ΔΙΑΛΕΞΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Περιεχόμενα διάλεξης:

Τριγωνομετρικές σειρές

Σειρές Fourier

Ανισότητα Bessel

Ταυτότητα Parseval

ΓΕΝΙΚΑ

Ένα από τα σημαντικότερα θέματα της Ανάλυσης είναι η παράσταση των συναρτήσεων ως αθροίσματα σειρών απλούστερων συναρτήσεων. Ο κλασσικότερος τρόπος είναι η παράσταση των συναρτήσεων μέσω δυναμοσειρών, που όπως ήδη έχει λεχθεί επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των σειρών Taylor.

Εντούτοις υπάρχουν συναρτήσεις που αρχικά εμφανίσθηκαν στη μελέτη διαφόρων προβλημάτων της Φυσικής, οι οποίες δεν μπορούν να παρασταθούν με δυναμοσειρές. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιείται μια διαφορετική προσέγγιση που είναι παράσταση των περιοδικών συναρτήσεων μέσω τριγωνομετρικών σειρών, των **σειρών Fourier**.

Η παραπέρα προσπάθεια αντιμετώπισης αντιστοίχων προβλημάτων και για μη περιοδικές συναρτήσεις οδήγησε στη παράσταση των συναρτήσεων μέσω τριγωνομετρικών γενικευμένων ολοκληρωμάτων, **των ολοκληρωμάτων Fourier**. Στη κατεύθυνση αυτή θεμελιώθηκε και μελετήθηκε ο μετασχηματισμός Fourier ο οποίος έχει πολλές εφαρμογές σε διάφορες θετικές επιστήμες. Τα παραπάνω θέματα, που εξετάζονται σε αυτό το κεφάλαιο, αποτελούν μια εισαγωγή στην **Ανάλυση Fourier** που έχει πολλές εφαρμογές σε ένα ευρύτατο φάσμα θεμάτων της Πληροφορικής, όπως για παράδειγμα στην ανάλυση συνεκτικών φίλτρων, τη ποσοτική περιγραφή της δειγματοληψίας σημάτων συνεχούς χρόνου, και την ανάλυση και σύνθεση συστημάτων επεξεργασίας σημάτων και εικόνων.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Κάθε σειρά της μορφής

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

όπου $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\ell > 0$, ονομάζεται **τριγωνομετρική σειρά**.

Οι αριθμοί a_0, a_n, b_n, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, ονομάζονται **συντελεστές** της τριγωνομετρικής σειράς.

Αν $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (αντ. $b_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$), τότε η τριγωνομετρική σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \qquad \left(\text{αντ. } \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

και ονομάζεται **ημιτονοειδής** (αντ. **συνημιτονοειδής**) **σειρά**.

Μία ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1

Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)<+\infty$ τότε η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά θα συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, επειδή

$$\left|a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right|\le|a_n|\left|\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right|+|b_n|\left|\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right|$$
$$\le|a_n|+|b_n|$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$, και $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)<+\infty$,

έπεται, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης Ι, η απόλυτη σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς. Επιπλέον, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, έπεται ότι η σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς θα είναι ομοιόμορφη.

Συνάρτηση τριγωνομετρικής σειράς

Κάθε συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

ορίζει μια συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

η οποία ονομάζεται **συνάρτηση της τριγωνομετρικής σειράς.**

Η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2ℓ.

Πραγματικά,

$$f(x+2\ell)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi(x+2\ell)}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi(x+2\ell)}{\ell}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}+2n\pi\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}+2n\pi\right)\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$=f(x)$$

Επιπλέον, αν η σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς είναι ομοιόμορφη προκύπτει ότι η συνάρτηση f θα είναι συνεχής.

Τέλος, στην επόμενη πρόταση δίδονται οι συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς με τη βοήθεια των τιμών της f.

Πρόταση 2.2

Αν η τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση f στο διάστημα $(-\ell,\ell)$, τότε ισχύουν οι τύποι

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 2.2, θα χρησιμοποιήσουμε τα γνωστά ολοκληρώματα:

(i) $\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\frac{n\pi x}{\alpha}dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\frac{n\pi x}{\alpha}dx=0$,

(ii) $\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\frac{n\pi x}{\alpha}\cdot\sin\frac{m\pi x}{\alpha}dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\frac{n\pi x}{\alpha}\cdot\cos\frac{m\pi x}{\alpha}dx=\begin{cases}0, & \text{αν } m\neq n\\ \alpha, & \text{αν } m=n,\end{cases}$

(iii) $\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\frac{n\pi x}{\alpha}\cdot\cos\frac{m\pi x}{\alpha}dx=0$,

όπου $\alpha>0$ και $m,n\in\mathbb{N}^*$.

Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς προκύπτει ότι

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$= \frac{a_0}{2} 2\ell + 0 + 0 \; = a_0 \ell .$$

Άρα, $\quad a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$

Για $n \in \mathbb{N}^*$, πολλαπλασιάζοντας τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ με $\cos\frac{n\pi x}{\ell}$, προκύπτει η σχέση

$$f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell} = \frac{a_0}{2}\cos\frac{n\pi x}{\ell} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{\ell} + b_m \sin\frac{m\pi x}{\ell}\right) \quad (1)$$

Επιπλέον, επειδή

$$\left|\cos\frac{n\pi x}{\ell}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{\ell} + b_m \sin\frac{m\pi x}{\ell}\right)\right| \le \left|a_m \cos\frac{m\pi x}{\ell} + b_m \sin\frac{m\pi x}{\ell}\right|$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η σειρά του δεύτερου μέλους της σχέσης (1) συγκλίνει ομοιόμορφα.

Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\cdot 0 + a_n \cdot \ell + 0 \; = a_n \ell \; .$$

Άρα, $\quad a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx .$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\qquad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \; .$

Στην προηγούμενη πρόταση εκφράζονται οι συντελεστές μιας τριγωνομετρικής σειράς με τη βοήθεια της συνάρτησής της. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το αντίστροφο πρόβλημα έκφρασης μιας συνάρτησης f μέσω μιας τριγωνομετρικής σειράς. Το πρόβλημα αυτό μας οδηγεί στην έννοια της σειράς Fourier που θα εξετασθεί στις επόμενες παραγράφους.

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Σε κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/[-\ell,\ell]$, όπου $\ell>0$, αντιστοιχεί μια τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

όπου οι συντελεστές της δίνονται από τους τύπους

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

όπου $n\in\mathbb{N}^*$.

Η τριγωνομετρική αυτή σειρά ονομάζεται **σειρά Fourier της συνάρτησης** $f/[-\ell,\ell]$ και οι συντελεστές της ονομάζονται **συντελεστές Fourier.** Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Ειδικές περιπτώσεις

(i) Αν $\ell=\pi$, τότε οι εκφράσεις των συντελεστών Fourier είναι ιδιαίτερα απλές:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

όπου $n\in\mathbb{N}^*$.

(ii) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια (αντ. περιττή), τότε η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι συνημιτονοειδής (αντ. ημιτονοειδής).

Πραγματικά, αν για παράδειγμα η f είναι άρτια, τότε οι συναρτήσεις $f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$, $n\in\mathbb{N}^*$ θα είναι περιττές, οπότε

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=0$$

και επομένως η σειρά Fourier της f θα είναι συνημιτονοειδής.

Υπενθυμίζεται ότι

(i) Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=0$.

(ii) Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$.

Παραδείγματα

1. Για τη συνάρτηση με $f(x)=x^2/[-\pi,\pi]$, είναι $\ell=\pi$ και $b_n=0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, αφού η συνάρτηση f είναι άρτια.

Επιπλέον, είναι

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{2\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3}$$

και για $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx\\&=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2(\sin nx)'dx\\&=\frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}2x\sin nx dx\\&=0+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x(\cos nx)'dx\\&=\frac{4}{n^2\pi}\left[x\cos nx\right]_0^{\pi}-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x'\cos nx dx\\&=\frac{4}{n^2\pi}\pi\cos n\pi-\frac{4}{n^3\pi}\left[\sin nx\right]_0^{\pi}\\&=\frac{4}{n^2}\cos n\pi-0=(-1)^n\frac{4}{n^2}\ .\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

2. Για τη συνάρτηση $f/[-1,1]$ με

$$f(x)=\begin{cases} -\cosh x\ , & \text{αν } x\in[-1,0) \\ 0 & , \text{αν } x=0 \\ \cosh x\ , & \text{αν } x\in(0,1] \end{cases}$$

είναι $\ell=1$ και $a_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, αφού η f είναι περιττή.

(Υπενθυμίζεται ότι $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.)

Επιπλέον, είναι

$$b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x dx$$

$$=2\int_0^1 \cosh x \sin n\pi x dx=2\int_0^1 (\sinh x)' \sin n\pi x dx$$

$$=2[\sinh x \sin n\pi x]_0^1-2\int_0^1 \sinh x(\sin n\pi x)' dx=0-2n\pi\int_0^1 \sinh x\cos n\pi x dx$$

$$=-2n\pi\int_0^1 (\cosh x)' \cos n\pi x dx$$

$$=-2n\pi[\cosh x\cos n\pi x]_0^1+2n\pi\int_0^1 \cosh x(\cos n\pi x)' dx$$

$$=-2n\pi(\cosh 1\cos n\pi\text{-}\cosh 0\cos 0)-2n^2\pi^2\int_0^1 \cosh x\sin n\pi x dx$$

$$=-2n\pi\left((-1)^n\cosh 1-1\right)-n^2\pi^2 b_n\ .$$

Άρα, $$b_n=\frac{2n\pi\left((-1)^{n+1}\cosh 1+1\right)}{1+n^2\pi^2}\ .$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$f(x)\sim 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left((-1)^{n+1}\cosh 1+1\right)}{1+n^2\pi^2}\sin n\pi x\,.$$

3. Για τη συνάρτηση $f/\left[-3,3\right]$ με

$$f(x)=\begin{cases} 2 & , x\in[-3,0] \\ x-2 & , x\in(0,3] \end{cases}$$

είναι $\ell=3$ και

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}2dx+\int_{0}^{3}(x-2)dx\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left[2x\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^3\right)=\frac{3}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}2\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{3}(x-2)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2\cdot 3}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_{-3}^{0}+\frac{3}{n\pi}\int_{0}^{3}(x-2)\left(\sin\frac{n\pi x}{3}\right)'dx\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[0+\frac{3}{n\pi}\left[(x-2)\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3-\frac{3}{n\pi}\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{n\pi}\cdot 0-\frac{9}{n^2\pi^2}\left[-\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3\right]$$

$$=3\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0} 2\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_{0}^{3}(x-2)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{2\cdot 3}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_{-3}^{0} - \frac{3}{n\pi}\int_{0}^{3}(x-2)\left(\cos\frac{n\pi x}{3}\right)' dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{6}{n\pi}(\cos n\pi - 1) - \frac{3}{n\pi}\left[(x-2)\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_{0}^{3} + \frac{3}{n\pi}\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{6}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) - \frac{3}{n\pi}(\cos n\pi + 2) + \frac{9}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_{0}^{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{6}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) - \frac{3}{n\pi}\left((-1)^n + 2\right) + 0\right]$$

$$= \frac{(-1)^n - 4}{n\pi}\ ,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$f(x) \sim \frac{3}{4} + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\ .$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να ευρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f/[-\pi,\pi]$ με $f(x)=e^x$.

ΛΥΣΗ

Είναι

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^x\right)' \cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[e^x \cos nx\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx \\ &= (-1)^n \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^x\right)' \sin nx\,dx \\ &= (-1)^n\, 2\frac{\sinh\pi}{\pi} + \frac{n}{\pi}\Big[e^x \sin nx\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx \\ &= 2(-1)^n \frac{\sinh\pi}{\pi} + 0 - n^2 a_n. \end{aligned}$$

Άρα, $\quad \left(n^2+1\right)a_n = 2(-1)^n \dfrac{\sinh\pi}{\pi}$,

και επομένως $\quad a_n = 2\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot\dfrac{\sinh\pi}{\pi}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Όμοια προκύπτει ότι $b_n = \dfrac{2(-1)^{n+1} n}{n^2+1}\cdot\dfrac{\sinh\pi}{\pi}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι,

$$f(x) \sim \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx - n\sin nx}{n^2+1}\right].$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να ευρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f/[-\pi,\pi]$ με

$$f(x)=\begin{cases}\kappa x\ , \text{αν } x\in[-\pi,0]\\ \lambda x\ , \text{αν } x\in(0,\pi]\end{cases},\qquad \text{όπου } \kappa,\lambda\in\mathbb{R}.$$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\kappa x dx+\int_0^{\pi}\lambda x dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\kappa x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{\lambda x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\kappa\pi^2}{2}+\frac{\lambda\pi^2}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(\lambda-\kappa)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\kappa x\cos nx dx+\int_0^{\pi}\lambda x\cos nx dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\kappa}{n}\int_{-\pi}^{0}x(\sin nx)' dx+\frac{\lambda}{n}\int_0^{\pi}x(\sin nx)' dx\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\kappa\left([x\sin nx]_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx\right)+\lambda\left([x\sin nx]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx dx\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\kappa\left(0+\frac{1}{n}[\cos nx]_{-\pi}^{0}\right)+\lambda\left(0+\frac{1}{n}[\cos nx]_0^{\pi}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left[\kappa\left(1-\cos(-n\pi)\right)+\lambda(\cos n\pi-1)\right]=\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cdot\frac{\kappa-\lambda}{\pi}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Όμοια ευρίσκουμε ότι, $b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\kappa+\lambda)$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι,

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}(\lambda-\kappa)+\frac{\kappa-\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx+(\kappa+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να ευρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f/[-2,2]$ με

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \text{αν } x\in[-2,0) \\ 3x & , \text{αν } x\in[0,2] \end{cases}.$$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$a_0=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}0dx+\int_{0}^{2}3xdx\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^2=3$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 3x\cos\frac{n\pi x}{2}dx \;=\frac{3}{n\pi}\int_0^2 x\left(\sin\frac{n\pi x}{2}\right)' dx$$

$$=\frac{3}{n\pi}\left(\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2-\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right) \;=\frac{3}{n\pi}\left(2\sin n\pi+\frac{2}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2\right)$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1) \;=\frac{6}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Όμοια ευρίσκουμε ότι

$$b_n=(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi},$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$f(x)\sim\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\int_{-\ell}^{\ell}\left(f(x)-\sigma_n(x)\right)^2 dx=\int_{-\ell}^{\ell} f^2(x)dx-\ell\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]$$

όπου $f/[-\ell,\ell]$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $a_0, a_n, b_n, n\in\mathbb{N}^*$ είναι οι συντελεστές Fourier και $\sigma_n(x)$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της f.

ΛΥΣΗ

Η ακολουθία $\sigma_n(x)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right).$$

Προφανώς ισχύει η ισότητα:

$$\int_{-\ell}^{\ell}\left(f(x)-\sigma_n(x)\right)^2 dx=\int_{-\ell}^{\ell} f^2(x)dx-2\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sigma_n(x)dx+\int_{-\ell}^{\ell}\sigma_n^2(x)dx \quad (1)$$

Θα υπολογίσουμε τα δύο τελευταία ολοκληρώματα της παραπάνω σχέσης.

Πραγματικά από τον τύπο της $\sigma_n(x)$ προκύπτει ότι

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sigma_n(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}a_k\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}b_k\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

$$=\ell\frac{a_0}{2}\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx+\ell\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx+$$

$$+\ell\sum_{k=1}^{n}b_k\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

$$= \ell\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right] \qquad (2)$$

και

$$\int_{-\ell}^{\ell}\sigma_n^2(x)dx=\int_{-\ell}^{\ell}\frac{a_0^2}{4}dx+\sum_{k=1}^{n}a_k^2\int_{-\ell}^{\ell}\cos^2\frac{k\pi x}{\ell}dx+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\int_{-\ell}^{\ell}\sin^2\frac{k\pi x}{\ell}dx+$$

$$+2\frac{a_0}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}a_k\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx+\sum_{k=1}^{n}b_k\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx\right]+$$

$$+2\sum_{1\le\kappa<\lambda\le n}a_\kappa a_\lambda\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{\kappa\pi x}{\ell}\cos\frac{\lambda\pi x}{\ell}dx+$$

$$+2\sum_{1\le\kappa<\lambda\le n}b_\kappa b_\lambda\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{\kappa\pi x}{\ell}\sin\frac{\lambda\pi x}{\ell}dx+$$

$$+2\sum_{1\le\kappa\le\lambda\le n}a_\kappa b_\lambda\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{\kappa\pi x}{\ell}\sin\frac{\lambda\pi x}{\ell}dx$$

$$=\frac{1}{4}2\ell a_0^2+\sum_{k=1}^{n}a_k^2\ell+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\ell+0+0+0+0$$

$$= \ell\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right] \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3), εύκολα προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

Ανισότητα Bessel

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/[-\ell,\ell]$ ισχύει

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leq\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f^2(x)dx$$

όπου a_0, a_n, b_n, $n\in\mathbb{N}^*$, είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier της f.

Ταυτότητα του Parseval

Αν η σειρά Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f/[-\ell,\ell]$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση f, τότε ισχύει ότι

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f^2(x)dx.$$

Η απόδειξη της ανισότητας του Bessel και της ταυτότητας του Parseval στηρίζεται στην ισότητα

$$\int_{-\ell}^{\ell}\left(f(x)-\sigma_n(x)\right)^2dx=\int_{-\ell}^{\ell}f^2(x)dx-\ell\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]\quad(*)$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, όπου $\sigma_n(x)$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της $f(x)$.

Πραγματικά, επειδή το πρώτο μέλος της παραπάνω ισότητας είναι μη αρνητικό, θα είναι και το δεύτερο, οπότε θα ισχύει ότι

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\leq\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f^2(x)dx$$

οπότε $n \to \infty$ για προκύπτει η ανισότητα Bessel.
Αν τώρα η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f, δηλαδή $\sigma_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$, τότε

$$\sigma_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \Rightarrow \sigma_n - f \xrightarrow{\text{ομ}} 0 \Rightarrow (\sigma_n - f)^2 \xrightarrow{\text{ομ}} 0$$

$$\Rightarrow \int_{\ell}^{\ell} (\sigma_n(x) - f(x))^2 dx \to \int_{\ell}^{\ell} 0 dx = 0$$

οπότε, παίρνοντας όρια για $n \to \infty$ και στα δύο μέλη της ισότητας (*), προκύπτει το ζητούμενο.

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Περιεχόμενα διάλεξης:

Σύγκλιση σειρών Fourier

Συνθήκες Dirichlet
Παραγώγιση και ολοκλήρωση σειρών Fourier

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

Η σειρά Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f/[-\ell,\ell]$ δεν είναι απαραίτητο να συγκλίνει. Αλλά ακόμα και αν είναι συγκλίνουσα, το άθροισμα της δεν είναι κατ' ανάγκη ίσο με την f.

Στη παράγραφο αυτή θα δοθούν ικανές συνθήκες για τη συνάρτηση $f/[-\ell,\ell]$, ώστε η σειρά Fourier της να συγκλίνει προς αυτή, δηλαδή να ισχύει ότι

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

για κάθε $x\in[-\ell,\ell]$.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στη παράγραφο 1, κάθε τριγωνομετρική σειρά ορίζει μια περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Για το λόγο αυτό επεκτείνουμε πρώτα τη συνάρτηση $f/[-\ell,\ell]$ σε μια περιοδική συνάρτηση $\overline{f}/\mathbb{R}$ και στη συνέχεια με τη βοήθεια της $\overline{f}$ εξετάζονται συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνάρτηση f μπορεί να παρασταθεί από τη σειρά Fourier της.

Περιοδική επέκταση

Αν για μια συνάρτηση $f/[-\ell,\ell]$ ισχύει ότι $f(-\ell)=f(\ell)$, τότε αυτή επεκτείνεται σε μια περιοδική συνάρτηση $\overline{f}/\mathbb{R}$ με περίοδο 2ℓ ως εξής:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχουν μοναδικά $\xi\in[-\ell,\ell]$ και $n\in\mathbb{Z}$ με $x=\xi+2n\ell$. Ορίζουμε

$\overline{f}(x)=f(\xi)$.

Παράδειγμα

Αν $f(x)=x^2/[-2,2]$ να ευρεθούν τα $\overline{f}(11),\overline{f}\left(\frac{9}{2}\right)$ και $\overline{f}\left(\frac{-16}{3}\right)$.

Εδώ $\ell=2$ και $f(-2)=f(2)=4$.

Επειδή, $11=-1+3\cdot 4$ και $-1\in[-2,2]$ είναι $\overline{f}(11)=f(-1)=1$.

Ομοίως επειδή $\frac{9}{2}=\frac{1}{2}+1\cdot 4$ και $\frac{1}{2}\in[-2,2]$ είναι

$\overline{f}\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Τέλος επειδή $-\frac{16}{3}=-\frac{4}{3}+(-1)\cdot 4$ και $-\frac{4}{3}\in[-2,2]$

είναι $\overline{f}\left(-\frac{16}{3}\right)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}$.

Παρατήρηση

Ο ακέραιος αριθμός n ώστε $x = \xi + 2n\ell$ και $\xi \in [-\ell, \ell]$ ορίζεται από τη σχέση

$$n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{\ell}\right] & , \text{ αν } \left[\dfrac{x}{\ell}\right] \text{ άρτιος} \\ \dfrac{1}{2}\left(\left[\dfrac{x}{\ell}\right]+1\right), & \text{αν } \left[\dfrac{x}{\ell}\right] \text{ περιττός} \end{cases}$$

οπότε για το προηγούμενο παράδειγμα είναι:

- Για $x = 11 \Rightarrow \left[\dfrac{x}{\ell}\right] = \left[\dfrac{11}{2}\right] = 5$, περιττός $\Rightarrow$

  $n = \dfrac{1}{2}\left(\left[\dfrac{x}{\ell}\right]+1\right) = 3$ και επομένως $\xi = x - 2n\ell = 11 - 12 = -1$.

- Για $x = \dfrac{9}{2} \Rightarrow \left[\dfrac{x}{\ell}\right] = \left[\dfrac{9}{4}\right] = 2$, άρτιος $\Rightarrow$ $n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{\ell}\right] = 1$ και

  επομένως $\xi = x - 2n\ell = \dfrac{9}{2} - 4 = \dfrac{1}{2}$.

- Για $x = -\dfrac{16}{3} \Rightarrow \left[\dfrac{x}{\ell}\right] = \left[-\dfrac{16}{6}\right] = -3$, περιττός $\Rightarrow$

$n = \dfrac{1}{2}(-3+1) = -1$ και επομένως $\xi = x - 2n\ell = -\dfrac{16}{3} + 4 = -\dfrac{4}{3}$

Ολοκλήρωση περιοδικής επέκτασης

Αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση $f / [-\ell, \ell]$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η περιοδική της επέκταση $\overline{f} / \mathbb{R}$ θα είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, με

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{f}(x)dx = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$$

για κάθε διάστημα $[\alpha, \beta]$ μήκους 2ℓ.

Στο επόμενο θεώρημα δίνονται ικανές συνθήκες για τη σύγκλιση της σειράς Fourier. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω συμβολισμοί για τα πλευρικά όρια και τις πλευρικές παραγώγους μιας συνάρτησης f.

Πλευρικά όρια και πλευρικές παράγωγοι

$f(x^-) = \lim\limits_{t \to x^-} f(t)$, **αριστερό όριο**

$f(x^+) = \lim\limits_{t \to x^+} f(t)$, **δεξιό όριο**

$f'_-(x) = \lim\limits_{t \to x^-} \dfrac{f(t) - f(x^-)}{t - x}$, **αριστερή παράγωγος**

$f'_+(x) = \lim\limits_{t \to x^+} \dfrac{f(t) - f(x^+)}{t - x}$, **δεξιά παράγωγος**

Ο ορισμός των πλευρικών παραγώγων που δόθηκε παραπάνω δεν απαιτεί να ορίζεται η συνάρτηση f στο x, αρκεί να υπάρχουν τα πλευρικά της όρια.

Θεώρημα 4.1

Έστω μια περιοδική συνάρτηση f / R με περίοδο 2ℓ, η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-\ell,\ell]$.

Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(x^-), f(x^+)$ και οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x)$ και $f'_+(x)$, σε κάποιο σημείο $x \in R$, τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει για το συγκεκριμένο x προς το $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.

Το πρόβλημα σύγκλισης της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f μελετήθηκε από τον Dirichlet, ο οποίος διατύπωσε τις παρακάτω συνθήκες για τη συνάρτηση f:

Συνθήκες Dirichlet

1. **Η συνάρτηση f / R είναι περιοδική με περίοδο 2ℓ.**
2. **Οι συναρτήσεις f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς[1] στο διάστημα $[-\ell,\ell]$.**

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση $f / \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet, τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 4.1 οπότε η σειρά Fourier της f θα συγκλίνει προς τη συνάρτηση $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$. Επιπλέον, για κάθε σημείο συνέχειας x της f, η σειρά Fourier θα συγκλίνει προς τη συνάρτηση $f(x)$.

[1] Σημειώνουμε ότι οι κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις είναι δυνατόν να μην ορίζονται στα σημεία ασυνέχειας , αρκεί να υπάρχουν τα πλευρικά όρια σ' αυτά.

Ειδικά για συνεχείς συναρτήσεις ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2

Αν η συνάρτηση f / R είναι συνεχής και ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet, τότε η σειρά Fourier της συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση αυτή.

Παραδείγματα

1. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x^2 / [0, 2\pi)$ και να υπολογισθεί η τιμή των αθροισμάτων: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ και (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Λύση. Θεωρούμε την περιοδική επέκταση $\overline{f} / \mathbb{R}$ με $\overline{f}(x) = f(\xi)$, όπου $x = \xi + 2n\pi$, $\xi \in [0, 2\pi)$ και $n \in \mathbb{Z}$. Τότε η συνάρτηση $\overline{f}$ στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται ως εξής:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x \in [0, \pi] \\ (x + 2\pi)^2 & , \text{ αν } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Πράγματι, αν $x \in [0, \pi]$, τότε $\overline{f}(x) = f(x) = x^2$, ενώ αν $x \in [-\pi, 0)$, τότε $x + 2\pi \in [\pi, 2\pi)$, οπότε

$\overline{f}(x) = \overline{f}(x + 2\pi) = f(x + 2\pi) = (x + 2\pi)^2$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\overline{f} / \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet διότι οι συναρτήσεις $\overline{f}, \overline{f}'$ είναι κατά τμήματα συνεχείς στο $[-\pi, \pi]$. Επιπλέον η συνάρτηση $\overline{f}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$. Άρα ισχύει ότι,

$$\overline{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\{2n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$. Ειδικά για $x\in(0,2\pi)$ είναι

$$x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \qquad (1)$$

Θα υπολογισθούν οι συντελεστές a_0, a_n, b_n , $n\in\mathbb{N}^*$. Είναι

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f}(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f}(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{8\pi^2}{3},$$

και για $n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f}(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x^2(\sin nx)'dx=\frac{1}{n\pi}\left[x^2\sin nx\right]_0^{2\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx$$

$$=0+\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}x(\cos nx)'dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[x\cos nx\right]_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(2\pi-0)-\frac{2}{n^3\pi}\left[\sin nx\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2}.$$

Όμοια ευρίσκεται ότι $b_n=-\frac{4\pi}{n}$, οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right) \qquad (2)$$

για κάθε $x\in(0,2\pi)$.

(i) Για να υπολογίσουμε την τιμή του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$, εφαρμόζουμε τη σχέση (2) για $x=\pi$, οπότε

$$\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos n\pi-\frac{4\pi}{n}\sin n\pi\right)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Άρα τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{4\pi^2}{3}-\pi^2\right)=\frac{\pi^2}{12}.$$

(ii) Για να υπολογίσουμε την τιμή του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, η σχέση (2) δεν εφαρμόζεται για $x=0$, διότι η συνάρτηση $\overline{f}$ δεν είναι συνεχής στο 0. Στη περίπτωση αυτή η σειρά Fourier της $\overline{f}$ για $x=0$ θα συγκλίνει στο

$$\begin{aligned}\frac{\overline{f}(0^-)+\overline{f}(0^+)}{2}&=\frac{1}{2}(\lim_{x\to0^-}\overline{f}(x)+\lim_{x\to0^+}\overline{f}(x))\\&=\frac{1}{2}(\lim_{x\to0^-}(x+2\pi)^2+\lim_{x\to0^+}x^2)=2\pi^2\end{aligned},$$

οπότε είναι,

$$2\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(n\cdot0)-\frac{4\pi}{n}\sin(n\cdot0)\right)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Άρα τελικά, $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\left(2\pi^2-\frac{4\pi^2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

2. Δίνεται η περιοδική συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με περίοδο 2π όπου

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2} & , \text{ αν } x\in[0,\pi] \\ -\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{x}{2} & , \text{ αν } x\in(\pi,2\pi). \end{cases}$$

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση f, και με τη βοήθεια αυτής να υπολογισθεί η τιμή των αθροισμάτων

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Λύση. Επειδή για κάθε $x\in(-\pi,0)$ έπεται ότι $x+2\pi\in(\pi,2\pi)$ προκύπτει ότι

$$f(x)=f(x+2\pi)=-\frac{3\pi}{4}+\frac{x+2\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}.$$

Κατόπιν τούτου στο διάστημα $(-\pi,\pi]$ η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2} & , \text{ αν } x\in[0,\pi] \\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2} & , \text{ αν } x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet και επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής, οπότε θα είναι

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \qquad (3)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $f/(-\pi,\pi]$ είναι άρτια, αφού $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{|x|}{2}$, όταν $x\in(-\pi,\pi]$, οπότε θα ισχύει $b_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

Θα υπολογισθούν οι συντελεστές $a_n, n\in\mathbb{N}$. Είναι,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}x-\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi}=0$$

και για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)(\sin nx)' dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(0+\frac{1}{2n}\left[-\cos nx\right]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right)=\begin{cases}0 & \text{, αν n άρτιος}\\ \dfrac{2}{n^2\pi} & \text{, αν n περιττός}\end{cases}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(i) Εφαρμόζοντας την παραπάνω ισότητα για $x = 0$ προκύπτει ότι

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = f(0) = \frac{\pi}{4}$$

οπότε τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(ii) Επειδή ως γνωστό $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$, είναι

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$= \frac{S}{4} + \frac{\pi^2}{8}$$

οπότε τελικά

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνεται η περιοδική συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} -1, & \text{αν } x\in(-\pi,0) \\ 1, & \text{αν } x\in(0,\pi) \end{cases}$$

και περίοδο 2π. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\right)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\neq k\pi \\ 0, & \text{αν } x=k\pi \end{cases}$$

όπου $k\in\mathbb{Z}$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet η σειρά Fourier της θα συγκλίνει προς το $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι η $f/(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ είναι περιττή, οπότε $a_n=0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Εξάλλου για $n\in\mathbb{N}^*$, είναι

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi-1\right)=2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{αν n περιττός} \\ 0, & \text{αν n άρτιος} \end{cases}$$

Άρα,

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\right)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\neq k\pi \\ 0, & \text{αν } x=k\pi \end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνεται η περιοδική συνάρτηση $f/\mathbb{R}$, με $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ και με περίοδο 2π.

i) Να ευρεθεί η σειρά Fourier της f.

ii) Προς ποιον αριθμό συγκλίνει η σειρά όταν $x=\frac{\pi}{2}$, και όταν $x=\frac{13\pi}{4}$;

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet και είναι συνεχής. Άρα η σειρά Fourier της θα συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f(x), για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια θα ευρεθούν οι συντελεστές Fourier. Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια έπεται ότι $b_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Εξάλλου,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi=\pi$$

και για $n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x(\sin nx)'\,dx=\frac{2}{n\pi}\left(\left[x\sin nx\right]_0^\pi-\int_0^\pi \sin nx\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\frac{1}{n}\left[\cos nx\right]_0^\pi=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{αν n περιττός}\\ 0, & \text{αν n άρτιος}\end{cases}$$

Άρα,

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Όταν $x=\frac{\pi}{2}$ η σειρά συγκλίνει προς τον αριθμό $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, ενώ όταν $x=\frac{13\pi}{4}$ η σειρά συγκλίνει προς τον αριθμό:

$$f\left(\frac{13\pi}{4}\right)=f\left(4\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(\frac{-3\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x)=x+\pi\,/\,(-\pi,\pi]$ και στη συνέχεια να αποδειχθεί ο τύπος

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την περιοδική επέκταση $\overline{f}(x)\,/\,\mathbb{R}$, με $\overline{f}(x)=f(\xi)$, όπου $x=\xi+2k\pi$, $\xi\in(-\pi,\pi]$ και $k\in\mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\overline{f}(x)\,/\,\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet, διότι οι συναρτήσεις $\overline{f},\overline{f}'$ είναι κατά τμήματα συνεχείς στο $[-\pi,\pi]$. Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση $\overline{f}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-\pi,\pi]$, έπεται ότι

$$f(x)=\overline{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

για κάθε $x\in(-\pi,\pi]$. Στη συνέχεια θα ευρεθούν οι συντελεστές Fourier. Για $n\in\mathbb{N}$, είναι,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}(-x+\pi)\cos(-nx)\,d(-x)+\int_{0}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx\right]=2\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=\begin{cases}2\int_{0}^{\pi}1\,dx, & n=0\\ \frac{2}{n}\left[\sin nx\right]_{0}^{\pi}, & n\neq 0\end{cases}=\begin{cases}2\pi, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

και για $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)(\cos nx)'\,dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\left[(x+\pi)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{n\pi}(2\pi\cos n\pi\text{-}0) - \frac{1}{n^2\pi}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$.

Προκειμένου να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$,

εφαρμόζουμε την παραπάνω σχέση για $x = -\frac{\pi}{2}$, προκύπτουν

διαδοχικά οι σχέσεις:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)}{2n-1}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Για τη σύγκλιση της σειράς των παραγώγων των όρων της σειράς Fourier μιας συνάρτησης, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.3

Αν f / R είναι μια συνεχής, περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2ℓ και f', f'' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα $[-\ell, \ell]$, τότε η σειρά των παραγώγων των όρων της σειράς Fourier της f:

$$\frac{\pi}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(-a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

συγκλίνει για κάθε $x \in R$ προς το $\dfrac{f'_-(x) + f'_+(x)}{2}$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η προηγούμενη πρόταση δεν ισχύει όταν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής. Για παράδειγμα η συνάρτηση f της λυμένης άσκησης 12 ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις της πρότασης 4.3 εκτός της συνέχειας και η σειρά των παραγώγων των όρων της σειράς Fourier της δεν συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Δίνεται η περιοδική συνάρτηση $f / \mathbb{R}$, με περίοδο 2π και

$$f(x)=\begin{cases} x\ , \text{ αν } x\in(-\pi,\pi) \\ 0\ , \text{ αν } x\in\{-\pi,\pi\} \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει προς την f, ενώ η σειρά των παραγώγων των όρων της δεν συγκλίνει.

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, η σειρά Fourier της θα συγκλίνει προς το $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi : k\in\mathbb{Z}\}$. Επιπλέον για $x=(2k+1)\pi$, όπου $k\in\mathbb{Z}$, ισχύει ότι

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\frac{\pi-\pi}{2}=0=f(x).$$

Άρα η σειρά Fourier της f θα συγκλίνει προς την f.

Θα υπολογισθούν οι συντελεστές Fourier. Επειδή η συνάρτηση f είναι περιττή, έπεται ότι $a_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Εξάλλου, για $n\in\mathbb{N}^*$, είναι

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{-2}{\pi n}\int_0^{\pi}x(\cos nx)'\,dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[x\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx=-\frac{2\pi}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2}{n^2\pi}\left[\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Κατόπιν τούτων θα ισχύει ότι

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τέλος, η σειρά των παραγώγων των όρων της σειράς Fourier της f:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos nx$$

δεν συγκλίνει αφού η ακολουθία $(\cos nx)$ δεν είναι μηδενική.

Η ολοκλήρωση μιας σειράς Fourier είναι δυνατή κάτω από πολύ γενικές συνθήκες όπως περιγράφεται στο επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.4

Αν f / $[-\ell,\ell]$ είναι κατά τμήματα συνεχής και

$$\mathbf{f \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)} \textbf{ τότε}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

για κάθε $\alpha,\beta\in[-\ell,\ell]$.

Πρέπει να τονισθεί ότι δεν είναι απαραίτητο μια σειρά Fourier να συγκλίνει προς την αντίστοιχη συνάρτηση f προκειμένου η σειρά των ολοκληρωμάτων των όρων της να συγκλίνει προς το ολοκλήρωμα της f.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να ευρεθεί με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης η σειρά Fourier της συνάρτησης $g/[-\pi,\pi]$, με $g(x)=x^2$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f/[-\pi,\pi]$, με

$$f(x)=\begin{cases} x\ , & x\in(-\pi,\pi) \\ 0\ , & x\in\{-\pi,\pi\} \end{cases}$$

για την οποία αποδείχθηκε στην προηγούμενη άσκηση ότι

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$.

Εφαρμόζοντας την πρόταση 4.4 για την $f/[-\pi,\pi]$, προκύπτουν για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ διαδοχικά οι ισότητες:

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x \sin nt\,dt$$

$$\frac{x^2}{2}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\left[\cos nt\right]_0^x$$

$$x^2=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos nx+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$x^2\overset{1}{=}\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos nx$$

1. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$ (βλ. πρώτο παράδειγμα μετά την Πρόταση 4.2).

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Περιεχόμενα διάλεξης:

Επέκταση και παράσταση συναρτήσεων με σειρές Fourier

Σειρές Fourier με μιγαδικούς συντελεστές

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιηθούν οι σειρές Fourier για την παράσταση συνεχών συναρτήσεων με τριγωνομετρικές σειρές. Συγκεκριμένα, θα επιλυθεί το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα

Να παρασταθεί η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{g} / (\mathbf{0}, \ell)$, όπου $\ell > \mathbf{0}$ με μια τριγωνομετρική σειρά.

Λύση

Αρχικά επεκτείνουμε την συνάρτηση $g / (0, \ell)$ σε μια κατά τμήματα συνεχή συνάρτηση f στο $[-\ell, \ell]$ με $f(-\ell) = f(\ell)$.

Αν η περιοδική επέκταση $\overline{f} / \mathbb{R}$ της f ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, τότε θα είναι:

$$\frac{\overline{f}(x^-) + \overline{f}(x^+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η $\overline{f}(x) = g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, \ell)$ έπεται ότι

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

για κάθε $x \in (0, \ell)$.

Επειδή είναι δυνατόν να υπάρχουν διαφορετικές επεκτάσεις της g στο διάστημα $[-\ell,\ell]$, η παράσταση της g με τριγωνομετρική σειρά δεν είναι μοναδική.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παραστάσεις της g με ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή σειρά. Για την πρώτη χρησιμοποιείται η περιττή επέκταση της g, ενώ για τη δεύτερη η άρτια επέκταση της g, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

Περιττή επέκταση
$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \text{αν } x\in(0,\ell) \\ 0 & , \text{αν } x\in\{-\ell,0,\ell\} \\ -g(-x) & , \text{αν } x\in(-\ell,0). \end{cases}$$

Άρτια επέκταση
$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \text{αν } x\in(0,\ell) \\ 0 & , \text{αν } x\in\{-\ell,0,\ell\} \\ g(-x) & , \text{αν } x\in(-\ell,0). \end{cases}$$

Παρατήρηση

Στον τύπο της περιττής επέκτασης είναι απαραίτητο[2] να ληφθεί ότι $f(-\ell)=f(0)=f(\ell)=0$. Αντίθετα για την άρτια επέκταση αρκεί μόνο να ληφθεί ότι $f(-\ell)=f(\ell)$.

---

[2] Αφού για κάθε περιττή συνάρτηση $f\,/\,[-\ell,\ell]$ ισχύει ότι $f(0)=0$, και αν $f(-\ell)=f(\ell)$ τότε πρέπει να ισχύει ότι $f(-\ell)=f(\ell)=0$.

Παραδείγματα

1. Να αναπτυχθεί σε σειρά συνημίτονων η συνάρτηση $g/(0,2)$ με $g(x)=x$ και στη συνέχεια να υπολογισθεί η τιμή του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Λύση

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f/[-2,2]$ με $f(x)=|x|$ και την περιοδική της επέκταση $\overline{f}/\mathbb{R}$, με $\overline{f}(x)=f(\xi)$, όπου $x=\xi+4n$, $\xi\in[-2,2]$, $n\in\mathbb{Z}$. Η συνάρτηση $\overline{f}$ είναι συνεχής[3] στο $\mathbb{R}$ και περιοδική με περίοδο 4. Επιπλέον, η παράγωγος συνάρτηση

$$f'(x)=\begin{cases} 1 \ , \text{ αν } x\in(0,2) \\ -1 \ , \text{ αν } x\in(-2,0) \end{cases}$$

είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[-2,2]$, οπότε σύμφωνα με την πρόταση 4.2 η σειρά Fourier της θα συγκλίνει ομοιόμορφα προς αυτή. Άρα, για $x\in(0,2)$ είναι

$$x=g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια, προκύπτει ότι $b_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

[3] Η περιοδική επέκταση κάθε συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής.

Επιπλέον, είναι $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$

και για $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^2 x\left(\sin\frac{n\pi x}{2}\right)' dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= 0 + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) \\
&= \begin{cases} -\dfrac{8}{n^2\pi^2} & \text{, αν n περιττός} \\ 0 & \text{, αν n άρτιος.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Κατόπιν τούτου προκύπτει ότι

$$x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} \text{ για κάθε } x \in (0,2).$$

Προκειμένου να υπολογισθεί το άθροισμα $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ θα εφαρμοσθεί η ταυτότητα του Parseval[4] για τη συνάρτηση $f(x)=|x|/[-2,2]$, οπότε προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 dx=\frac{2^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\right)^2$$

$$\frac{8}{3}=2+\frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\ .$$

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

Επιπλέον είναι,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}S\ .$$

Άρα τελικά, $S=\frac{\pi^4}{90}$.

[4] Η ταυτότητα του Parseval μπορεί να εφαρμοσθεί, αφού η σύγκλιση της σειράς Fourier της είναι ομοιόμορφη.

2. Να αναπτυχθεί σε σειρά ημιτόνων η συνάρτηση $g/(0,\pi)$ με $g(x)=\cos x$ και στη συνέχεια να υπολογισθεί η τιμή του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n-1}{4(2n-1)^2-1}$.

Λύση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f/[-\pi,\pi]$ με

$$f(x)=\begin{cases}\cos x\ , \text{ αν } x\in(0,\pi)\\ \quad 0\quad , \text{ αν } x\in\{-\pi,0,\pi\}\\ -\cos x, \text{ αν } x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

και την περιοδική της επέκταση $\overline{f}/\mathbb{R}$ με

$$\overline{f}(x)=f(\xi),\ \text{όπου } x=\xi+2n\pi,\ \xi\in[-\pi,\pi],\ n\in\mathbb{Z}.$$

Η συνάρτηση f είναι κατά τμήματα συνεχής, με παράγωγο

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x\ , \text{ αν } x\in(0,\pi)\\ \ \sin x\ , \text{ αν } x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

κατά τμήματα συνεχή, οπότε θα ικανοποιούνται οι συνθήκες Dirichlet για την περιοδική συνάρτηση $\overline{f}/\mathbb{R}$. Κατόπιν τούτου θα είναι

$$\frac{\overline{f}(x^-)+\overline{f}(x^+)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Ειδικά για $x\in(0,\pi)$, προκύπτει ότι

$$\cos x=g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση $f/[-\pi,\pi]$ είναι περιττή, προκύπτει ότι $a_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εξάλλου, είναι

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin x dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0$$

και για $n \geq 2$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{1-\cos(n-1)\pi}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n+1} + \frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{2n\left(1+(-1)^n\right)}{n^2-1}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4n}{\pi\left(n^2-1\right)} & \text{, αν n άρτιος} \\ 0 & \text{, αν n περιττός.} \end{cases}$$

Κατόπιν τούτου είναι,

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$$

για κάθε $x \in (0,\pi)$.

Στη συνέχεια, για τον υπολογισμό του αθροίσματος

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{4(2n-1)^2-1},$$

εφαρμόζουμε την παραπάνω σχέση για $x = \frac{\pi}{4}$, οπότε

προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4(2n-1)^2-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{4(2n-1)^2-1},$$

οπότε τελικά είναι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{4(2n-1)^2-1} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}.$

ΑΣΚΗΣΗ 15

(i) Να αναπτυχθεί σε σειρά ημιτόνων η συνάρτηση $g/(0,2)$, με $g(x)=x$.

(ii) Προς ποιόν αριθμό συγκλίνει η σειρά για $x=-1$, για $x=-2$ και για $x=11.25$.

(iii) Να αποδειχθεί η σχέση $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

(i) Ορίζουμε τη συνάρτηση $f/[-2,2]$ με

$$f(x)=\begin{cases} x\ ,\ \text{αν } x\in(-2,2) \\ 0\ ,\ \text{αν } x\in\{-2,2\} \end{cases}$$

και την περιοδική της επέκταση $\overline{f}/\mathbb{R}$, με $\overline{f}(x)=f(\xi)$, όπου $x=\xi+4n$, $\xi\in[-2,2]$, $n\in\mathbb{Z}$. Επειδή η συνάρτηση $\overline{f}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet προκύπτει ότι

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Εξάλλου η συνάρτηση f είναι περιττή, οπότε $a_n=0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Για $n\in\mathbb{N}^*$, είναι,

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\ =\frac{2}{2}\int_{0}^{2}x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2 x\left(\cos\frac{n\pi x}{2}\right)'dx\ =-\frac{2}{n\pi}\left(\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2-\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left(2\cos n\pi-\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2\right)=-\frac{4}{n\pi}\left[(-1)^n-0\right]=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Κατόπιν τούτων θα ισχύει ότι

$$\frac{f\left(x^-\right)+f\left(x^+\right)}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ειδικά για $x \in (0,2)$, προκύπτει ότι

$$g\left(x\right)=\overline{f}\left(x\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad (2)$$

(ii) Η σειρά Fourier για $x=-1$, όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής, θα συγκλίνει προς το $f(-1)=-1$.

Αντίθετα για $x=-2$, όπου η συνάρτηση f είναι ασυνεχής, η σειρά θα συγκλίνει σύμφωνα με τη σχέση (1) προς τον αριθμό

$$\frac{f\left(-2^-\right)+f\left(-2^+\right)}{2}=\frac{2+\left(-2\right)}{2}=0$$

Τέλος, για $x=11.25$, η σειρά συγκλίνει προς τον αριθμό

$$\overline{f}\left(11.25\right)=\overline{f}\left(12-0.75\right)=f\left(-0.75\right)=-0.75$$

(iii) Εφαρμόζοντας τη σχέση (2) για $x=1$, προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\left(2n-1\right)\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}$$

και τελικά $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

(i) Να αναπτυχθεί σε σειρά συνημίτονων η συνάρτηση $g/(0,\pi)$, με $g(x)=\sin x$.

(ii) Να υπολογισθεί η τιμή του αθροίσματος

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

(iii) Να υπολογισθεί η τιμή του αθροίσματος

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

ΛΥΣΗ

(i) Ορίζουμε τη συνάρτηση $f/[-\pi,\pi]$, με

$$f(x)=\begin{cases}\sin x &, \text{αν } x\in(0,\pi] \\ -\sin x &, \text{αν } x\in[-\pi,0]\end{cases}$$

και την περιοδική της επέκταση $\overline{f}/\mathbb{R}$, με $\overline{f}(x)=f(\xi)$, όπου $x=\xi+2n\pi$, $\xi\in[-\pi,\pi]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση $\overline{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική με περίοδο 2π. Επιπλέον, η παράγωγος συνάρτηση

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in(0,\pi] \\ -\cos x, & x\in[-\pi,0)\end{cases}$$

είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[-\pi,\pi]$, οπότε, σύμφωνα με την πρόταση 4.2, η σειρά Fourier της θα συγκλίνει ομοιόμορφα προς αυτή. Άρα για $x\in(0,\pi)$ θα ισχύει

$$\sin x = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια, έπεται ότι $b_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επιπλέον, είναι

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{2}{\pi}\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = \frac{-1}{2\pi}\left[\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0$$

και για $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)\pi - 1}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi + 1}{n+1} - \frac{\cos n\pi + 1}{n-1}\right) = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi + 1}{n^2 - 1} = -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{n^2 - 1} & \text{, αν n άρτιος} \\ 0 & \text{, αν n περιττός} \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων είναι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

για κάθε $x \in (0, \pi)$.

(ii) Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $x = \dfrac{\pi}{2}$, προκύπτει ότι

$$\sin\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{4n^2-1}$$

και επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}.$$

(iii) Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval για τη συνάρτηση $f/[-\pi,\pi]$, προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1\text{-}\cos 2x}{2}dx=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

και τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να αναπτυχθεί σε σειρά συνημίτονων η συνάρτηση $g/(0,2)$, με

$$g(x)=\begin{cases} x \ , \text{αν } x\in(0,1) \\ 1 \ , \text{αν } x\in[1,2) \end{cases}$$

και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f/[-2,2]$, με

$$f(x)=\begin{cases} |x| \ , \text{αν } x\in(-1,1) \\ 1 \ , \text{αν } x\in[-2,-1]\cup[1,2] \end{cases}$$

και την περιοδική της επέκταση $\overline{f}/\mathbb{R}$, με $\overline{f}(x)=f(\xi)$, όπου $x=\xi+4n$, $\xi\in[-2,2]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Επειδή η συνάρτηση $\overline{f}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet και είναι συνεχής προκύπτει ότι η σειρά Fourier της θα συγκλίνει ομοιόμορφα προς αυτή. Ειδικά, για $x\in(0,2)$, είναι

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Εξάλλου επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια, έπεται ότι $b_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επιπλέον είναι,

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 xdx+\int_1^2 1dx\right)=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+[x]_1^2=\frac{3}{2}$$

και για $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{2}\left(\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\left(\sin\frac{n\pi x}{2}\right)' dx + \frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}dx\right) + \frac{2}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

Κατόπιν τούτου προκύπτει ότι

$$g(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

για κάθε $x \in (0,2)$. Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $x = 1$, προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$g(1) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2}$$

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos(n\pi) - 1)\cos(n\pi)}{4n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n - 1\right)(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2}$$

και τελικά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

ΑΣΚΗΣΗ 20

(i) Να αναπτυχθεί σε σειρά ημιτόνων η συνάρτηση $g/(0,\pi)$ με $g(x)=x(\pi-x)$.

(ii) Να υπολογισθεί η τιμή του αθροίσματος

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

(iii) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$$

(iv) Να αποδειχθεί η σχέση

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)$$

για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$.

ΛΥΣΗ

(i) Ορίζουμε τη συνάρτηση $f/[-\pi,\pi]$ με

$$f(x)=\begin{cases} x(\pi-x)\ , \text{ αν } x\in[0,\pi] \\ x(\pi+x)\ , \text{ αν } x\in[-\pi,0) \end{cases}$$

και την περιοδική της επέκταση $\overline{f}/\mathbb{R}$, με $\overline{f}(x)=f(\xi)$, όπου $x=\xi+2n\pi$, $\xi\in[-\pi,\pi]$, $n\in\mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση $\overline{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική με περίοδο 2π. Επιπλέον, η παράγωγος συνάρτηση

$$f'(x)=\begin{cases} \pi-2x\ , \text{ αν } x\in[0,\pi] \\ \pi+2x\ , \text{ αν } x\in[-\pi,0) \end{cases}$$

είναι επίσης συνεχής στο $[-\pi,\pi]$, οπότε σύμφωνα με την πρόταση 4.2 η σειρά Fourier της θα συγκλίνει ομοιόμορφα προς αυτή. Ειδικά για $x\in[-\pi,\pi]$ είναι

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

Εξάλλου, επειδή η συνάρτηση f είναι περιττή, έπεται ότι $a_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για $n\in\mathbb{N}^*$ είναι

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)(\cos nx)'\,dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\Big[x(\pi-x)\cos nx\Big]_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\big(x(\pi-x)\big)'\cos nx\,dx$$

$$=0+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)(\sin nx)'\,dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\Big[(\pi-2x)\sin nx\Big]_0^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)'\sin nx\,dx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{4}{n^3\pi}\Big[\cos nx\Big]_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^3}$$

Κατόπιν τούτου για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ είναι

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^3}\sin nx=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

Ειδικά για $x\in(0,\pi)$ είναι

$$x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

(ii) Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $x = \frac{\pi}{2}$, προκύπτει ότι

$$\frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^3}$$

οπότε τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

(iii) Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parceval προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$$

δηλαδή

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2\,dx = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi}{32}\int_0^{\pi} x^2\left(\pi^2 - 2\pi x + x^2\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{32}\left[\frac{\pi^2 x^3}{3} - \frac{2\pi x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} \;= \frac{\pi}{32}\left(\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi^6}{960}$$

(iv) Εφαρμόζοντας την πρόταση 4.3 για τη συνάρτηση $\overline{f}$, προκύπτει ότι η σειρά των παραγώγων των όρων της σειράς Fourier της $\overline{f}$ θα συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ προς το

$$\frac{\overline{f_-}'(x)+\overline{f_+}'(x)}{2}$$

δηλαδή

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sin(2n-1)x\right)'}{(2n-1)^3}=\frac{\overline{f_-}'(x)+\overline{f_+}'(x)}{2}.$$

Ειδικά για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ προκύπτει ότι

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=f'(x)=\pi-2|x|$$

οπότε τελικά

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$$

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΟ $\mathbb{C}$

Στην παράγραφο αυτή θα επεκταθεί η εκθετική συνάρτηση στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Η παράσταση e^{ix}, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $i^2 = -1$ ορίζεται μέσω της εκθετικής σειράς ως εξής:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n .$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} ,$$

οπότε

$$\mathbf{e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x} \qquad (1)$$

Η παραπάνω ισότητα είναι γνωστή ως **τύπος του Euler** και χρησιμοποιείται για τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Συγκεκριμένα για $z = a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ ορίζεται

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a \cos b + i e^a \sin b \ .$$

Παράδειγμα

Να ευρεθεί η αλγεβρική τιμή των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

$$e^{2+3i\pi},\ e^{3+\frac{i\pi}{2}},\ e^{1+\frac{i\pi}{3}} \text{ και } e^{in\pi}, \text{ όπου } n \in \mathbb{Z}.$$

Λύση

Είναι,

$$e^{2+3i\pi} = e^2\cos 3\pi + ie^2\sin 3\pi = -e^2 ,$$

$$e^{3+\frac{i\pi}{2}} = e^3\cos\frac{\pi}{2} + ie^3\sin\frac{\pi}{2} = ie^3 ,$$

$$e^{1+i\frac{\pi}{3}} = e\cos\frac{\pi}{3} + ie\sin\frac{\pi}{3} = \frac{e}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}e ,$$

και

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i\sin n\pi = \left(-1\right)^n.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

για $-x$ αντί x, προκύπτει η ισότητα

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι παρακάτω χρήσιμες εκφράσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων συναρτήσει της εκθετικής συνάρτησης:

$$\mathbf{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}.$$

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί μια άλλη μορφή της σειράς Fourier, η οποία προκύπτει με τη βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης.

Πιο συγκεκριμένα αν $f/\left[-\ell,\ell\right]$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για $x\in\left[-\ell,\ell\right]$ και $n\in\mathbb{N}^*$ είναι

$$\begin{aligned} a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} &= a_n\frac{e^{\frac{in\pi x}{\ell}}+e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}}{2}+b_n\frac{e^{\frac{in\pi x}{\ell}}-e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}}{2i} \\ &= a_n\frac{e^{\frac{in\pi x}{\ell}}+e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}}{2}-b_n i\frac{e^{\frac{in\pi x}{\ell}}-e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}}{2} \\ &= \frac{a_n-ib_n}{2}e^{\frac{in\pi x}{\ell}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου αν τεθεί:

$$c_0=\frac{a_0}{2},\qquad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}\qquad \text{και}\qquad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2},$$

όπου $n\in\mathbb{N}^*$, η σειρά Fourier της συνάρτησης f μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}+c_{-n}e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}\right).$$

Η παραπάνω μορφή ονομάζεται **μιγαδική ή εκθετική σειρά Fourier** της συνάρτησης f.

Επιπλέον οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier δίνονται με τη βοήθεια της συνάρτησης f από τους παρακάτω τύπους:

$$c_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx - i\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{\ell} - i\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}dx$$

και

$$c_{-n} = \frac{1}{2\ell}\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx + i\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{\ell} + i\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{\frac{in\pi x}{\ell}}dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Συνοπτικά η μιγαδική σειρά Fourier της συνάρτησης f γράφεται στη μορφή

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

όπου $c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}dx$, $n \in \mathbb{Z}$.

Παραδείγματα

1. Να ευρεθεί η μιγαδική σειρά Fourier της συνάρτησης $f/[-\pi,\pi]$ με $f(x)=x^2$.

Λύση

Είναι:

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2e^{-inx}dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\left(e^{-inx}\right)'dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi i}\left[x^2e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2n\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}2xe^{-inx}dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi i}\left(\pi^2e^{-in\pi}-\pi^2e^{in\pi}\right)-\frac{1}{n^2\pi i^2}\int_{-\pi}^{\pi}x\left(e^{-inx}\right)'dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi i}\left(\pi^2(-1)^{-n}-\pi^2(-1)^n\right)+\frac{1}{n^2\pi}\left[xe^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx$$

$$=0+\frac{1}{n^2\pi}\left(\pi e^{-in\pi}+\pi e^{in\pi}\right)+\frac{1}{n^3\pi i}\left[e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2}(-1)^n.$$

Άρα η μιγαδική σειρά Fourier της f είναι $\dfrac{\pi^2}{3}+2\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}$

2. Να αναπτυχθεί σε μιγαδική σειρά Fourier η συνάρτηση $f/\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ με $f(x)=\begin{cases} 0 & , \text{αν } x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right) \\ 3\sin 2x & , \text{αν } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί η τιμή του αθροίσματος

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

Λύση

Θεωρούμε την περιοδική συνάρτηση $\overline{f}/\mathbb{R}$ με $\overline{f}(x)=f(\xi)$, όπου $x=\xi+n\pi$, $\xi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και $n\in\mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\overline{f}$ ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet και είναι συνεχής οπότε σύμφωνα με τη πρόταση 4.3 και χρησιμοποιώντας τη μιγαδική σειρά Fourier για $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι:

$$f(x)=\overline{f}(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{2inx}.$$

Θα υπολογισθούν οι συντελεστές c_n, $n \in \mathbb{Z}$.

Είναι,

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) e^{-2inx} dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x e^{-2inx} dx$$

$$= \frac{3}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x e^{-inx} dx = \frac{3}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} e^{-inx} dx$$

$$= \frac{3}{4\pi i}\int_0^{\pi} \left(e^{i(1-n)x} - e^{-i(1+n)x}\right) dx$$

$$= \frac{3}{4\pi i}\left[\frac{e^{i(1-n)x}}{i(1-n)} - \frac{e^{-i(1+n)x}}{-i(1+n)}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{4\pi i^2}\left(\frac{e^{i(1-n)\pi}-1}{1-n} + \frac{e^{-i(1+n)\pi}-1}{1+n}\right)$$

$$= -\frac{3}{4\pi}\left(\frac{(-1)^{1-n}-1}{1-n} + \frac{(-1)^{-(1+n)}-1}{1+n}\right)$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)$$

$$= \frac{3}{2\pi}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}$$

για κάθε $n \neq 1, -1$.

Ειδικά για $n = 1$ και $n = -1$ εύκολα ευρίσκεται ότι:

$$c_1 = -\frac{3}{4} i \text{ και } c_{-1} = \frac{3}{4} i \text{ .}$$

Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$$f(x) = -\frac{3}{4}ie^{2ix} + \frac{3}{4}ie^{-2ix} + \frac{3}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 1,-1}}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{1-n^2} e^{2inx}$$

$$= -\frac{3}{4}ie^{2ix} + \frac{3}{4}ie^{-2ix} + \frac{3}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-4n^2} e^{4inx}$$

για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Αν εφαρμοσθεί η παραπάνω σχέση για $x = 0$ προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$0 = f(0) = -\frac{3}{4}i + \frac{3}{4}i + \frac{3}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-4n^2} \ ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(-n)^2-1} - 1 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να ευρεθεί η μιγαδική σειρά Fourier της συνάρτησης $f / \left[-\pi, \pi\right]$, με

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \in [-\pi, 0] \\ 2, & \text{αν } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Για τους συντελεστές του μιγαδικού αναπτύγματος έχουμε:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-x\right]_{-\pi}^{0} + \left[2x\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{2}$$

ενώ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)e^{-inx}\,dx + \int_{0}^{\pi} 2e^{-inx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2n\pi i}\left(\left[e^{-inx}\right]_{-\pi}^{0} - 2\left[e^{-inx}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2n\pi i}\left[1 - e^{in\pi} - 2\left(e^{-in\pi} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2n\pi i}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{3i}{n\pi}, & \text{αν n είναι περιττός} \\ 0, & \text{αν n είναι άρτιος} \end{cases}$$

Κατόπιν τούτου προκύπτει ότι

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{3i}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}e^{i(2n-1)x} + \frac{3i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-i(2n-1)x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 24

Να ευρεθεί η εκθετική σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ , αν } x\in(-\pi,\pi) \\ 0 \text{ , αν } x\in\{-\pi,\pi\} \end{cases}$$

και με τη βοήθεια αυτής να ευρεθεί η (τριγωνομετρική) σειρά Fourier της f.

ΛΥΣΗ

Για τους συντελεστές της εκθετικής σειράς ισχύει ότι

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=0$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}dx=-\frac{1}{2n\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}x\left(e^{-inx}\right)'dx=-\frac{1}{2n\pi i}\left(\left[xe^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx\right)$$

$$=\frac{i}{2n\pi}\left[xe^{-inx}+\frac{e^{-inx}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{i}{2n\pi}\left[\pi\left(e^{-in\pi}+e^{in\pi}\right)+\frac{e^{-in\pi}-e^{in\pi}}{in}\right]$$

$$=\frac{i}{2n\pi}\left[\pi\left(\cos n\pi+\cos n\pi\right)+\frac{\cos n\pi-\cos n\pi}{in}\right]=\frac{(-1)^n\cdot i}{n}$$

για κάθε $n\in\mathbb{Z}^*$. Άρα, $$f(x)\sim i\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$$

Οι συντελεστές a_n, b_n της σειράς Fourier της f υπολογίζονται από τους τύπους: $a_0=2c_0$, $a_n=c_n+c_{-n}$ και $b_n=i(c_n-c_{-n})$.

Κατόπιν τούτων είναι, $a_0=0$,

$$a_n=\frac{(-1)^n i}{n}+\frac{(-1)^{-n} i}{-n}=0 \qquad b_n=i\left(\frac{(-1)^n i}{n}-\frac{(-1)^n i}{-n}\right)=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Άρα, $$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να εκφρασθεί με μιγαδική σειρά Fourier η συνάρτηση $f/[-2,2)$ με

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , \text{αν } x\in[-2,0] \\ 1+x, & \text{αν } x\in(0,2) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την περιοδική συνάρτηση $\overline{f}/\mathbb{R}$ με $\overline{f}(x)=f(\xi)$, όπου $x=\xi+4n$, $\xi\in[-2,2)$ και $n\in\mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\overline{f}$ ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet και είναι συνεχής, οπότε σύμφωνα με τη πρόταση 4.2 και χρησιμοποιώντας τη μιγαδική σειρά Fourier για $x\in[-2,2)$ θα είναι:

$$f(x)=\overline{f}(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{2}}$$

Θα υπολογισθούν οι συντελεστές $c_n, n\in\mathbb{Z}$. Είναι,

$$c_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0}1dx+\int_{0}^{2}(1+x)dx\right)=\frac{3}{2}$$

$$c_n=\frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0}e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx+\int_{0}^{2}(1+x)e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx\right)=-\frac{1}{2in\pi}\left(\left[e^{-\frac{in\pi x}{2}}\right]_{-2}^{0}+\int_{0}^{2}(1+x)\left(e^{-\frac{in\pi x}{2}}\right)'dx\right)$$

$$=\frac{i}{2n\pi}\left[\left(1-e^{in\pi}\right)+\left[(1+x)e^{-\frac{in\pi x}{2}}\right]_{0}^{2}-\int_{0}^{2}e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx\right]$$

$$=\frac{i}{2n\pi}\left(1-(-1)^n+3e^{-in\pi}-1+\frac{2}{n\pi i}\left[e^{-\frac{in\pi x}{2}}\right]_{0}^{2}\right)$$

$$=\frac{i}{2n\pi}\left[2(-1)^n+\frac{2}{n\pi i}\left(e^{-in\pi}-1\right)\right]=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}+\frac{(-1)^n i}{n\pi},$$

για κάθε $n\in\mathbb{Z}^*$.

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι $f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}+\frac{(-1)^n i}{n\pi}\right]e^{\frac{in\pi x}{2}}$

ΑΣΚΗΣΗ 26

(i) Να ευρεθεί η μιγαδική σειρά Fourier της συνάρτησης $g/(-\pi,\pi)$, με $g(x)=e^{x}$.

(ii) Να αποδειχθεί η σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}=\frac{\pi}{\sinh\pi}.$$

ΛΥΣΗ

(i) Για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ είναι

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-in}\Big[e^{(1-in)x}\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi}e^{-in\pi}-e^{-\pi}e^{in\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi}(-1)^{-n}-e^{-\pi}(-1)^{n}\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{\pi(1-in)}\cdot\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}$$

$$=\frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1-in)}$$

$$=\frac{(-1)^n(1+in)\sinh\pi}{\pi(1+n^2)}$$

Άρα,

$$f(x) \sim \frac{\sinh\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+in}{n^2+1} e^{inx}$$

(ii) Θεωρούμε την περιοδική συνάρτηση $f / \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , \text{αν } x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & , \text{αν } x \in \{-\pi, \pi\} \end{cases}$$

και με $f(x) = e^{\xi}$, αν $x = \xi + 2k\pi$, $\xi \in (-\pi, \pi)$, και $f(x) = 0$, αν $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Επειδή η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet και είναι συνεχής στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, προκύπτει ότι

$$e^x = f(x) = \frac{\sinh\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1+in}{n^2+1} e^{inx}$$

για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $x = 0$, προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$1 = \frac{\sinh\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1+in}{n^2+1}$$

$$1 = \frac{\sinh\pi}{\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{n^2+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-in}{n^2+1} \right]$$

$$\frac{\pi}{\sinh\pi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+in)+(1-in)}{n^2+1}$$

$$\frac{\pi}{\sinh\pi} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{\sinh\pi}$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Περιεχόμενα διάλεξης:

Ολοκλήρωμα Fourier

Ολοκληρωτικό θεώρημα Fourier

8. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ FOURIER

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες μια περιοδική συνεχής συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ μπορεί να παρασταθεί από μια τριγωνομετρική σειρά. Τούτο δεν είναι εφικτό για μη περιοδικές συναρτήσεις αφού, όπως είδαμε, κάθε συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά ορίζει μια περιοδική συνάρτηση. Παρακάτω θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις που δεν είναι κατ' ανάγκη περιοδικές, οι οποίες όπως θα δούμε κάτω από ορισμένες συνθήκες, παριστάνονται από γενικευμένα τριγωνομετρικά ολοκληρώματα.

Ο επόμενος ορισμός επεκτείνει την ολοκληρωσιμότητα για συναρτήσεις που ορίζονται σε μη φραγμένα διαστήματα.

Μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f/I, όπου I είναι μη φραγμένο διάστημα, ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα της συγκλίνει.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^p}/(\alpha,+\infty)$, όπου $\alpha>0$ και $p\in\mathbb{R}$, είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $p>1$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=e^{-\lambda x}/(\alpha,+\infty)$, όπου $\alpha, \lambda\in\mathbb{R}$, είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $\lambda>0$.

Μια συνάρτηση f/I ονομάζεται **απόλυτα ολοκληρώσιμη** αν η συνάρτηση $|f|/I$ είναι ολοκληρώσιμη.

Προφανώς κάθε απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sin x}{x}/[1,+\infty)$ είναι ολοκληρώσιμη αλλά όχι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 8.1

Για μια κατά τμήματα συνεχή και απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση f / R ισχύει η σχέση

$$\frac{f\left(x^{-}\right)+f\left(x^{+}\right)}{2}=\int_{0}^{+\infty}\left[A\left(t\right)\cos tx+B\left(t\right)\sin tx\right]dt$$

για κάθε σημείο $x \in R$ για το οποίο υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_{-}\left(x\right)$, $f'_{+}\left(x\right)$, όπου

$$A\left(t\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(u\right)\cos tu\,du \text{ και}$$

$$B\left(t\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(u\right)\sin tu\,du.$$

Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως **Ολοκληρωτικό Θεώρημα Fourier** και επιτρέπει την παράσταση των συνεχών συναρτήσεων από τριγωνομετρικά ολοκληρώματα.

Ολοκλήρωμα Fourier

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty}\left[A(t)\cos tx + B(t)\sin tx\right]dt$$

που αναφέρεται στο Ολοκληρωτικό Θεώρημα Fourier ονομάζεται ολοκλήρωμα Fourier της $f / \mathbb{R}$.

Ισοδύναμη μορφή

Αποδεικνύεται[5] ότι το ολοκλήρωμα Fourier της $f / \mathbb{R}$ ισούται με

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(x-u)\,du\,dt.$$

[5] Βλ. λυμένη άσκηση 28.

ΑΣΚΗΣΗ 28

Να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα Fourier της $f / \mathbb{R}$ ισούται με

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(x-u)\,du\,dt$$

ΛΥΣΗ

Είναι,

$$\int_0^{+\infty}\left[A(t)\cos tx + B(t)\sin tx\right]dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos tu\,du\right)\cos tx + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin tu\,du\right)\sin tx\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left(\cos tu\cos tx + \sin tu\sin tx\right)du\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(x-u)\,du\,dt$$

Παραδείγματα

1. Να παρασταθεί με ένα ολοκλήρωμα Fourier η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} 2\,, & x\in(-1,1) \\ 0\,, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ 1\,, & x\in\{-1,1\} \end{cases}$$

και στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cos tx\,dt=\frac{\pi}{2} \qquad \text{για κάθε } x\in(-1,1).$$

Λύση Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα συνεχής με σημεία ασυνέχειας τα $-1, 1$ και με $f(-1^-)=f(1^+)=0,\ f(-1^+)=f(1^-)=2$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}2dx=4$$

και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x), f'_+(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ολοκληρωτικού θεωρήματος Fourier για τη συνάρτηση f και επομένως ισχύει

$$f(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\int_0^{+\infty}\left[A(t)\cos tx+B(t)\sin tx\right]dt$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου

$$A(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos tu du=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}2\cos tu du$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{t}\left[\sin tu\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{\pi}\frac{\sin t}{t}$$

για κάθε $t>0$, και

$$B(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin tu du=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}2\sin tu du$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{t}\left[-\cos tu\right]_{-1}^{1}=0,$$

για κάθε $t>0$.

Κατόπιν τούτων είναι,

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cos tx dt \qquad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Ειδικά για $x\in(-1,1)$ προκύπτει ότι

$$2=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cos tx dt$$

και τελικά $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cos tx dt=\frac{\pi}{2}$.

2. Να παρασταθεί με ένα ολοκλήρωμα Fourier η συνάρτηση $f / \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \ , \ x \in [0, \pi] \\ 0 \quad , \ x \in (-\infty, 0) \cup (\pi, +\infty) \end{cases}$$

και στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} t}{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Λύση Η συνάρτηση f είναι συνεχής, απόλυτα ολοκληρώσιμη και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x), f'_+(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Ολοκληρωτικού Θεωρήματος Fourier για τη συνάρτηση f και επομένως ισχύει ότι

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left[A(t) \cos tx + B(t) \sin tx \right] dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου

$$A(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos tu\,du=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin u\cos tu\,du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(1+t)u+\sin(1-t)u\right]du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+t)u}{1+t}-\frac{\cos(1-t)u}{1-t}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+t)\pi}{1+t}-\frac{\cos(1-t)\pi}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\cos\pi t}{1-t^2}+\frac{2}{1-t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1+\cos\pi t}{1-t^2}\text{ για κάθε } t\neq 1,$$

και

$$B(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin tu\,du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin u \sin tu\,du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(1-t)u-\cos(1+t)u\right]du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-t)u}{1-t}-\frac{\sin(1+t)u}{1+t}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(1-t)\pi}{1-t}-\frac{\sin(1+t)\pi}{1+t}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\pi t}{1-t^2}\text{ ,για κάθε } t\neq 1.$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1+\cos\pi t}{1-t^2}\cos tx+\frac{1}{\pi}\frac{\sin\pi t}{1-t^2}\sin tx\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos tx+\left(\cos\pi t\cos tx+\sin\pi t\sin tx\right)}{1-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos tx+\cos t(\pi-x)}{1-t^2}dt\ ,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τέλος, προκειμένου να υπολογισθεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{1-t^2}\,dt$$

εφαρμόζουμε την προηγούμενη σχέση για $x = \frac{\pi}{2}$, οπότε

προκύπτουν οι ισοδύναμες ισότητες

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos t\frac{\pi}{2} + \cos t\frac{\pi}{2}}{1-t^2}\,dt$$

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi t}{2}}{1-t^2}\,dt$$

και τελικά

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi t}{2}}{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ημιτονοειδής και συνημιτονοειδής μορφή

Το ολοκλήρωμα Fourier μιας περιττής συνάρτησης $f/\mathbb{R}$ γράφεται[6] ισοδύναμα στη παρακάτω ημιτονοειδή μορφή:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)\sin tu \sin tx\, du\, dt.$$

Αντίστοιχα το ολοκλήρωμα Fourier μιας άρτιας συνάρτησης $f/\mathbb{R}$ γράφεται ισοδύναμα στη παρακάτω συνημιτονοειδή μορφή:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)\cos tu \cos tx\, du\, dt .$$

[6] Για την απόδειξη βλ. λυμένη άσκηση 31.

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα Fourier μιας περιττής συνάρτησης $f / \mathbb{R}$ ισούται με

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)\sin tu \sin tx\, du\, dt$$

ΛΥΣΗ

Είναι,

$$A(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos tu\, du \;=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(u)\cos tu\, du+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(u)\cos tu\, du$$

$$\overset{1}{=}\frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{0} f(-\upsilon)\cos(-t\upsilon)\, d(-\upsilon)+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\upsilon)\cos tu\, du$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(\upsilon)\cos tu\, du+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(u)\cos tu\, du$$

$$=0$$

και (με ανάλογη διαδικασία)

$$B(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(u)\sin tu\, du$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty}\left[A(t)\cos tx+B(t)\sin tx\right]dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)\sin tu \sin tx\, du\, dt$$

[1]Θέτουμε $\upsilon=-u$ στο πρώτο ολοκλήρωμα.

Ολοκληρωτικό Θεώρημα Fourier για συναρτήσεις στο $(0,+\infty)$

Έστω $f/(0,+\infty)$ μια κατά τμήματα συνεχής και απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Θεωρούμε την περιττή επέκταση $\overline{f}$ και την άρτια επέκταση $\overline{\overline{f}}$ της f στο $\mathbb{R}$ που ορίζονται ως εξής:

$$\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x) & ,\text{ αν } x>0 \\ 0 & ,\text{ αν } x=0 \\ -f(-x) & ,\text{ αν } x<0 \end{cases} \quad \text{και}$$

$$\overline{\overline{f}}(x)=\begin{cases} f(x) & ,\text{ αν } x>0 \\ 0 & ,\text{ αν } x=0 \\ f(-x) & ,\text{ αν } x<0. \end{cases}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις $\overline{f},\overline{\overline{f}}$ είναι κατά τμήματα συνεχείς και απόλυτα ολοκληρώσιμες, αφού

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\overline{f}(x)\right|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\overline{\overline{f}}(x)\right|dx=2\int_{0}^{+\infty}\left|f(x)\right|dx.$$

Άρα εφαρμόζοντας το Ολοκληρωτικό Θεώρημα Fourier για τις συναρτήσεις $\overline{f},\ \overline{\overline{f}}$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\overline{f}\left(x^{-}\right)+\overline{f}\left(x^{+}\right)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\overline{f}\left(u\right)\text{sintusintxdudt}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $\overline{f_{-}}'\left(x\right)$, $\overline{f}_{+}'\left(x\right)$ και

$$\frac{\overline{\overline{f}}\left(x^{-}\right)+\overline{\overline{f}}\left(x^{+}\right)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\overline{\overline{f}}\left(u\right)\text{costucostxdudt}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $\overline{\overline{f}}_{-}'\left(x\right)$, $\overline{\overline{f}}_{+}'\left(x\right)$.

Κατόπιν τούτων, αν $x\in\left(0,+\infty\right)$ για το οποίο υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f_{-}'\left(x\right)$ και $f_{+}'\left(x\right)$, επειδή

$$\overline{f}\left(x^{-}\right)=\overline{\overline{f}}\left(x^{-}\right)=f\left(x^{-}\right)\ ,\ \overline{f}\left(x^{+}\right)=\overline{\overline{f}}\left(x^{+}\right)=f\left(x^{+}\right)$$

και

$$\overline{f}_{-}'\left(x\right)=\overline{\overline{f}}_{-}'\left(x\right)=f_{-}'\left(x\right)\ ,\ \overline{f}_{+}'\left(x\right)=\overline{\overline{f}}_{+}'\left(x\right)=f_{+}'\left(x\right)$$

προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\frac{f\left(x^{-}\right)+f\left(x^{+}\right)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}f\left(u\right)\textbf{sintusintxdudt}}$$

$$\boldsymbol{=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}f\left(u\right)\textbf{costucostxdudt}}$$

Παράδειγμα. Να αποδειχθεί η σχέση

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+\alpha^2} \sin\beta t dt = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{t^2+\alpha^2} \cos\beta t dt = e^{-\alpha\beta} \frac{\pi}{2}$$

για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-\alpha x} / (0, +\infty)$, η οποία είναι συνεχής και απόλυτα ολοκληρώσιμη, αφού

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}\ .$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Ολοκληρωτικού Θεωρήματος του Fourier για την συνάρτηση αυτή για $x = \beta$, προκύπτει ότι

$$e^{-\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \sin tu \sin t\beta du dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \cos tu \cos t\beta du dt.$$

Επειδή,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \sin tu du = \frac{t}{t^2+\alpha^2} \quad \text{και} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \cos tu du = \frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}$$

προκύπτει ότι

$$e^{-\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+\alpha^2} \sin t\beta dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{t^2+\alpha^2} \cos t\beta dt\ ,$$

από όπου άμεσα προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Θα δοθεί μια άλλη μορφή του ολοκληρώματος Fourier χρησιμοποιώντας την εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Για το σκοπό αυτό θα χρειασθεί ο επόμενος ορισμός.

Πρωτεύουσα τιμή ολοκληρώματος

Έστω μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g/\mathbb{R}$. Η πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώ-ματος $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ συμβολίζεται με $\pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ και ορίζεται ως το όριο:

$$\pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \lim_{k\to+\infty}\int_{-k}^{k} g(t)dt.$$

Παρατηρήσεις

1. Αν η συνάρτηση $g/\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος συμπίπτει με αυτό.

2. Η πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος μπορεί να υπάρχει ακόμα και αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.

Για παράδειγμα για τη συνάρτηση $g(x)=x/\mathbb{R}$, δεν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα, ενώ υπάρχει η πρωτεύουσα τιμή του, αφού:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-k}^{k} x\,dx=\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-k}^{k}=0.$$

Μιγαδική ή Εκθετική μορφή

Εκφράζοντας το $\cos t(x-u)$ συναρτήσει της εκθετικής συνάρτησης στη μορφή

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} f(u)\cos t(x-u)\,du\,dt$$

του ολοκληρώματος Fourier προκύπτει[7] η παρακάτω ισοδύναμη μορφή η οποία ονομάζεται μιγαδική ή εκθετική μορφή του Ολοκληρώματος Fourier:

$$\mathbf{\frac{1}{2\pi}}\ \pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{f(u)e^{it(x-u)}dudt}$$

[7] Βλ. λυμένη άσκηση 32.

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(x-u)\,du\,dt = \frac{1}{2}\pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{it(x-u)}\,du\,dt$$

ΛΥΣΗ

Είναι,

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(x-u)\,du\,dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{e^{it(x-u)}+e^{-it(x-u)}}{2}\,du\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{it(x-u)}\,du+\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-it(x-u)}\,du\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[\int_0^{k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-itu}\,du\right]e^{itx}\,dt+\int_0^{k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{itu}\,du\right]e^{-itx}\,dt\right]$$

$$\overset{1}{=}\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[\int_0^{k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-itu}\,du\right]e^{itx}\,dt-\int_0^{-k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\zeta u}\,du\right]e^{i\zeta x}\,d\zeta\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[\int_0^{k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-itu}\,du\right]e^{itx}\,dt+\int_{-k}^{0}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-itu}\,du\right]e^{itx}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\int_{-k}^{k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{it(x-u)}\,du\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{it(x-u)}\,du\,dt$$

[1]Θέτουμε $\zeta=-t$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα.

Κατόπιν τούτου αν η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Ολοκληρωτικού Θεωρήματος Fourier είναι

$$\begin{aligned}\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}&=\frac{1}{2\pi}\ \pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{it(x-u)}dudt\\&=\frac{1}{2\pi}\ \pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{itx}e^{-itu}du\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\ \pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-itu}du\right)e^{itx}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\ \pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}C(t)e^{itx}dt\end{aligned}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$, όπου

$$C(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-itu}du.$$

Αν επιπλέον η συνάρτηση $C(t)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η παραπάνω πρωτεύουσα τιμή ταυτίζεται με το γενικευμένο αντίστοιχο ολοκλήρωμα, οπότε είναι

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C(t)e^{itx}dt$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$.

ΔΙΑΛΕΞΗ 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Περιεχόμενα διάλεξης:

Μετασχηματισμός Fourier

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Αν για μια συνάρτηση[8] $f/\mathbb{R}$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx$$

συγκλίνει, τότε αυτό ορίζει μια συνάρτηση $\hat{f}(t)$, η οποία ονομάζεται **(εκθετικός) μετασχηματισμός Fourier της** $f/\mathbb{R}$ και σημειώνεται με $\mathcal{F}\left[f(x)\right]$, δηλαδή:

$$\mathcal{F}\left[\mathbf{f}(\mathbf{x})\right]=\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{t})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{e}^{-\mathbf{itx}}\mathbf{dx}$$

Παρατηρήσεις

1. Η συνάρτηση $\hat{f}(t)$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)e^{-itx}\right|dx \overset{2}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

[8] Γενικότερα τα παρακάτω ορίζονται και για συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές.

Υπάρχουν όμως συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα η $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ / $\mathbb{R}^*$, των οποίων ορίζεται[9] ο μετασχηματισμός Fourier ενώ δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες[10].

---

[2]Προφανώς $\left|e^{-itx}\right|=\left|\cos tx-i\sin tx\right|=\sqrt{\cos^2 tx+\sin^2 tx}=1$.

[9]Βλ. το 5ο παράδειγμα του παρακάτω πίνακα των βασικών μετασχηματισμών Fourier.

Βασικοί μετασχηματισμοί Fourier $(\alpha > 0)$

	$f(x)$	$\hat{f}(t)$
1	$\begin{cases} 1\ , \alpha\nu\ \lvert x\rvert \le \alpha \\ 0\ , \alpha\nu\ \lvert x\rvert > \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{2\sin\alpha t}{t}\ , \alpha\nu\ t \ne 0 \\ 2\alpha\ , \alpha\nu\ t = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \alpha - \lvert x\rvert\ , \alpha\nu\ \lvert x\rvert \le \alpha \\ 0\ , \alpha\nu\ \lvert x\rvert > \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{4}{t^2}\sin^2\dfrac{\alpha t}{2}\ , \alpha\nu\ t \ne 0 \\ \alpha^2\ , \alpha\nu\ t = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} e^{-\alpha x}\ , \alpha\nu\ x \ge 0 \\ 0\ , \alpha\nu\ x < 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\alpha + it}$
4	$e^{-\alpha\lvert x\rvert}$	$\dfrac{2\alpha}{t^2 + \alpha^2}$
5	$\dfrac{\sin\alpha x}{x}$	$\begin{cases} \pi\ , \alpha\nu\ \lvert t\rvert < \alpha \\ \dfrac{\pi}{2}\ , \alpha\nu\ \lvert t\rvert = \alpha \\ 0\ , \alpha\nu\ \lvert t\rvert > \alpha \end{cases}$
6	$\dfrac{1}{x^2 + \alpha^2}$	$\dfrac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha\lvert t\rvert}$
7	$e^{-\alpha x^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$

ΑΣΚΗΣΗ 33

Να αποδειχθεί ότι:

(i) Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f/\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν} |x|\le \alpha\\ 0, & \text{αν} |x|>\alpha\end{cases}$, όπου $\alpha>0$, δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{f}(t)=\begin{cases}\dfrac{2\sin \alpha t}{t}, & \text{αν } t\neq 0\\ 2\alpha, & \text{αν } t=0.\end{cases}$$

(ii) Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f/\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\alpha-|x|, & \text{αν} |x|\le \alpha\\ 0, & \text{αν} |x|>\alpha\end{cases}$, όπου $\alpha>0$, δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{f}(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{t^2}\sin^2\dfrac{\alpha t}{2}, & \text{αν } t\neq 0\\ \alpha^2, & \text{αν } t=0\end{cases}.$$

ΛΥΣΗ

(i) Αν $t \neq 0$ είναι,

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-itx} dx$$

$$= -\frac{1}{it}\left[e^{-itx}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{it}\left(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}\right)$$

$$= \frac{2\sin \alpha t}{t}$$

ενώ για $t = 0$ είναι,

$$\hat{f}(0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} 1 dx = 2\alpha.$$

(ii) Αν $t \neq 0$ είναι,

$$\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha-|x|)e^{-itx}dx$$

$$=\int_{-\alpha}^{0}(\alpha+x)e^{-itx}dx+\int_{0}^{\alpha}(\alpha-x)e^{-itx}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{0}(\alpha-u)e^{itu}du+\int_{0}^{\alpha}(\alpha-x)e^{-itx}dx$$

$$\overset{u=x}{=}\int_{0}^{\alpha}(\alpha-x)e^{itx}dx+\int_{0}^{\alpha}(\alpha-x)e^{-itx}dx$$

$$=\int_{0}^{\alpha}(\alpha-x)\left(e^{itx}+e^{-itx}\right)dx$$

$$=2\int_{0}^{\alpha}(\alpha-x)\cos tx dx$$

$$=\frac{2}{t}\int_{0}^{\alpha}(\alpha-x)(\sin tx)' dx$$

$$=\frac{2}{t}\left[(\alpha-x)(\sin tx)\right]_{0}^{\alpha}+\frac{2}{t}\int_{0}^{\alpha}\sin tx dx$$

$$=\frac{2}{t^2}\left[-\cos tx\right]_{0}^{\alpha}=\frac{2}{t^2}(1-\cos\alpha t)=\frac{4}{t^2}\sin^2\frac{\alpha t}{2}$$

ενώ για $t=0$ είναι,

$$\hat{f}(0)=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha-|x|)dx=2\int_{0}^{\alpha}(\alpha-x)dx=2\left[\alpha x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\alpha}=\alpha^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 34

Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f / \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{αν } x<0 \end{cases},$$

όπου $\alpha>0$, δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\alpha+it}.$$

ΛΥΣΗ

Είναι,

$$\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} e^{-itx} dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+it)} dx = -\frac{1}{\alpha+it}\left[e^{-(\alpha+it)x}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha+it}\left[1-\lim_{x \to +\infty} e^{-(\alpha+it)x}\right]=\frac{1}{\alpha+it}(1-0)=\frac{1}{\alpha+it}.$$

αφού $\lim\limits_{x \to +\infty}\left|e^{-(a+it)x}\right| = \lim\limits_{x \to +\infty} |e^{-ax}||e^{-itx}| = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-ax} = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 35

Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f/\mathbb{R}$ με $f(x)=e^{-\alpha|x|}$, όπου $\alpha>0$, δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{f}(t)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}.$$

ΛΥΣΗ

Είναι,

$$\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-itx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}e^{-itx}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}e^{-itx}dx$$

$$\overset{u=-x}{=}-\int_{+\infty}^{0} e^{-\alpha u}e^{itu}du+\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}e^{-itx}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha-it)u}du+\int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+it)x}dx$$

$$=-\frac{1}{\alpha-it}\left[e^{-(\alpha-it)u}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{\alpha+it}\left[e^{-(\alpha+it)x}\right]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha-it}+\frac{1}{\alpha+it}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 36

Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f / \mathbb{R}^*$ με

$f(x)=\dfrac{\sin\alpha x}{x}$, όπου $\alpha > 0$, δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{f}(t)=\begin{cases} \pi \ , \text{αν } |t|<\alpha \\ \dfrac{\pi}{2} , \text{αν } |t|=\alpha \\ 0 \ , \text{αν } |t|>\alpha \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Είναι,

$$\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-itx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-itx}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-itx}dx$$

$$\overset{u=-x}{=}-\int_{+\infty}^{0}\frac{\sin(-\alpha u)}{-u}e^{itu}du+\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-itx}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha u}{u}e^{itu}du+\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-itx}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\left(e^{itx}+e^{-itx}\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin\alpha x\cos tx}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\alpha+t\right)x+\sin\left(\alpha-t\right)x}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\alpha+t\right)x}{x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\alpha-t\right)x}{x}dx$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ \alpha\nu\ \ t>-\alpha\\ 0\ ,\ \alpha\nu\ \ t=-\alpha\\ -\frac{\pi}{2},\ \alpha\nu\ \ t<-\alpha\end{cases}+\begin{cases}\frac{\pi}{2},\ \alpha\nu\ \ t<\alpha\\ 0\ ,\ \alpha\nu\ \ t=\alpha\\ -\frac{\pi}{2},\ \alpha\nu\ \ t>\alpha\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\pi\quad ,\alpha\nu\ \left|t\right|<\alpha\\ \frac{\pi}{2}\quad ,\alpha\nu\ \left|t\right|=\alpha\\ 0\quad ,\alpha\nu\ \left|t\right|>\alpha\end{cases}$$

Υπενθυμίζεται ότι $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\begin{cases}\pi/2, & \lambda>0\\ 0, & \lambda=0\\ -\pi/2, & \lambda<0\end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 37

Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x)=e^{-\alpha x^2}/\mathbb{R}$, όπου $\alpha>0$, δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{f}(t)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή

$$-(\alpha x^2+itx)=-\alpha\left(x^2+2\frac{it}{2\alpha}x\right)=-\alpha\left(x^2+2\frac{it}{2\alpha}x+\left(\frac{it}{2\alpha}\right)^2\right)+\alpha\left(\frac{it}{2\alpha}\right)^2$$

$$=-\alpha\left(x+\frac{it}{2\alpha}\right)^2-\frac{t^2}{4\alpha}$$

είναι

$$\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}e^{-itx}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\alpha x^2+itx)}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\left(x+\frac{it}{2\alpha}\right)^2-\frac{t^2}{4\alpha}}dx\overset{u=\sqrt{\alpha}\left(x+\frac{it}{2\alpha}\right)}{=}\frac{e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du$$

$$=\frac{e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

Αποδεικνύεται ότι, αν $f/\mathbb{R}$ είναι μια απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\hat{f}/\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι κατά τμήματα συνεχής τότε ισχύει ότι

$$\lim_{|t|\to\infty}\left|\hat{f}(t)\right|=0$$

Παρακάτω δίνονται οι κυριότερες ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

1. $\mathcal{F}\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] = c_1 \hat{f}_1(t) + c_2 \hat{f}_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2. $\mathcal{F}\left[f(\alpha x)\right] = \dfrac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

3. $\mathcal{F}\left[f(x-\alpha)\right] = e^{-i\alpha t}\hat{f}(t)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. $\mathcal{F}\left[e^{i\alpha x} f(x)\right] = \hat{f}(t-\alpha)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. (i) $\mathcal{F}\left[\cos\alpha x f(x)\right] = \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}(t-\alpha) + \hat{f}(t+\alpha)\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathcal{F}\left[\sin\alpha x f(x)\right] = \dfrac{1}{2i}\left[\hat{f}(t-\alpha) - \hat{f}(t+\alpha)\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. $\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right] = (it)^n \hat{f}(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$,

όπου η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ έχει τις n πρώτες παραγώγους συνεχείς και $f^{(k)}$ μηδενίζεται στο $\pm\infty$, (δηλαδή $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$), για κάθε $k < n$.

7. $\mathcal{F}\left[x^n f(x)\right] = i^n \hat{f}^{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$,

όπου $f/\mathbb{R}$ είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η συνάρτηση $x^n f(x)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να αποδειχθούν οι πέντε πρώτες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

ΛΥΣΗ

1. $\mathcal{F}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right) e^{-itx} dx$

$$= c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) e^{-itx} dx + c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) e^{-itx} dx \ = c_1 \hat{f}_1(t) + c_2 \hat{f}_2(t)$$

2. Για $\alpha > 0$, είναι:

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-itx} dx \overset{u=\alpha x}{=} \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\frac{t}{\alpha}u} du = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

Ανάλογα αποδεικνύεται για $\alpha < 0$.

3. $\mathcal{F}[f(x-\alpha)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\alpha) e^{-itx} dx \overset{u=x-\alpha}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-it(u+\alpha)} du$

$$= e^{-it\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-itu} du = e^{-it\alpha} \hat{f}(t)$$

4. $\mathcal{F}[e^{i\alpha x} f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) e^{-itx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(t-\alpha)x} dx = \hat{f}(t-\alpha)$

5. (i) $\mathcal{F}[\cos \alpha x \ f(x)] = \mathcal{F}[\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} f(x)]$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}[e^{i\alpha x} f(x)] + \mathcal{F}[e^{-i\alpha x} f(x)]\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(t-\alpha) + \hat{f}(t+\alpha)\right)$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η (ii).

ΑΣΚΗΣΗ 39

Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ και έστω $f/\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία έχει τις n πρώτες παραγώγους συνεχείς με $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x)=0$, για κάθε k < n. Να αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]=(it)^n \hat{f}(t).$$

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί επαγωγικά.

Αρχικά για n = 1, πρέπει να αποδειχθεί ότι αν $f/\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με πρώτη παράγωγο συνεχή και $\lim\limits_{|x|\to\infty} f\ \ (x)=0$, τότε ισχύει ότι:

$$\mathcal{F}[f'(x)]=it\hat{f}(t) \qquad (1)$$

Για την απόδειξη της παραπάνω ισότητας θα χρησιμοποιηθεί παραγοντική ολοκλήρωση. Πράγματι,

$$\mathcal{F}[f'(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-itx}dx$$

$$=\left[f(x)e^{-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(e^{-itx}\right)'dx$$

$$=\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-itx}-\lim_{x\to-\infty} f(x)e^{-itx}+it\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx$$

$$=0-0+it\cdot\hat{f}(t)=it\cdot\hat{f}(t)$$

Στη συνέχεια υποθέτοντας ότι το συμπέρασμα ισχύει για n = k, δηλαδή

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)] = (it)^k \hat{f}(t) \qquad (2)$$

για κάθε συνάρτηση $f / \mathbb{R}$, η οποία έχει τις k πρώτες παραγώγους συνεχείς και $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^{(\lambda)}(x) = 0$, για κάθε

λ < k, θα αποδειχθεί το συμπέρασμα για n = k+1.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μια συνάρτηση $f / \mathbb{R}$ η οποία έχει τις k+1 πρώτες παραγώγους συνεχείς και $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^{(\lambda)}(x) = 0$ για κάθε λ < k+1. Τότε η συνάρτηση $f^{(k)}(x)$ έχει την πρώτη της παράγωγο συνεχή και ισχύει $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$. Οπότε εφαρμόζοντας το σχέση (2) και με τη βοήθεια της σχέσης (1) προκύπτει ότι:

$$\mathcal{F}\left[f^{(k+1)}(x)\right] = \mathcal{F}\left[\left(f^{(k)}(x)\right)'\right] = it\mathcal{F}\left[f^{(k)}(x)\right]$$

$$= it\left(it\right)^k \hat{f}\left(t\right) = \left(it\right)^{k+1} \hat{f}\left(t\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 40

Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ και έστω $f/\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, με $x^n f(x)$ απόλυτα ολοκληρώσιμη. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει η n-οστή παράγωγος του μετασχηματισμού Fourier $\hat{f}(t)$ και ισχύει ότι

$\mathcal{F}[x^n f(x)] = i^n \hat{f}^{(n)}(t)$.

ΛΥΣΗ

Θα αποδειχθεί επαγωγικά. Αρχικά για n=1, πρέπει να αποδειχθεί ότι αν $xf(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη τότε

$$\mathcal{F}[xf(x)] = i\hat{f}'(t) \qquad (1)$$

Πράγματι, για την εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx$$

παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left(f(x) e^{-itx} \right) \right| = \left| -ixf(x) e^{-itx} \right| = \left| xf(x) \right|$$

για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$ και επειδή η συνάρτηση $xf(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη έπεται σύμφωνα με το κριτήριο Weierstrass ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x) e^{-itx} dx$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα. Τότε προκύπτει ότι η συνάρτηση $\hat{f}(t)$ θα είναι παραγωγίσιμη, με

$$\hat{f}'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x) e^{-itx} dx = -i\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-itx} dx = -i\mathcal{F}[xf(x)]$$

Άρα, $\mathcal{F}[xf(x)] = i\hat{f}'(t)$

Στη συνέχεια υποθέτοντας ότι το συμπέρασμα ισχύει για n = k, δηλαδή

$$\mathcal{F}[x^k f(x)] = i\hat{f}^{(k)}(t) \qquad (2)$$

για κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f με $x^k f(x)$ απόλυτα ολοκληρώσιμη, θα αποδειχθεί για n = k+1. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f με $x^{k+1} f(x)$ απόλυτα ολοκληρώσιμη. Τότε εφαρμόζοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^{k+1} f(x)] &= \mathcal{F}[xx^k f(x)] = i(\mathcal{F}[x^k f(x)])' \\ &= i(i^k \hat{f}^{(k)}(t))' = i^{k+1} \hat{f}^{(k+1)}(t)\end{aligned}$$

Παραδείγματα

1. Για τη συνάρτηση $f / \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \beta - |x|, & \alpha\nu\ |x| \le \alpha \\ 0, & \alpha\nu\ |x| > \alpha \end{cases}$

όπου $\alpha > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$, είναι

$$f(x) = \begin{cases} \beta - \alpha, & \alpha\nu\ |x| \le \alpha \\ 0, & \alpha\nu\ |x| > \alpha \end{cases} + \begin{cases} \alpha - |x|, & \alpha\nu\ |x| \le \alpha \\ 0, & \alpha\nu\ |x| > \alpha \end{cases}$$

$$= (\beta - \alpha) f_1(x) + f_2(x),$$

όπου

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ |x| \le \alpha \\ 0, & \alpha\nu\ |x| > \alpha \end{cases} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \begin{cases} \alpha - |x|, & \alpha\nu\ |x| \le \alpha \\ 0, & \alpha\nu\ |x| > \alpha. \end{cases}$$

Άρα σύμφωνα με τη πρώτη ιδιότητα ισχύει ότι

$$\hat{f}(t) = (\beta - \alpha)\hat{f}_1(t) + \hat{f}_2(t)$$

$$= (\beta - \alpha) \cdot \begin{cases} 2\dfrac{\sin\alpha t}{t}, & \alpha\nu\ t \ne 0 \\ 2\alpha, & \alpha\nu\ t = 0 \end{cases} + \begin{cases} \dfrac{4}{t^2}\sin^2\dfrac{\alpha t}{2}, & \alpha\nu\ t \ne 0 \\ \alpha^2, & \alpha\nu\ t = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(\beta - \alpha)\sin\dfrac{\alpha t}{t} + \dfrac{4}{t^2}\sin^2\dfrac{\alpha t}{2}, & \alpha\nu\ t \ne 0 \\ (2\beta - \alpha)\alpha, & \alpha\nu\ t = 0. \end{cases}$$

2. Για τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \text{αν } x>0 \\ e^{\alpha x} & , \text{αν } x\le 0. \end{cases} \text{ όπου } \alpha>0, \text{ είναι}$$

$$f(x)=g(-x) \text{ όπου}$$

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x} & , \text{αν } x\ge 0 \\ 0 & , \text{αν } x<0. \end{cases}$$

Τότε σύμφωνα με τη δεύτερη ιδιότητα είναι

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\mathcal{F}\left[g(-x)\right]=\frac{1}{|-1|}\hat{g}\left(\frac{t}{-1}\right)$$

$$=\hat{g}(-t)=\frac{1}{\alpha-it}$$

3. Για τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με $f(x)=e^{-2(x-3)^2}$ είναι $f(x)=g(x-3)$ όπου $g(x)=e^{-2x^2}$, οπότε σύμφωνα με την τρίτη ιδιότητα είναι

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\mathcal{F}\left[e^{-2(x-3)^2}\right]=e^{-3it}\mathcal{F}\left[e^{-2x^2}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-3it}e^{-\frac{t^2}{8}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\left(3it+\frac{t^2}{8}\right)}.$$

4. Για τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}^*$ με $f(x)=\dfrac{e^{2ix}\sin 4x}{x}$ είναι $f(x)=e^{2ix}g(x)$, όπου $g(x)=\dfrac{\sin 4x}{x}$, οπότε σύμφωνα με την τέταρτη ιδιότητα είναι

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\hat{g}(t-2)=\begin{cases}\pi\ , \text{αν } |t-2|<4\\ \dfrac{\pi}{2}\ , \text{αν } |t-2|=4\\ 0\ , \text{αν } |t-2|>4\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\pi\ , \text{αν } -2<t<6\\ \dfrac{\pi}{2}\ , \text{αν } t=-2 \text{ ή } t=6\\ 0\ , \text{αν } t<-2 \text{ ή } t>6\end{cases}$$

5. Για τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{x^2+9}$ είναι $f(x)=\sin 5x\, g(x)$ όπου $g(x)=\dfrac{1}{x^2+3^2}$, με $\hat{g}(t)=\dfrac{\pi}{3}e^{-3|t|}$, οπότε σύμφωνα με την πέμπτη ιδιότητα είναι

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\frac{1}{2i}\left[\hat{g}(t-5)-\hat{g}(t+5)\right]$$

$$=\frac{\pi}{6i}\left(e^{-3|t-5|}-e^{-3|t+5|}\right).$$

6. Για τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με $f(x) = -\dfrac{2x}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}$, όπου $\alpha > 0$ είναι $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^2+\alpha^2}\right)'$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{1}{x^2+\alpha^2} = 0$, οπότε σύμφωνα με την έκτη ιδιότητα για $n=1$, είναι

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \mathcal{F}\left[\left(\frac{1}{x^2+\alpha^2}\right)'\right] = it\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+\alpha^2}\right] = \frac{it\pi}{\alpha}e^{-\alpha|t|}.$$

7. Για τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-3x} & , \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

είναι $f(x) = x^2 g(x)$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} e^{-3x} & , \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

με $\hat{g}(t) = \dfrac{1}{3+it}$.

Θα δειχθεί ότι η $f(x) = x^2 g(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη. Αρχικά, με παραγοντική ολοκλήρωση, προκύπτει ότι

$$\int x^2 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + c$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^2 g(x) \right| dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-3x} dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^2 e^{-3x}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{2}{9}x e^{-3x}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{2}{27}e^{-3x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 0 - 0 + \frac{2}{27} = \frac{2}{27}.$$

Άρα η συνάρτηση $x^2 g(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, οπότε σύμφωνα με την έβδομη ιδιότητα για $n = 2$, είναι

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \mathcal{F}\left[x^2 g(x)\right] = i^2 \hat{g}''(t)$$

$$= -\left(\frac{1}{3+it}\right)'' = -\left[-\frac{(3+it)'}{(3+it)^2}\right]'$$

$$= i\left(\frac{1}{(3+it)^2}\right)' = -2i\frac{(3+it)'}{(3+it)^3} = \frac{2}{(3+it)^3}\ .$$

ΑΣΚΗΣΗ 43

Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(x)=\left(x^2-1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\ /\ \mathbb{R}$$

(i) με τη βοήθεια της έκτης ιδιότητας

(ii) με τη βοήθεια της έβδομης ιδιότητας

ΛΥΣΗ

(i) Αρχικά παρατηρούμε ότι $f(x)=\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)''$, με

$$\lim_{|x|\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{|x|\to\infty}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'=\lim_{|x|\to\infty}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)=0, \text{ οπότε}$$

εφαρμόζοντας την έκτη ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier για n = 2, προκύπτει

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\mathcal{F}\left[\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)''\right]=(it)^2\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]=-\sqrt{2\pi}t^2e^{\frac{-t^2}{2}}$$

(ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right|dx=-2\int_0^{+\infty}x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'dx=\left[-2xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=0+2\sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{2\pi}$$

Κατόπιν τούτου, η συνάρτηση $x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\ /\ \mathbb{R}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη οπότε εφαρμόζοντας την έβδομη ιδιότητα για τη συνάρτηση $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\ /\ \mathbb{R}$ και $n=2$, προκύπτει ότι:

$$\mathcal{F}\left[x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right]=i^2\left(\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\right)''=-\sqrt{2\pi}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)''=-2\sqrt{\pi}(t^2-1)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Κατόπιν τούτου,

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\mathcal{F}\left[x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right]-\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

$$=-\sqrt{2\pi}\left(t^2-1\right)e^{-\frac{t^2}{2}}-\sqrt{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$=-\sqrt{2\pi}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Στη παράγραφο αυτή εξετάζεται το πρόβλημα αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier, δηλαδή η εύρεση της συνάρτησης f αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση $\hat{f}$.

Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος. Η πρώτη (**μέθοδος Dirichlet**) βασίζεται στο Ολοκληρωτικό Θεώρημα Fourier και ως εκ τούτου αφορά συναρτήσεις $f/\mathbb{R}$ οι οποίες είναι κατά τμήματα συνεχείς, απόλυτα ολοκληρώσιμες και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοί τους. Η δεύτερη (**προσθετική μέθοδος Gauss-Weierstrass**) περιορίζεται σε συνεχείς συναρτήσεις $f/\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε οι συναρτήσεις $f, \hat{f}$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες, χωρίς να απαιτείται όμως καμία συνθήκη παραγωγισιμότητας για την f. Στο βιβλίο αυτό θα αναλύσουμε την πρώτη μέθοδο.

Η μέθοδος Dirichlet

Έστω $f/\mathbb{R}$ μια κατά τμήματα συνεχής, απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση για την οποία υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_{-}(x)$ και $f'_{+}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη μιγαδική μορφή του ολοκληρώματος Fourier, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\,\pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{it(x-u)}dudt\\ &= \frac{1}{2\pi}\,\pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-itu}\right]e^{itx}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\,\pi.\tau.\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)e^{itx}dt\end{aligned}$$

Επιπλέον για τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής και υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)e^{itx}dt$ προκύπτει ότι

$$\mathbf{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)e^{itx}dt} \qquad (1)$$

Ο τύπος αυτός ονομάζεται **τύπος αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier** και εκφράζει κάθε συνεχή συνάρτηση με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier. Για το λόγο αυτό, η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ ονομάζεται **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier** της $\hat{f}/\mathbb{R}$ και σημειώνεται με

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{t})\right].$$

Κατόπιν τούτων, ορίζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}^{-1}$, ο οποίος αντιστοιχίζει συναρτήσεις $\hat{f}(t)$ σε συναρτήσεις $f(x)$, σύμφωνα με τη σχέση (1).

Μια ικανή συνθήκη για να υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα της σχέσης (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι η συνάρτηση $\hat{f}(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Εφαρμογή Να αποδειχθεί ο τύπος

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+\alpha^2}\right]=\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha|t|} \text{ για κάθε } \alpha>0.$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x|}$, η οποία είναι συνεχής και απόλυτα ολοκληρώσιμη, αφού

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|x|}dx=\frac{1}{2\alpha}2\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha^2}$$

και υπάρχουν οι πλευρικές παραγώγοι $f'_-(x)$ και $f'_+(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{2}e^{-\alpha x}, & x>0\\ \frac{1}{2}e^{\alpha x}, & x<0\end{cases}$$

Επιπλέον, ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{2\alpha}\mathcal{F}\left[e^{-\alpha|x|}\right]=\frac{1}{2\alpha}\frac{2\alpha}{t^2+\alpha^2}=\frac{1}{t^2+\alpha^2}.$$

Η $\hat{f}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, αφού

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(t)|\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\alpha^2}dt \overset{t=\alpha z}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(\alpha z)^2+\alpha^2}dz$$

$$= \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{2}{\alpha}[\operatorname{arctg} z]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\alpha}$$

Κατόπιν τούτων, εφαρμόζεται ο τύπος αντιστροφής

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{itx}dt$$

Θέτοντας στη τελευταία σχέση $-x$ αντί x, προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{-itx}dt = f(-x)$$

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\hat{f}(t)\right] = f(-x)$$

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+\alpha^2}\right] = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|-x|}$$

Άρα τελικά $\qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+\alpha^2}\right] = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha|t|}$.

Παρατηρήσεις

(i) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απόδειξης του τύπου της προηγούμενης εφαρμογής, αποδεικνύεται ο τύπος:

$$\mathcal{F}\left[\hat{f}(t)\right] = 2\pi f(-x)$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του ολοκληρωτικού θεωρήματος Fourier και $\hat{f}/\mathbb{R}$ απόλυτα ολοκληρώσιμη.

(ii) Σύμφωνα με την προσθετική μέθοδο Gauss-Weierstrass, λεπτομέρειες της οποίας δεν αναφέρονται σε αυτό το βιβλίο, ο τύπος αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier ισχύει και για συνεχείς, απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, των οποίων ο μετασχηματισμός Fourier είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ 44

Δίνεται η συνεχής, απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$, για την οποία υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t^2)}{t^2}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}.$$

Να ευρεθούν τα $f(0)$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά θα αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι (απόλυτα) ολοκληρώσιμη με

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(t\right)dt = 2\pi.$$

Πραγματικά είναι,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt = -2\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t}\right)' \ln(1+t^2)dt$$

$$= -2\left[\frac{\ln(1+t^2)}{t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\left(\ln(1+t^2)\right)' dt$$

$$= 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = 4[\text{arctg } t]_0^{+\infty} = 4\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον τύπο αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει ότι

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν τεθεί x = 0 στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$$

Τέλος έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \hat{f}(0) = 1$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Περιεχόμενα διάλεξης:

Βασικές ταυτότητες μετασχηματισμού Fourier

Συνέλιξη μετασχηματισμού Fourier

Αρχικά, θα δοθούν ορισμένες βασικές γνώσεις στους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς και στις πραγματικές συναρτήσεις με τιμές στους μιγαδικούς αριθμούς.

Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = x - yi$ ονομάζεται συζυγής του z. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

i) $z\overline{z} = |z|^2$, όπου $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ το μέτρο του z

ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

iii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

iv) $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$

v) $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$, αφού
$\overline{e^{ix}} = \overline{\cos x + i\sin x} = \cos x - i\sin x = e^{-ix}$

Πραγματικές συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές

Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $f(x)=g(x)+ih(x)$, όπου $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν οι g, h είναι ολοκληρώσιμες, με

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx+i\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}&=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx-i\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\big(g(x)-ih(x)\big)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}dx\end{aligned}$$

Τέλος, για το μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\overline{\hat{f}(t)}=\hat{f}(-t)$$

αφού

$$\begin{aligned}\overline{\hat{f}(t)}&=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx}=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)e^{-itx}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}\;\overline{e^{-itx}}dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(-t)x}dx=\hat{f}(-t)\end{aligned}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Στη παράγραφο αυτή θα δοθούν ορισμένες σημαντικές ταυτότητες, που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$$

για κάθε f, $g / \mathbb{R}$ απόλυτα ολοκληρώσιμες.

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{dx} \overset{1}{=} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\overline{\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})}\mathbf{dx}$$

για κάθε απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f / \mathbb{R}$ και για κάθε κατά τμήματα συνεχή, απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g / \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $\hat{g} / \mathbb{R}$ είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη.

3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}^{2}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\right|^{2}\mathbf{dx}$$

για κάθε κατά τμήματα συνεχή, απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f / \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $\hat{f} / \mathbb{R}$ είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη.

[1] $\overline{\hat{g}(x)}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός αριθμός του $\hat{g}(x)$.

Η πρώτη ταυτότητα αποδεικνύεται με τη βοήθεια του γνωστού θεωρήματος Fubini:

Θεώρημα 11.1 (Fubini)

Αν για τη συνάρτηση $\mathbf{h / R^2}$ υπάρχει ένα από τα επαναληπτικά γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})|\,\mathbf{dy}\right)\mathbf{dx}\ ,\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})|\,\mathbf{dx}\right)\mathbf{dy},$$

τότε ισχύει η σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{dy}\right)\mathbf{dx}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{dx}\right)\mathbf{dy}.$$

Η δεύτερη ταυτότητα αποδεικνύεται με τη βοήθεια της πρώτης, ενώ η τρίτη, που είναι γνωστή ως **ταυτότητα του Parseval για τον μετασχηματισμό Fourier**, προκύπτει από τη δεύτερη για $f = g$.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Αν $f,g/\mathbb{R}$ είναι δύο απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)dx$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά, επειδή οι $\hat{f}(x)$ και $\hat{g}(x)$ είναι συνεχείς και φραγμένες, εύκολα προκύπτει ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα της αποδεικτέας υπάρχουν. Επιπλέον,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-ixu}du\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x)e^{-ixu}dudx \qquad (1)$$

Εξάλλου επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)f(x)e^{-ixu}|dudx = \int_{-\infty}^{+\infty}|g(u)|du\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$$

υπάρχει, εφαρμόζεται το Θεώρημα 11.1 για τη συνάρτηση $h(x,u) = g(u)f(x)e^{-ixu}$, οπότε προκύπτει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x)e^{-ixu}dudx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x)e^{-ixu}dxdu \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixu}dx\right]g(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(u)g(u)du$$

ΑΣΚΗΣΗ 46

Αν $f, g / \mathbb{R}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, η g είναι συνεχής και υπάρχουν οι πλευρικές της παράγωγοι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $\hat{g} / \mathbb{R}$ είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη, να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx$$

ΛΥΣΗ

Επειδή, η g είναι συνεχής, απόλυτα ολοκληρώσιμη, υπάρχουν οι πλευρικές της παράγωγοι και η $\hat{g}$ είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη, ισχύει ο τύπος αντιστροφής, οπότε είναι

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t) e^{itx} dt \overset{s=-t}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} \hat{g}(-s) e^{-isx} d(-s)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(-s)\, e^{-isx} ds = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\hat{g}(-s)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\overline{\hat{g}(s)}]$$

Κατόπιν τούτου, εφαρμόζοντας την πρώτη ταυτότητα για τις συναρτήσεις f και $\overline{\hat{g}(s)}$, προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\overline{\hat{g}(s)}] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx$$

Εφαρμογές

1. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x \sin^2\beta x}{x^3} dx = \frac{\pi}{2}\left(2\beta\gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right)$$

όπου $\alpha, \beta > 0$ και $\gamma = \min\{\alpha, 2\beta\}$

Λύση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g / \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| \leq \alpha \\ 0, & \text{αν } |x| > \alpha \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} 2\beta - |x|, & \text{αν } |x| \leq 2\beta \\ 0, & \text{αν } |x| > 2\beta \end{cases}$$

οι οποίες είναι κατά τμήματα συνεχείς, απόλυτα ολοκληρώσιμες και έχουν πλευρικές παραγώγους για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον, οι μετασχηματισμοί Fourier τους είναι

$$\hat{f}(t) = 2\frac{\sin\alpha t}{t} \text{ και } \hat{g}(t) = 4\frac{\sin^2\beta t}{t^2}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}^*$.

Προφανώς, επειδή $|\hat{g}(t)| \leq \dfrac{4}{t^2}$ και υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, προκύπτει ότι η $\hat{g}$ είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Επειδή,

$$f(x)g(x)=\begin{cases} 2\beta-|x|, & \text{αν } |x|\le\gamma \\ 0, & \text{αν } |x|>\gamma \end{cases}$$

όπου $\gamma=\min\{\alpha,\ 2\beta\}$, χρησιμοποιώντας τη δεύτερη ταυτότητα προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx$$

$$\int_{-\gamma}^{\gamma}(2\beta-|x|)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\frac{\sin\alpha x}{x}\cdot 4\frac{\sin^2\beta x}{x^2}dx$$

$$2\int_{0}^{\gamma}(2\beta-x)dx=\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin^2\beta x}{x^3}dx.$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin^2\beta x}{x^3}dx=\frac{\pi}{2}\left[2\beta x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\gamma}=\frac{\pi}{2}\left(2\beta\gamma-\frac{\gamma^2}{2}\right).$$

2. Να αποδειχθεί ότι $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3}$, όπου $\alpha > 0$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-\alpha|x|} / \mathbb{R}$, η οποία είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, έχει πλευρικές παραγώγους για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η $\hat{f}(t) = \frac{2\alpha}{t^2+\alpha^2}$ είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval για τη συνάρτηση αυτή, προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\left|\hat{f}(x)\right|^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha|x|}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}\right)^2 dx$$

$$2\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha x}dx = \frac{1}{2\pi}2\int_0^{+\infty} \frac{4\alpha^2}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}dx$$

$$2\frac{1}{2\alpha} = \frac{4}{\pi}\alpha^2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}$$

Άρα,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 48

Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2\left(x^2+\beta^2\right)} dx = \frac{\left(2\alpha\beta + e^{-2\alpha\beta} - 1\right)\pi}{2\beta^3}$$

όπου $\alpha, \beta > 0$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g \in \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha - |x| &, \text{αν } |x| \le 2\alpha \\ 0 &, \text{αν } |x| > 2\alpha \end{cases} \quad \text{και} \qquad g(x) = e^{-\beta|x|}$$

οι οποίες είναι κατά τμήματα συνεχείς, απόλυτα ολοκληρώσιμες και έχουν πλευρικές παραγώγους για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, οι μετασχηματισμοί Fourier τους

$$\hat{f}(t) = 4\frac{\sin^2 \alpha t}{t^2} \quad \text{και} \quad \hat{g}(t) = \frac{2\beta}{t^2 + \beta^2}$$

είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη ταυτότητα του μετασχηματισμού Fourier, προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx$$

$$\int_{-2\alpha}^{2\alpha}\left(2\alpha - |x|\right)e^{-\beta|x|}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 4\frac{\sin^2\alpha x}{x^2}\frac{2\beta}{x^2+\beta^2}dx$$

$$2\int_{0}^{2\alpha}\left(2\alpha - x\right)e^{-\beta x}dx = \frac{4\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x}{x^2\left(x^2+\beta^2\right)}dx$$

Κατόπιν τούτων προκύπτει ότι,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x}{x^2\left(x^2+\beta^2\right)}dx = -\frac{\pi}{2\beta^2}\int_{0}^{2u}\left(2\alpha - x\right)\left(e^{-\beta x}\right)' dx$$

$$= -\frac{\pi}{2\beta^2}\Big[(2\alpha - x)e^{-\beta x}\Big]_0^{2\alpha} - \frac{\pi}{2\beta^2}\int_0^{2\alpha} e^{-\beta x}dx$$

$$= \frac{\alpha\pi}{\beta^2} + \frac{\pi}{2\beta^3}\Big[e^{-\beta x}\Big]_0^{2\alpha}$$

$$= \frac{\left(2\alpha\beta + e^{-2\alpha\beta} - 1\right)\pi}{2\beta^3}$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Για δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f, g / \mathbb{R}$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x-u) du$ ορίζει μια συνάρτηση του x, η οποία ονομάζεται **συνέλιξη** των f, g και σημειώνεται με $\mathbf{f * g}$, δηλαδή

$$\mathbf{(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x-u) du}.$$

Παραδείγματα

1. Αν $f = \mu_{[0,\,1]}$, η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[0, 1]$, να δειχθεί ότι:

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } x < 0 \text{ ή } x > 2 \\ x & , \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & , \text{αν } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Λύση

Είναι,

$$\left(f*f\right)\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u\right)f\left(x-u\right)du=\int_{0}^{1} f\left(x-u\right)du.$$

Εξετάζουμε για ποιά $u\in\left[0,\,1\right]$ ισχύει ότι $x-u\in\left[0,\,1\right]$ ή ισοδύναμα ότι $x-1\le u\le x$. Για το σκοπό αυτό διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$\left(i\right)$ Αν $x<0$ ή $x>2$, τότε $x-u<0$ ή $x-u>1$ για κάθε $u\in\left[0,\,1\right]$, οπότε $f\left(x-u\right)=0$ και επομένως $\left(f*f\right)\left(x\right)=0$.

$\left(ii\right)$ Αν $0\le x\le 1$ τότε $x-u\in\left[0,\,1\right]$ αν και μόνον αν $u\le x$, για κάθε $u\in\left[0,\,1\right]$, οπότε,

$$\left(f*f\right)\left(x\right)=\int_{0}^{x} 1du=x.$$

$\left(iii\right)$ Αν $1<x\le 2$, τότε $x-u\in\left[0,\,1\right]$ αν και μόνον αν $x-1\le u$, για κάθε $u\in\left[0,\,1\right]$, οπότε,

$$\left(f*f\right)\left(x\right)=\int_{x-1}^{1} 1du=2-x.$$

2. Αν $f=\mu_{[-\alpha,\,\alpha]}$, όπου $\alpha>0$, να δειχθεί ότι

$$f(x)*\sin x=2\sin\alpha\sin x.$$

Λύση

Είναι,

$$f(x)*\sin x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin(x-u)\,du$$

$$=\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin(x-u)\,du$$

$$=\left[\cos(x-u)\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$=\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha)$$

$$=\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha-(\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha)$$

$$=2\sin\alpha\sin x.$$

3. Αν $f(x)=E(\alpha x)$ και $g(x)=E(\beta x)$ όπου $\alpha\neq\beta$, $\alpha,\beta>0$ και

$$E(x)=\begin{cases} e^{-x} & ,\ \text{αν}\ x\geq 0 \\ 0 & ,\ \text{αν}\ x<0 \end{cases}$$

να δειχθεί ότι

$$(f*g)(x)=\frac{f(x)-g(x)}{\beta-\alpha}.$$

Λύση.

Είναι $(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(x-u)du$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $x<0$ τότε $u<0$ ή $x-u<0$ οπότε $f(u)g(x-u)=0$ και επομένως

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(x-u)du=0=\frac{f(x)-g(x)}{\beta-\alpha}.$$

Από την άλλη, αν $x\geq 0$ είναι,

$$\begin{aligned}(f*g)(x)&=\int_{-\infty}^{0}f(u)g(x-u)du+\int_{0}^{x}f(u)g(x-u)du+\int_{x}^{+\infty}f(u)g(x-u)du\\
&=\int_{-\infty}^{0}0\cdot g(x-u)\,du+\int_{0}^{x}e^{-\alpha u}e^{-\beta(x-u)}du+\int_{x}^{+\infty}f(u)\cdot 0\,du\\
&=\int_{0}^{x}e^{-\alpha u}e^{-\beta(x-u)}du=e^{-\beta x}\int_{0}^{x}e^{-(\alpha-\beta)u}du\\
&=e^{-\beta x}\frac{1}{\beta-\alpha}\left[e^{(\beta-\alpha)u}\right]_{0}^{x}=\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{\beta-\alpha}=\frac{f(x)-g(x)}{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

Παρατήρηση. Η συνέλιξη δύο συναρτήσεων μπορεί να μην ορίζεται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, καθώς το γενικευμένο ολοκλήρωμα που την ορίζει είναι δυνατόν να μην υπάρχει. Αποδεικνύεται ότι αν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες, τότε η συνέλιξή τους ορίζεται σχεδόν παντού[11] και είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Στην επόμενη πρόταση δίνεται μια ικανή συνθήκη για να ορίζεται η συνέλιξη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Πρόταση 12.1

Αν μία από τις συναρτήσεις $f, g / R$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και η άλλη φραγμένη, τότε η συνέλιξή τους ορίζεται για κάθε $x \in R$ και:

(i) Η συνάρτηση $f * g$ είναι φραγμένη.

(ii) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς, τότε η συνάρτηση $f * g$ είναι επίσης συνεχής.

(iii) Αν και οι δύο συναρτήσεις f, g είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες, τότε η συνάρτηση $f * g$ είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη.

---

[11] Δηλαδή, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

Ιδιότητες της συνέλιξης

$(\mathbf{i})\quad \mathbf{f} * \mathbf{g} = \mathbf{g} * \mathbf{f}$

$(\mathbf{ii})\quad \mathbf{f} * (\mathbf{g} * \mathbf{h}) = (\mathbf{f} * \mathbf{g}) * \mathbf{h}$

$(\mathbf{iii})\quad \mathbf{f} * (\mathbf{g} + \mathbf{h}) = (\mathbf{f} * \mathbf{g}) + (\mathbf{f} * \mathbf{h})$

Για τον μετασχηματισμό Fourier της συνέλιξης ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 12.2

Για δύο απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, g / R ισχύει ότι:

$$\mathcal{F}\left[(\mathbf{f} * \mathbf{g})(\mathbf{x})\right] = \mathcal{F}\left[\mathbf{f}(\mathbf{x})\right] \cdot \mathcal{F}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\right].$$

Ο τύπος της προηγούμενης πρότασης γράφεται ισοδύναμα, με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, στη μορφή

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{t}) \cdot \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{t})\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{t})\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{t})\right].$$

ΑΣΚΗΣΗ 51

Να αποδειχθεί η πρόταση 12.2

ΛΥΣΗ

Είναι,

$$\mathcal{F}[(f*g)(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)e^{-itx}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du\right]e^{-itx}dx \qquad (1)$$

Επειδή,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(u)g(x-u)e^{-itx}\right|dx\right]du = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(u)\right|\left|g(x-u)\right|dx\right]du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g(x-u)\right|dx\right]\left|f(u)\right|du$$

$$\overset{v=x-u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|g(v)|\,dv\right]|f(u)|\,du$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(u)\right|du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g(u)\right|du\right)$$

και τα γενικευμένα ολοκληρώματα του τελευταίου γινομένου υπάρχουν, θα υπάρχει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(u)g(x-u)e^{-itx}\right|dx\right]du$$

Τότε όμως σύμφωνα με το Θεώρημα του Fubini προκύπτει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(x-u)du\right]e^{-itx}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(x-u)e^{-itx}dx\right]du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u)e^{-itx}dx\right]f(u)du$$

$$\overset{v=x-u}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(v)e^{-it(u+v)}dv\right]f(u)du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(v)e^{-itv}dv\right]f(u)e^{-itu}du$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-itu}du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(v)e^{-itv}dv\right)$$

$$=\hat{f}(t)\hat{g}(t) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}[(f*g)(x)]=\hat{f}(t)\hat{g}(t).$$

ΑΣΚΗΣΗ 53

(i) Να δειχθεί ότι αν οι $f, g / \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και απόλυτα ολοκληρώσιμες, με $\hat{f} = \hat{g}$, τότε $f = g$.

(ii) Να δειχθεί ότι αν $f_\alpha / \mathbb{R}$, με $f_\alpha(x) = \dfrac{2\alpha}{4\pi^2 x^2 + \alpha^2}$, τότε $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

ΛΥΣΗ

(i) Αφού οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς και απόλυτα ολοκληρώσιμες έπεται ότι και η συνάρτηση $f - g$ θα είναι συνεχής και απόλυτα ολοκληρώσιμη. Επίσης, προφανώς η συνάρτηση $\mathcal{F}[(f-g)(x)] = \hat{f}(t) - \hat{g}(t) = 0$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, οπότε ισχύει ο τύπος αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier για την $f - g$, δηλαδή

$$(f-g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[(f-g)(x)] e^{itx} dt = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα, $f = g$.

(ii) Προφανώς η συνάρτηση f_α είναι συνεχής. Θα δειχθεί ότι είναι φραγμένη και απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Πράγματι, $f_\alpha(x) = \dfrac{2\alpha}{4\pi^2 x^2 + \alpha^2} \le \dfrac{2}{\alpha}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{2\alpha}{4\pi^2 x^2+\alpha^2}dx = \frac{4}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2\pi}{\alpha}x\right)^2}dx$$

$$\overset{u=\frac{2\pi}{\alpha}x}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\pi}[\mathrm{arctg} u]_0^{+\infty} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=1$$

Κατόπιν τούτων, η συνάρτηση $f_\alpha * f_\beta$ είναι συνεχής και απόλυτα ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, είναι

$$\mathcal{F}[f_\alpha(x)] = \frac{2\alpha}{4\pi^2}\mathcal{F}\left[\left(x^2+\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\right)^{-1}\right]$$

$$= \frac{2\alpha}{4\pi^2}\frac{\pi}{\frac{\alpha}{2\pi}}e^{-\frac{\alpha}{2\pi}|t|} = e^{-\frac{\alpha}{2\pi}|t|}$$

Κατόπιν τούτων ισχύει ότι

$$\mathcal{F}[(f_\alpha * f_\beta)(x)] = \mathcal{F}[f_\alpha(x)]\mathcal{F}[f_\beta(x)]$$

$$= e^{-\frac{\alpha}{2\pi}|t|}e^{-\frac{\beta}{2\pi}|t|} = e^{-\frac{\alpha+\beta}{2\pi}|t|}$$

$$= \mathcal{F}[f_{\alpha+\beta}(x)].$$

Άρα από το (i) προκύπτει ότι $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

Εφαρμογές

1. Να λυθεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier η διαφορική εξίσωση

$$-y''(x)+\alpha^2 y(x)=f(x)$$

όταν οι συναρτήσεις y, y′ μηδενίζονται στο $\pm\infty$ και

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\beta x} & , \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } x < 0 \end{cases} \quad \text{με } \alpha, \beta > 0 \text{ και } \alpha \neq \beta.$$

Λύση

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier και των δύο μελών της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης, προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$-\mathcal{F}\left[y''(x)\right]+\alpha^2\mathcal{F}\left[y(x)\right]=\mathcal{F}\left[f(x)\right]$$

$$-(it)^2\,\hat{y}(t)+\alpha^2\hat{y}(t)=\hat{f}(t)$$

$$\hat{y}(t)=\hat{f}(t)\frac{1}{t^2+\alpha^2}.$$

Κατόπιν τούτου προκύπτει ότι

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(t)\frac{1}{t^2+\alpha^2}\right]$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(t)\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{t^2+\alpha^2}\right]$$

$$= f(x) * \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x|}$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-\alpha|x-u|}du$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta u}e^{-\alpha|x-u|}du$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $x < 0$ τότε είναι:

$$y(x) = \frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta u}e^{-\alpha(u-x)}du$$

$$= \frac{e^{\alpha x}}{2\alpha}\int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)u}du$$

$$= \frac{e^{\alpha x}}{2\alpha(\alpha+\beta)}.$$

(ii) Αν $x \geq 0$ τότε είναι

$$y(x)=\frac{1}{2\alpha}\left[\int_0^x e^{-\beta u}e^{-\alpha(x-u)}du+\int_x^{+\infty}e^{-\beta u}e^{-\alpha(u-x)}du\right]$$

$$=\frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha}\int_0^x e^{(\alpha-\beta)u}du+\frac{e^{\alpha x}}{2\alpha}\int_x^{+\infty}e^{-(\alpha+\beta)u}du$$

$$=\frac{e^{-\alpha x}\left(e^{(\alpha-\beta)x}-1\right)}{2\alpha(\alpha-\beta)}+\frac{e^{\alpha x}e^{-(\alpha+\beta)x}}{2\alpha(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{e^{-\beta x}}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha(\alpha-\beta)}.$$

Άρα, η λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\alpha x}}{2\alpha(\alpha+\beta)} & ,\ \text{αν } x<0\\[2ex] \dfrac{e^{-\beta x}}{\alpha^2-\beta^2}-\dfrac{e^{-\alpha x}}{2\alpha(\alpha-\beta)} & ,\ \text{αν } x\geq 0.\end{cases}$$

2. Να λυθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x-u)\,y(u)\,du = \frac{1}{x^2+\alpha^2}$$

όπου $\alpha > 0$.

Λύση

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier και των δύο μελών της δοσμένης εξίσωσης προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$y(x) * y(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}$$

$$\mathcal{F}\left[y(x) * y(x)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+\alpha^2}\right]$$

$$\hat{y}(t)\,\hat{y}(t) = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

$$\hat{y}^2(t) = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|t|}.$$

Επειδή η συνάρτηση $\hat{y}(t)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται για κάποιο $t \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι

$$\hat{y}(t)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\alpha}{2}|t|}, \text{ ή } \hat{y}(t)=-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\alpha}{2}|t|} .$$

Άρα,

$$y(x)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{\alpha}{2}|t|}\right], \text{ ή } y(x)=-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{\alpha}{2}|t|}\right]$$

$$y(x)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}, \text{ ή } y(x)=-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$y(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{2}{4x^2+\alpha^2}, \text{ ή } y(x)=-\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{2}{4x^2+\alpha^2} .$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

Περιεχόμενα διάλεξης:

Τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί Fourier

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER

Αν για μια συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx dx$$

συγκλίνει για $t \in [0,+\infty)$, τότε αυτό ορίζει μια συνάρτηση $\hat{f}_s(t)$, η οποία ονομάζεται **ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier της $\mathbf{f/[0,+\infty)}$** και σημειώνεται με $\mathcal{F}_s[\mathbf{f(x)}]$, δηλαδή

$$\mathcal{F}_\mathbf{s}\left[\mathbf{f(x)}\right] = \mathbf{\hat{f}_s(t)} = \int_\mathbf{0}^{+\infty} \mathbf{f(x)\sin txdt}$$

Ανάλογα ορίζεται ο **συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier της $\mathbf{f/[0,+\infty)}$:**

$$\mathcal{F}_\mathbf{c}\left[\mathbf{f(x)}\right] = \mathbf{\hat{f}_c(t)} = \int_\mathbf{0}^{+\infty} \mathbf{f(x)\cos txdt}.$$

Οι μετασχηματισμοί $\hat{f}_s, \hat{f}_c$ ονομάζονται **τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί Fourier** για τη συνάρτηση $f(x)$.

Μια ικανή συνθήκη για να ορίζονται οι τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί Fourier σε όλο το $\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Παραδείγματα

1. Για τη συνάρτηση $f(x)=e^{-\alpha x} / [0,+\infty)$, όπου $\alpha>0$, είναι

$$\hat{f}_s(t)=\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin tx dx = \frac{t}{t^2+\alpha^2},$$

δίνοντας τελικά $\mathcal{F}_s\left[e^{-\alpha x}\right]=\frac{t}{t^2+\alpha^2}$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\mathcal{F}_c\left[e^{-\alpha x}\right]=\frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}$.

2. Για τη συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha-1} / (0,+\infty)$. $0<\alpha<1$, είναι

$$\hat{f}_s(t)=\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\sin tx dx \overset{y=tx}{=} t^{-\alpha}\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\sin y dy,$$

δίνοντας τελικά, για κάθε $t>0$ ότι $\mathcal{F}_s\left[x^{\alpha-1}\right]=t^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\mathcal{F}_c\left[x^{\alpha-1}\right]=t^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}$.

3. Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{-\alpha x}}{x} / (0,+\infty)$, $\alpha>0$, είναι

$$\hat{f}_s(t)=\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin tx dx$$

δίνοντας τελικά[12] για κάθε $t>0$ ότι $\mathcal{F}_s\left[\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right]=\mathrm{arctg}\frac{t}{\alpha}$.

---

[12] Βλ. Κεφ 9, λυμένη άσκηση 22.

Σχέση του μετασχηματισμού Fourier με τους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς Fourier

Για κάθε συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\hat{f}(t)=\begin{cases}\hat{g}_c(t)+i\hat{h}_s(t) & , \text{αν } t\geq 0\\ \hat{g}_c(-t)-i\hat{h}_s(-t) & , \text{αν } t<0\end{cases}$$

όπου $g(x)=f(-x)+f(x)$ και $h(x)=f(-x)-f(x)$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Ειδικά αν η συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ είναι άρτια, τότε $h(x)=0$ και $g(x)=2f(x)$, οπότε είναι

$$\hat{f}(t)=2\hat{f}_c(|t|)$$

ενώ αν . είναι περιττή, τότε $h(x)=-2f(x)$ και $g(x)=0$, οπότε είναι

$$\hat{f}(t)=\begin{cases}-2i\hat{f}_s(t) & , \text{αν } t\geq 0\\ 2i\hat{f}_s(-t) & , \text{αν } t<0.\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 57

Για κάθε συνάρτηση $f/\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$\hat{f}(t)=\begin{cases}\hat{g}_c(t)+ih_s(t) & ,\ \text{αν } t\geq 0\\ \hat{g}_c(-t)-ih_s(-t), & \text{αν } t<0\end{cases}$$

όπου $g(x)=f(-x)+f(x)$ και $h(x)=f(-x)-f(x)$, για κάθε $x\geq 0$.

ΛΥΣΗ

Είναι,

$$\hat{f}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-itx}dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)e^{-itx}dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)e^{-itx}dx$$

$$\overset{v=-x}{=}-\int_{+\infty}^{0}f(-v)e^{itv}dv+\int_{0}^{+\infty}f(x)e^{-itx}dx=\int_{0}^{+\infty}f(-x)e^{itx}dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)e^{-itx}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}f(-x)(\cos tx+i\sin tx)dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)(\cos tx-i\sin tx)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}(f(-x)+f(x))\cos tx\,dx+i\int_{0}^{+\infty}(f(-x)-f(x))\sin tx\,dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}g(x)\cos tx\,dx+i\int_{0}^{+\infty}h(x)\sin tx\,dx$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Αν $t\geq 0$, τότε $\hat{f}(t)=\hat{g}_c(t)+i\hat{h}_s(t)$

ii) Αν $t<0$, τότε

$$\hat{f}(t)=\int_{0}^{+\infty}g(x)\cos(-tx)dx-i\int_{0}^{+\infty}h(x)\sin(-tx)dx=\hat{g}_c(-t)-i\hat{h}_s(-t)$$

Παραδείγματα

1. Επειδή οι συναρτήσεις $f_1(x) = e^{-\alpha x^2} / \mathbb{R}$ και $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2 + \alpha^2} / \mathbb{R}$, όπου $\alpha > 0$, είναι άρτιες προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}_c\left[e^{-\alpha x^2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-\alpha x^2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

και

$$\mathcal{F}_c\left[\frac{1}{x^2 + \alpha^2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + \alpha^2}\right] = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha t}$$

για κάθε $t \geq 0$.

2. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}$ $/\,\mathbb{R}$, όπου $\alpha>0$, είναι περιττή προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}_s\left[\frac{x}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}\right]=-\frac{1}{2i}\mathcal{F}\left[\frac{x}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}\right]$$

$$=-\frac{i}{4}\mathcal{F}\left[\frac{-2x}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}\right]$$

$$\overset{3}{=}-\frac{i}{4}\frac{it\pi}{\alpha}e^{-\alpha t}$$

$$=\frac{\pi t}{4\alpha}e^{-\alpha t}$$

για κάθε $t\geq 0$.

[13] Βλ. Διάλεξη 23, σελ. 23, 6^o παράδειγμα.

Οι ιδιότητες των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών Fourier είναι ανάλογες με αυτές του μετασχηματισμού Fourier.

Κατ' αρχήν, αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη τότε οι τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί Fourier της είναι φραγμένοι και ομοιόμορφα συνεχείς. Αν επιπλέον f είναι κατά τμήματα συνεχής τότε ισχύει ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\hat{f}_s(t)=\lim_{t\to+\infty}\hat{f}_c(t)=0.$$

Παρακάτω δίδονται οι κυριότερες ιδιότητες των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών Fourier.

Ιδιότητες των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών Fourier

1. $\mathcal{F}_j\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] = c_1 \mathcal{F}_j\left[f_1(x)\right] + c_2 \mathcal{F}_j\left[f_2(x)\right]$,

όπου $j = s$ ή c και $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

2. $\mathcal{F}_j\left[f(\alpha x)\right] = \dfrac{1}{\alpha}\hat{f}_j\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)$, όπου $j = s$ ή c και $\alpha > 0$.

3.

(i) $$\mathcal{F}_s\left[\cos\alpha x f(x)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}_s(t+\alpha) + \hat{f}_s(t-\alpha)\right], & \text{αν } t \geq \alpha \\ \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}_s(t+\alpha) - \hat{f}_s(\alpha - t)\right], & \text{αν } t < \alpha \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{F}_s\left[\sin\alpha x f(x)\right] = \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}_c(|t-\alpha|) - \hat{f}_c(t+\alpha)\right]$

(iii) $\mathcal{F}_c\left[\cos\alpha x f(x)\right] = \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}_c(|t-\alpha|) + \hat{f}_c(t+\alpha)\right]$

(iv)

$$\mathcal{F}_c\left[\sin\alpha x f(x)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}_s(t+\alpha) - \hat{f}_s(t-\alpha)\right], & \text{αν } t \geq \alpha \\ \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}_s(t+\alpha) + \hat{f}_s(\alpha - t)\right], & \text{αν } t < \alpha \end{cases}$$

όπου $\alpha > 0$.

4. $\mathcal{F}_s\left[f'(x)\right] = -t\mathcal{F}_c\left[f(x)\right]$ και
$\mathcal{F}_c\left[f'(x)\right] = t\mathcal{F}_s\left[f(x)\right] - f(0)$

όπου η συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ έχει παράγωγο συνεχή και μηδενίζεται στο $+\infty$.

5. $\mathcal{F}_s\left[xf(x)\right] = -\hat{f}_c'(t)$ και $\mathcal{F}_c\left[xf(x)\right] = \hat{f}_s'(t)$

όπου η συνάρτηση $f/[0,+\infty)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και η συνάρτηση $xf(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

ΑΣΚΗΣΗ 59

Αν $f/[0,+\infty)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο, η οποία μηδενίζεται στο $+\infty$, να δειχθεί ότι

$$\mathcal{F}_c\left[f'(x)\right] = t\mathcal{F}_s\left[f(x)\right] - f(0)$$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\left[f'(x)\right] &= \int_0^{+\infty} f'(x)\cos tx\ dx \\
&= \left[f(x)\cos tx\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x)(\cos tx)'\ dx \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cos tx\right) - f(0) + t\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx\ dx \\
&= t\mathcal{F}_s\left[f(x)\right] - f(0)
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 62

Αν $f/[0,+\infty)$ είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για την οποία η συνάρτηση $xf(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, να δειχθεί ότι

$$\mathcal{F}_c\left[xf\left(x\right)\right]=\hat{f}_s'(t)$$

ΛΥΣΗ

Για την εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης

$$\hat{f}_s(t)=\int_0^{+\infty}f(x)\sin tx\ dx$$

παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x)\sin tx\right|=\left|xf(x)\cos tx\right|\le\left|xf(x)\right|,\text{ για κάθε } x,t\in[0,+\infty)$$

και η συνάρτηση $xf(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}f(x)\sin tx\ dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Τότε όμως προκύπτει ότι η συνάρτηση $\hat{f}_s(t)$ θα είναι παραγωγίσιμη, με

$$\hat{f}_s'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}f(x)\sin tx\ dx=\int_0^{+\infty}xf(x)\cos tx\ dx=\mathcal{F}_c\left[xf\left(x\right)\right]$$

Παρατήρηση

Οι τύποι των ιδιοτήτων 4 και 5 μπορούν να γενικευθούν[14] για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών Fourier των συναρτήσεων $f^{(n)}(x)$ και $x^n f(x)$, όπου $n>1$, αντίστοιχα.

Παραδείγματα

1. Να υπολογισθεί ο συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $g(x)=(\cos\beta x+\sin\beta x)e^{-\alpha x}\,/\,[0,+\infty)$, όταν $\alpha>0$ και $\beta\in\mathbb{R}$.

Λύση

Αν τεθεί $f(x)=e^{-\alpha x}\,/\,[0,+\infty)$ τότε όπως είναι γνωστό ισχύει ότι:

$$\hat{f}_s(t)=\frac{t}{t^2+\alpha^2} \qquad \text{και} \qquad \hat{f}_c(t)=\frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}.$$

[14] Βλ. λυμένες ασκήσεις 61, 63 και άλυτη άσκηση 48.

Χρησιμοποιώντας την πρώτη και τρίτη ιδιότητα των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών Fourier προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}_c\left[g(x)\right] = \mathcal{F}_c\left[\cos\beta x e^{-\alpha x}\right] + \mathcal{F}_c\left[\sin\beta x e^{-\alpha x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{f}_c\left(\left|t-\beta\right|\right) + \hat{f}_c\left(t+\beta\right)\right]$$

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}_s\left(t+\beta\right) - \hat{f}_s\left(t-\beta\right)\right], \text{ αν } t \geq \beta \\ \dfrac{1}{2}\left[\hat{f}_s\left(t+\beta\right) + \hat{f}_s\left(\beta-t\right)\right], \text{ αν } t < \beta \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{\left(t-\beta\right)^2+\alpha^2} + \frac{\alpha}{\left(t+\beta\right)^2+\alpha^2}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{t+\beta}{\left(t+\beta\right)^2+\alpha^2} - \frac{t-\beta}{\left(t-\beta\right)^2+\alpha^2}\right]$$

$$= \frac{\left(\alpha-\beta\right)t^2 + \left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\left[\left(t-\beta\right)^2+\alpha^2\right]\left[\left(t+\beta\right)^2+\alpha^2\right]}\,.$$

2. Να υπολογισθεί ο ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $g(x) = xe^{-\alpha x} / [0, +\infty)$, όπου $\alpha > 0$.

Λύση Αρχικά παρατηρούμε ότι,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} x\left(e^{-\alpha x}\right)' dx$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[xe^{-\alpha x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}$$

Κατόπιν τούτου η συνάρτηση $g(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και εφαρμόζεται η πέμπτη ιδιότητα του τριγωνομετρικού μετασχηματισμού Fourier δίνοντας:

$$\mathcal{F}_s\left[xe^{-\alpha x}\right] = -\left(\mathcal{F}_c\left[e^{-\alpha x}\right]\right)'$$

$$= -\left(\frac{\alpha}{t^2 + \alpha^2}\right)'$$

$$= \frac{2\alpha t}{\left(t^2 + \alpha^2\right)^2}.$$

Αντιστροφή

Για την αντιστροφή των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών Fourier χρησιμοποιείται το Ολοκληρωτικό Θεώρημα Fourier για συναρτήσεις στο $(0,+\infty)$. Συγκεκριμένα αν $f/(0,+\infty)$ είναι κατά τμήματα συνεχής, απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για την οποία υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)\sin tu \sin tx \,du\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)\cos tu \cos tx \,du\,dt.$$

Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(u)\sin tu\, du\right]\sin tx\, dt,$$

δηλαδή

$$\mathbf{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}_s(t)\sin tx\,dt} \qquad \mathbf{(1)}$$

και ανάλογα

$$\mathbf{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}_c(t)\cos tx\,dt} \qquad \mathbf{(2)}$$

Οι τύποι (1) και (2) δίνουν εκφράσεις της συνεχούς συνάρτησης $f/(0,+\infty)$ συναρτήσει των $\hat{f}_s$ και $\hat{f}_c$ αντίστοιχα.

Για το λόγο αυτό, η συνάρτηση f ονομάζεται **αντίστροφος ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier** της $\hat{f}_s(t)$ και **αντίστροφος συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier** της $\hat{f}_c(t)$ και σημειώνεται με

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_{\mathbf{s}}^{-1}\left[\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}(\mathbf{t})\right] \text{ και } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_{\mathbf{c}}^{-1}\left[\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{c}}(\mathbf{t})\right].$$

Κατόπιν τούτων, ορίζονται οι **αντίστροφοι τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί Fourier** $\mathcal{F}_s^{-1}$ και $\mathcal{F}_c^{-1}$, οι οποίοι αντιστοιχίζουν συναρτήσεις $\hat{f}_s(t)$ και $\hat{f}_c(t)$ σε συναρτήσεις $f(x)$, σύμφωνα με τους τύπους (1) και (2).

Παραδείγματα

1. Για τη συνάρτηση $g(t) = \dfrac{e^{-\alpha t}}{t} / (0, +\infty)$, $\alpha > 0$, είναι

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left[\frac{e^{-\alpha t}}{t}\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha t}}{t}\sin tx\,dt = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

2. Για τη συνάρτηση $g(t) = \dfrac{\sin\alpha t}{t} / (0, +\infty)$, $\alpha > 0$, είναι

$$\mathcal{F}_c^{-1}\left[\frac{\sin\alpha t}{t}\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}\cos tx\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha + x)t + \sin(\alpha - x)t}{t}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha + x)t}{t}dt + \int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha - x)t}{t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{αν } x < \alpha \\ 0, & \text{αν } x = \alpha \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{αν } x > \alpha \end{cases}\right] = \begin{cases} 1, & \text{αν } x < \alpha \\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } x = \alpha \\ 0, & \text{αν } x > \alpha. \end{cases}$$

Ταυτότητες

Ανάλογες ταυτότητες με αυτές του μετασχηματισμού Fourier ισχύουν και για τους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς Fourier. Συγκεκριμένα για $j = s$ ή c ισχύουν:

1. $\int_0^{+\infty} f(x)\hat{g}_j(x)dx = \int_0^{+\infty} \hat{f}_j(x)g(x)dx$,

Για $f, g / [0, +\infty)$ απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

2. $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}_j(x)\hat{g}_j(x)dx$,

για κάθε απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f / [0, +\infty)$ και για κάθε κατά τμήματα συνεχή, απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g / [0, +\infty)$ για την οποία υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και η συνάρτηση $\hat{g}_j / [0, +\infty)$ είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη.

3. $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}_j^2(x)dx$

για κάθε κατά τμήματα συνεχή, απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f / [0, +\infty)$ για την οποία υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και η συνάρτηση $\hat{f}_j / [0, +\infty)$ είναι επίσης απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Η τελευταία από τις παραπάνω ταυτότητες είναι η **ταυτότητα του Parseval** για τους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς Fourier.

Εφαρμογή

1. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+\alpha^2\right)\left(x^2+\beta^2\right)} dx = \frac{\pi}{2\alpha\beta\left(\alpha+\beta\right)}$$

όπου $\alpha, \beta > 0$.

Λύση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g / \left[0, +\infty\right)$ με $f\left(x\right) = e^{-\alpha x}$ και $g\left(x\right) = e^{-\beta x}$, για τις οποίες ισχύει ότι

$$\mathcal{F}_c\left[e^{-\alpha x}\right] = \frac{\alpha}{t^2+\alpha^2} \text{ και } \mathcal{F}_c\left[e^{-\beta x}\right] = \frac{\beta}{t^2+\beta^2}.$$

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη ταυτότητα για $j = c$ προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} e^{-\beta x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} \frac{\beta}{x^2+\beta^2} dx.$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+\alpha\right)\left(x^2+\beta\right)} dx = \frac{\pi}{2\alpha\beta} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\alpha+\beta\right)x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha\beta\left(\alpha+\beta\right)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 67

(i) Να ευρεθεί ο συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x) = xe^{-\alpha x} \,/\, [0, +\infty)$, $\alpha > 0$.

(ii) Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)^3} dx$$

ΛΥΣΗ

(i) Επειδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη[15], εφαρμόζοντας την πέμπτη ιδιότητα του τριγωνομετρικού μετασχηματισμού Fourier, προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}_c\left[xe^{-\alpha x}\right] = \left(\mathcal{F}_s\left[e^{-\alpha x}\right]\right)'$$

$$= \left(\frac{t}{t^2 + \alpha^2}\right)'$$

$$= \frac{\alpha^2 - t^2}{\left(t^2 + \alpha^2\right)^2}.$$

[15] Βλ. σελ. 17

(ii) Εφαρμόζοντας τη δεύτερη ταυτότητα των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών Fourier, για τις συναρτήσεις $f, g / [0,+\infty)$ με $f(x) = xe^{-\alpha x}$ και $g(x) = e^{-\alpha x}$, προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x} e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_c\left[xe^{-\alpha x}\right]\mathcal{F}_c\left[e^{-\alpha x}\right]dx$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2\alpha x} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}dx\,.$$

Οπότε,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{\left(x^2+\alpha^2\right)^3}dx = \frac{\pi}{2\alpha}\int_0^{+\infty} x\left(\frac{e^{-2\alpha x}}{-2\alpha}\right)' dx$$

$$= -\frac{\pi}{4\alpha^2}\left[xe^{-2\alpha x}\right]_0^{+\infty} + \frac{\pi}{4\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha x}dx$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4\alpha^2}\cdot\frac{1}{2\alpha}$$

$$= \frac{\pi}{8\alpha^3} \qquad (1)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval για τη συνάρτηση g προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}\right)^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\mathcal{F}_c\left[e^{-\alpha x}\right]\right)^2 dx$$

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\right)^2 dx$$

Οπότε

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{4\alpha^3} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(x^2+\alpha^2\right)^3}dx = \frac{1}{2\alpha^2}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2-x^2+\alpha^2+x^2}{\left(x^2+\alpha^2\right)^3}dx$$

$$=\frac{1}{2\alpha^2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2-x^2}{\left(x^2+\alpha^2\right)^3}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{\pi}{8\alpha^3}+\frac{\pi}{4\alpha^3}\right]$$

$$=\frac{3\pi}{16\alpha^3}$$