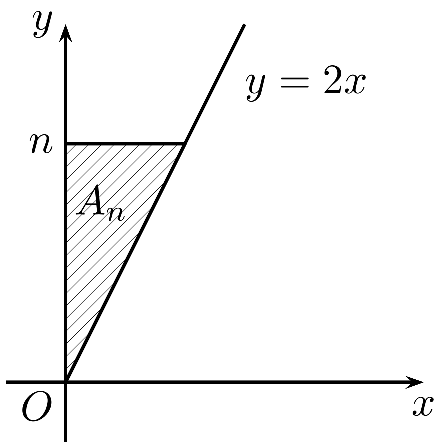
$$=\frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^2}$$

$$=\frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n=\frac{\pi}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος $\displaystyle\iint_A \frac{xe^{-y}\sin y}{y^2}dxdy$ όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0 \text{ και } y\geq 2x\right\}$.

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε την ακολουθία (A_n) των κλειστών και φραγμένων συνόλων

$$A_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq \frac{y}{2} \text{ και } y\leq n\right\},$$

με $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ και

$$\iint_{A_n}\frac{xe^{-y}\sin y}{y^2}dxdy=\int_0^n\left(\int_0^{\frac{y}{2}}xe^{-y}\frac{\sin y}{y^2}dx\right)dy$$

$$=\int_0^n e^{-y}\frac{\sin y}{y^2}\left(\int_0^{\frac{y}{2}}xdx\right)dy=\int_0^n e^{-y}\frac{\sin y}{y^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{y}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^n e^{-y}\sin ydy=\frac{1-e^{-n}(\sin n+\cos n)}{16}.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\iint_A\frac{xe^{-y}\sin y}{y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}\frac{xe^{-y}\sin y}{y^2}dxdy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-n}(\sin n+\cos n)}{16}=\frac{1}{16}.$$

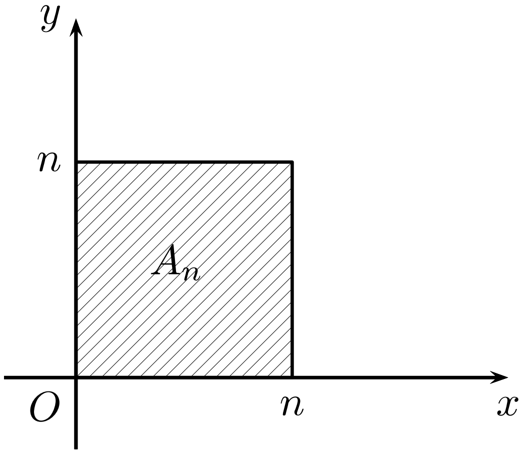
Παρατήρηση

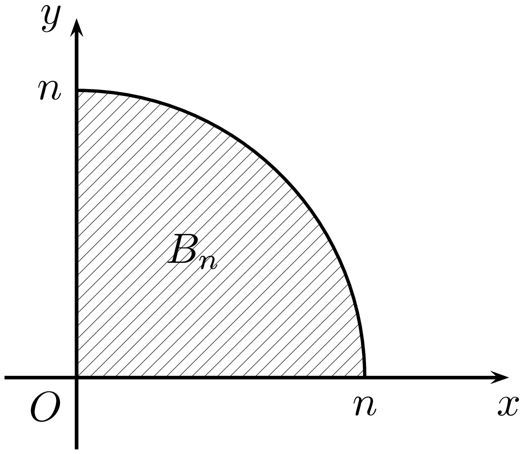
Αν $A=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, τότε οι συνηθέστερες ακολουθίες συνόλων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος είναι οι εξής:

$$A_n=[0,n]\times[0,n]$$

και

$$B_n=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq n^2, x\geq 0, y\geq 0\right\}$$





Παράδειγμα

Για το γενικευμένο διπλό εκθετικό ολοκλήρωμα $\iint\limits_A e^{-\lambda(x+y)}dxdy$, όπου $A=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ και $\lambda>0$,

θεωρούμε την ακολουθία (A_n), με $A_n=[0,n]\times[0,n]$, οπότε

$$I_n=\iint\limits_{A_n} e^{-\lambda(x+y)}dxdy=\int_0^n\int_0^n e^{-\lambda(x+y)}dxdy=\left(\int_0^n e^{-\lambda x}dx\right)\left(\int_0^n e^{-\lambda y}dy\right)$$

$$=\left(\int_0^n e^{-\lambda x}dx\right)^2=\frac{(1-e^{-\lambda n})^2}{\lambda^2}$$

Κατόπιν τούτων, ισχύει ότι $\iint\limits_A e^{-\lambda(x+y)}dxdy=\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\dfrac{1}{\lambda^2}$

ΑΣΚΗΣΗ 40

Να αποδειχθεί η σχέση $\iint\limits_{A} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\frac{\pi}{4}$ όπου $A=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την ακολουθία (A_n) των κλειστών και φραγμένων συνόλων με

$$A_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0 \text{ και } x^2+y^2\leq n^2\right\},$$

για την οποία ισχύει ότι $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ και

$$\iint\limits_{A_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\overset{1}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^n e^{-\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1d\theta\right)\left(\int_0^n e^{-\rho^2}\rho d\rho\right)=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_0^n=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right).$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-n^2}=0$, προκύπτει ότι

$$\iint\limits_{A} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{A_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Για την απόδειξη της δεύτερης ισότητας της άσκησης, θεωρούμε την ακολουθία των ορθογωνίων (B_n) με $B_n = [0,n]\times[0,n]$, για την οποία ισχύει ότι $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και

$$\iint_{B_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^n \int_0^n e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$
$$= \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^n e^{-y^2}dy\right)$$
$$= \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Κατόπιν τούτου, είναι

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\iint_{B_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$
$$= \iint_A e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$
$$= \frac{\pi}{4}.$$

Άρα,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 41

Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{B}(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ για κάθε m,n >0.

ΛΥΣΗ

Από την 3η ιδιότητα της συνάρτησης γάμμα, προκύπτει ότι

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=2\left(\int_0^{+\infty}u^{2m-1}e^{-u^2}du\right)2\left(\int_0^{+\infty}v^{2n-1}e^{-v^2}dv\right)$$

$$=4\left(\lim_{\nu\to\infty}\int_0^{\nu}u^{2m-1}e^{-u^2}du\right)\left(\lim_{\nu\to\infty}\int_0^{\nu}v^{2n-1}e^{-v^2}dv\right)$$

$$=4\lim_{\nu\to\infty}\int_0^{\nu}\int_0^{\nu}u^{2m-1}e^{-u^2}v^{2n-1}e^{-v^2}dudv=4\lim_{\nu\to\infty}\iint\limits_{B_\nu}u^{2m-1}e^{-(u^2+v^2)}v^{2n-1}dudv,$$

όπου $B_\nu=[0,\nu]\times[0,\nu]$. (1)

Αν (A_ν) η ακολουθία των φραγμένων και κλειστών συνόλων

$$A_\nu=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x,y\geq 0 \text{ και } x^2+y^2\leq \nu^2\right\},$$

τότε $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}A_\nu=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}B_\nu=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ και

$$\iint\limits_{A_\nu}u^{2m-1}v^{2n-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\nu}\rho^{2m-1}\cos^{2m-1}\theta\rho^{2n-1}\sin^{2n-1}\theta e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\nu}\rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}d\rho\right)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{B}(m,n)\left(\int_0^{\nu}\rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}d\rho\right) \qquad (2)$$

Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση 8.1, ισχύει ότι

$$\lim_{\nu\to\infty}\iint\limits_{A_\nu}u^{2m-1}v^{2n-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv=\lim_{\nu\to\infty}\iint\limits_{B_\nu}u^{2m-1}v^{2n-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv,$$

από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=4\frac{1}{2}\mathrm{B}(m,n)\lim_{\nu\to\infty}\int_0^{\nu}\rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}d\rho$$

$$=\mathrm{B}(m,n)2\int_0^{+\infty}\rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}d\rho=\mathrm{B}(m,n)\Gamma(m+n).$$

ΑΣΚΗΣΗ 42

Αν f, g είναι κατά τμήματα συνεχείς και εκθετικής τάξης $\alpha \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ο τύπος:

$$\mathcal{L}\left[(f*g)(t)\right]=\mathcal{L}\left[f(t)\right]\cdot\mathcal{L}\left[g(t)\right].$$

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace για τη συνέλιξη $f*g$, προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[(f*g)(t)\right]=\int_0^{+\infty}e^{-st}(f*g)(t)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-st}\left(\int_0^t f(z)g(t-z)dz\right)dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(\int_0^t e^{-st}f(z)g(t-z)dz\right)dt$$

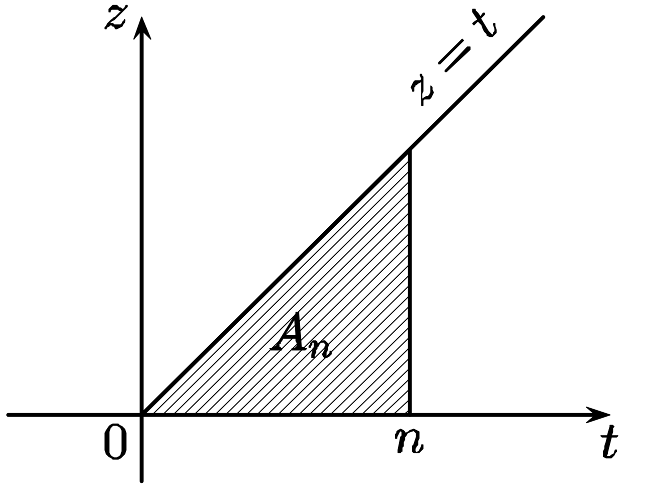
$$=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{A_n}e^{-st}f(z)g(t-z)dzdt \qquad (1)$$

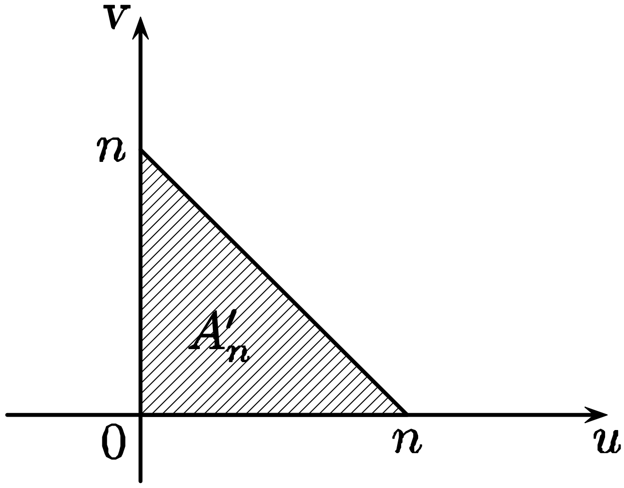
όπου $A_n=\left\{(t,z)\in\mathbb{R}^2 : t\le n \text{ και } 0\le z\le t\right\}$.

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος της σχέσης (1), χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός:

$$u=t-z,\ \ v=z$$

οπότε το τρίγωνο A_n του tz-επιπέδου μετατρέπεται στο τρίγωνο A_n' του uv-επιπέδου:





Έτσι, προκύπτει ότι

$$t = u + v,\ z = v,$$

οπότε

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial u} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

και

$$\iint\limits_{A_n} e^{-st} f(z) g(t-z) \, dz dt = \iint\limits_{A'_n} e^{-s(u+v)} f(v) g(u) \, du dv,\ n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Θα δειχθεί ότι το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{A} e^{-s(u+v)} f(v) g(u) \, du dv$, όπου $A = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, συγκλίνει για κάθε $s > \alpha$.

Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι κατά τμήματα συνεχείς και εκθετικής τάξης α, θα υπάρχουν[7] $M_1, M_2 > 0$, με

$$e^{-sv} | f(v) | \leq M_1 e^{-(s-\alpha)v} \text{ και } e^{-su} | g(u) | \leq M_2 e^{-(s-\alpha)u},$$

για κάθε $(u, v) \in A$, οπότε $| e^{-s(u+v)} f(v) g(u) | \leq M_1 M_2 e^{-(s-\alpha)(u+v)}$ και το εκθετικό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{A} e^{-(s-\alpha)(u+v)} du dv$, συγκλίνει όταν $s > \alpha$ (βλ. προηγούμενο παράδειγμα).

Επομένως, το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{A} e^{-s(u+v)} f(v) g(u) \, du dv$ συγκλίνει (απολύτως) όταν $s > \alpha$.

---

[7] Βλ. σχέση (4) λυμένης άσκησης 4, κεφαλαίου 10.

Κατόπιν τούτων, επειδή η ακολουθία $\left(A'_n\right)$ αποτελείται από κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του A και ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες του ορισμού του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος, προκύπτει ότι

$$\iint_A e^{-s(u+v)} f(v) g(u) \, du dv = \lim_{n\to\infty} \iint_{A'_n} e^{-s(u+v)} f(v) g(u) \, du dv \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\iint_A e^{-s(u+v)} f(v) g(u) \, du dv = \mathcal{L}\left[(f * g)(t)\right]. \qquad (4)$$

Από την άλλη, χρησιμοποιώντας την ακολουθία $\left(B_n\right)$, με $B_n = [0,n] \times [0,n]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\iint_A e^{-s(u+v)} f(v) g(u) \, du dv &= \lim_{n\to\infty} \iint_{B_n} e^{-s(u+v)} f(v) g(u) \, du dv \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_0^n e^{-s(u+v)} f(v) g(u) \, du dv \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\int_0^n e^{-sv} f(v) \, dv \right) \left(\int_0^n e^{-su} g(u) \, du \right) \right) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-sv} f(v) \, dv \cdot \int_0^{+\infty} e^{-su} g(u) \, du \\
&= \mathcal{L}\left[f(t)\right] \cdot \mathcal{L}\left[g(t)\right]. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 37

Να υπολογισθεί το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα $\iint_A (x+y)e^{-(x+y)}dxdy$, με $A=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την ακολουθία των ορθογωνίων (A_n) με

$$A_n=[0,n]\times[0,n], n\in\mathbb{N}^*,$$

για την οποία ισχύει $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ και

$$\iint_{A_n}(x+y)e^{-(x+y)}dxdy=\iint_{A_n}xe^{-(x+y)}dxdy+\iint_{A_n}ye^{-(x+y)}dxdy \quad (1)$$

Επιπλέον, είναι

$$\iint_{A_n}xe^{-(x+y)}dxdy=\int_0^n xe^{-x}\left(\int_0^n e^{-y}dy\right)dx$$

$$=\left(\int_0^n xe^{-x}dx\right)\left(\int_0^n e^{-y}dy\right)=\left(1-(n+1)e^{-n}\right)\left(1-e^{-n}\right).$$

Ανάλογα ευρίσκεται ότι

$$\iint_{A_n}ye^{-(x+y)}dxdy=\left(1-(n+1)e^{-n}\right)\left(1-e^{-n}\right).$$

Συνεπώς, τελικά, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\iint_{A_n}(x+y)e^{-(x+y)}dxdy=2\left(1-(n+1)e^{-n}\right)\left(1-e^{-n}\right) \quad (2)$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty}e^{-n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)e^{-n}=0$, από τη (2) προκύπτει

$$\iint_A(x+y)e^{-(x+y)}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}(x+y)e^{-(x+y)}dxdy$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-(n+1)e^{-n}\right)\left(1-e^{-n}\right)=2.$$

2. Δεύτερο είδος

Έστω f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ φραγμένο σύνολο και $(x_0, y_0) \in A$ ένα οριακό σημείο του, έτσι ώστε η $f / A \setminus \{(x_0, y_0)\}$ είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη στο (x_0, y_0), δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \pm\infty .$$

Αν το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x,y)\,dxdy$$

υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) για οποιαδήποτε ακολουθία (A_n) κλειστών υποσυνόλων του $A \setminus \{(x_0, y_0)\}$ με

(i) $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,

(ii) $A \setminus \{(x_0, y_0)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

(iii)Αν $B \subseteq A \setminus \{(x_0, y_0)\}$ είναι κλειστό σύνολο τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ με $B \subseteq A_n$,

και η τιμή του ορίου αυτού είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της ακολουθίας (A_n), τότε λέγεται ότι το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο A **συγκλίνει** ή **υπάρχει** και η τιμή του είναι το όριο αυτό, δηλαδή

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x,y)\,dxdy .$$

Είναι φανερό ότι οι ορισμοί των γενικευμένων διπλών ολοκληρωμάτων πρώτου και δευτέρου είδους είναι παρόμοιοι, οπότε ο τρόπος υπολογισμού του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος δευτέρου είδους είναι ανάλογος με αυτόν του πρώτου είδους.

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση f είναι μη αρνητική τότε το παραπάνω όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και η τιμή του είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της ακολουθίας $\left(A_n\right)$.

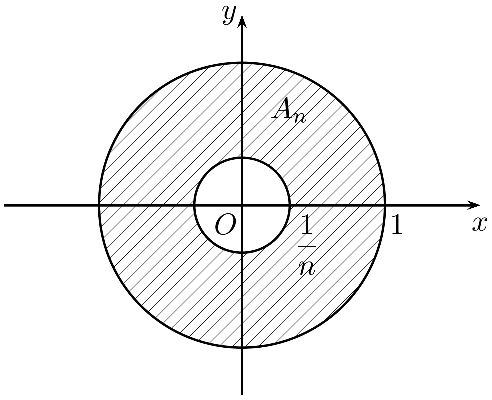
Κατόπιν τούτου, με κατάλληλη επιλογή της ακολουθίας $\left(A_n\right)$ ευρίσκεται η τιμή του ορίου, που θα ισούται με τη ζητούμενη τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Παράδειγμα

Για το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_A \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\right\}$, θεωρούμε την ακολουθία (A_n) με



$$A_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 1\right\},$$

για την οποία ισχύει ότι

$$\iint_{A_n} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^1 \rho\ln\rho\ d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}1d\theta\int_{\frac{1}{n}}^1 \rho\ln\rho\ d\rho=2\pi\left[\frac{\rho^2\left(\ln\rho-\frac{1}{2}\right)}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^1$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}\left(\ln n+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Κατόπιν τούτου, και επειδή $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\ln n+\frac{1}{2}\right)=0$, προκύπτει ότι

$$\iint_A \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=-\frac{\pi}{2}.$$

Το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους ορίζεται γενικότερα, όταν η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη σε περισσότερα του ενός σημεία.

Συγκεκριμένα, αν $B=\left\{\left(x_i,y_i\right), i\in[\kappa]\right\}\subseteq A$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να μην είναι φραγμένη σε κάθε σημείο $\left(x_i,y_i\right)$, $i\in[\kappa]$ και να είναι συνεχής στο $A\setminus B$ τότε χωρίζουμε το σύνολο A σε κ μη επικαλυπτόμενα σύνολα A_1, A_2, ..., A_κ έτσι ώστε $B\cap A_i=\left\{\left(x_i,y_i\right)\right\}$, για κάθε $i\in[\kappa]$.

Κατόπιν τούτων, επειδή η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη σε ένα ακριβώς σημείο του A_i (δηλαδή στο $\left(x_i,y_i\right)$), ορίζεται το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα της f στο A_i.

Έτσι, το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο A λέγεται ότι **συγκλίνει** αν και μόνο αν συγκλίνουν τα γενικευμένα διπλά ολοκληρώματα της συνάρτησης στα σύνολα A_i για κάθε $i\in[\kappa]$, και ισχύει

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy=\sum_{i=1}^{\kappa}\iint_{A_i} f(x,y)\,dxdy.$$

Το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης είναι καλά ορισμένο, διότι αποδεικνύεται ότι η τιμή του προηγούμενου αθροίσματος είναι ανεξάρτητη από τον τρόπο επιλογής των συνόλων A_i, $i\in[\kappa]$.

Ένας ισοδύναμος τρόπος ορισμού του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος σ' αυτή την περίπτωση, προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στον ορισμό που δόθηκε για συναρτήσεις μη φραγμένες σε ένα ακριβώς σημείο $\left(x_0, y_0\right)$, το σύνολο $A \setminus \left\{x_0, y_0\right\}$ με το A\B, όπου $B = \left\{\left(x_i, y_i\right), i \in [\kappa]\right\}$.

Ανάλογα ορίζεται και το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f, της οποίας το σύνολο B όλων των σημείων του A στα οποία η f δεν είναι φραγμένη, έχει εμβαδό ίσο με μηδέν. Όπως, για παράδειγμα, όταν η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη μόνο στα σημεία μιας επίπεδης καμπύλης.

ΑΣΚΗΣΗ 43

Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος $\displaystyle\iint_A \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy$

όπου $A=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\right\}$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f\left(x,y\right)=\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} / A\setminus\left\{\left(0,0\right)\right\}$ είναι συνεχής, αλλά δεν είναι φραγμένη στο σημείο $(0,0)$, οπότε το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα είναι δευτέρου είδους. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $\left(A_n\right)$ με $A_n=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 1\right\}$,

για την οποία ισχύει ότι $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A\setminus\left\{\left(0,0\right)\right\}$ και

$$\iint_{A_n}\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\left(\rho\sin\theta\right)^2\rho}{\left(\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\sin^2\theta d\rho d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1}1d\rho\right)=\left(\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

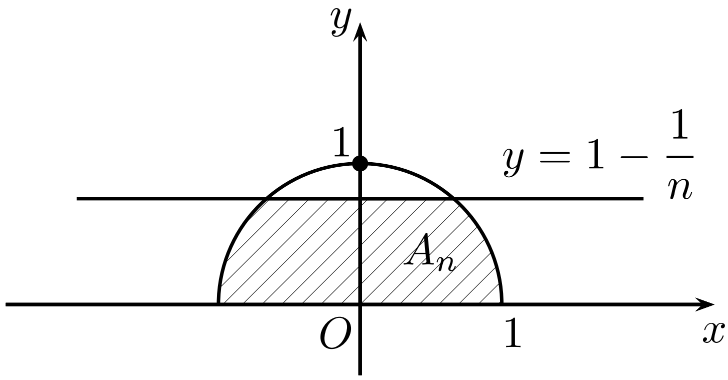
$$\iint_A\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi=\pi.$$

ΑΣΚΗΣΗ 44

Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{1-y}}$,

όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y \text{ και } x^2+y^2\le 1\right\}$.

ΛΥΣΗ



Η συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-y}} \,/\, A\setminus\{(0,1)\}$$

είναι συνεχής, αλλά δεν είναι φραγμένη στο σημείο $(0,1)$, οπότε το γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα είναι δευτέρου είδους.

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων (A_n) με

$$A_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1-\frac{1}{n} \text{ και } x^2+y^2\le 1\right\},$$

για την οποία ισχύει ότι $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n = A\setminus\{(0,1)\}$ και

$$\iint_{A_n}\frac{1}{\sqrt{1-y}}dxdy=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y}}dxdy=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-y}}[x]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dy$$

$$=2\int_0^{1-\frac{1}{n}}\sqrt{1+y}dy=2\left[\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1-\frac{1}{n}}=\frac{4}{3}\left(\left(2-\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\iint_A\frac{dxdy}{\sqrt{1-y}}=\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}\frac{dxdy}{\sqrt{1-y}}=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\left(2-\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$