ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

ΚΕΦ.9: Γενικευμένο Ολοκλήρωμα
Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται **τοπικά ολοκληρώσιμη** αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα που είναι υποσύνολο του A.
Όταν το A δεν είναι φραγμένο, τότε ορίζεται, ως ένα όριο, το γενικευμένο ολοκλήρωμα πρώτου είδους της f στις τρεις ακόλουθες περιπτώσεις, ανάλογα με τη μορφή του A:

i) Αν $A = [a, +\infty)$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε ορίζεται η συνάρτηση F/A με

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

(διότι η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη) και το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο A

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

.

ii) Αν $A = (-\infty, a]$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε ορίζεται η συνάρτηση F/A με

$$F(x) = \int_x^a f(t)dt$$

(διότι η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη) και το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο A

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt := \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} F(x).$$

.

iii) Αν $A = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο A ορίζεται ως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt := \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Σε κάθε μία από τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις, το γενικευμένο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους λέμε ότι συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχουν τα όρια του δεύτερου μέλους στο $\mathbb{R}$.

Το δεύτερο είδος προκύπτει όταν το A είναι φραγμένο, αλλά η f δεν είναι φραγμένη σε κάποιο από τα άκρα του. Τότε, διακρίνουμε επίσης τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με τη μορφή του A:

i) Αν $A = [a, b)$ και $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, τότε ορίζεται η F/A, με

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

(διότι η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη) και το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο A

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to b^-} F(x).$$

.

ii) Αν $A = (a, b]$ και $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ τότε ορίζεται η F/A, με

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt$$

(διότι η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη) και το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο A

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} F(x).$$

iii) Αν $A = (a, b)$ και $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, τότε ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο A ως

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt, \qquad c \in (a, b).$$

Σε κάθε μία από τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις, το γενικευμένο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους λέμε ότι συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχουν τα όρια του δεύτερου μέλους στο $\mathbb{R}$.

Η περίπτωση αυτή αποτελεί συνδυασμό των δύο προηγούμενων. Ένα ολοκλήρωμα τρίτου είδους μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων εκ των οποίων το ένα είναι πρώτου είδους και το άλλο δεύτερου είδους.

Για παράδειγμα,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Βασικά γενικευμένα ολοκληρώματα

- Εκθετικό ολοκλήρωμα (πρώτου είδους): $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-st}\,dt$.

  Συγκλίνει αν και μόνο αν $s > 0$.
- p-ολοκλήρωμα (πρώτου είδους): $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$.

  Συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.
- p-ολοκλήρωμα (δεύτερου είδους):

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx.$$

  Συγκλίνουν αν και μόνο αν $p < 1$.

Ιδιότητες

- $k\int_a^{+\infty} f(x)dx + \lambda\int_a^{+\infty} g(x)dx = \int_a^{+\infty}(kf(x)+\lambda g(x))dx$
- $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$

Σύγκριση γενικευμένων ολοκληρωμάτων (μη αρνητικών συναρτήσεων)

Κριτήριο Σύγκρισης I

- Αν $0 \leq f(x) \leq g(x)$ και $\int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$.
- Αν $0 \leq g(x) \leq f(x)$ και $\int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

Εφαρμογές: Λυμένη άσκηση 10.

Σύγκριση γενικευμένων ολοκληρωμάτων (μη αρνητικών συναρτήσεων)

Κριτήριο Σύγκρισης II

Αν $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ και $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε

- Αν $\ell \in \mathbb{R}^*$, τότε τα ολοκληρώματα είναι της ίδιας φύσης.
- Αν $\ell = 0$, τότε

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty.$$

- Αν $\ell = +\infty$, τότε

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty.$$

Εφαρμογές: Λυμένη άσκηση 12.

- **Απόλυτη σύγκλιση**: Αν το $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει (απολύτως), και ισχύει ότι

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

- **Κριτήριο ριζών**: Έστω $\lim_{x\to+\infty} |f(x)|^{1/x} = \ell$ και $a > 0$.
  - Αν $\ell < 1$, τότε το $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ συγκλίνει.
  - Αν $\ell > 1$, τότε το $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ αποκλίνει.

Εφαρμογές: Λυμένη άσκηση 14.

- **Κριτήριο Dedekind:** Έστω $f/[a,+\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $g/[a,+\infty)$ συνεχής. Αν το $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f'(x)|dx$ συγκλίνει και ισχύει ένα από τα παρακάτω:
  - (*i*) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ και $G(x)=\displaystyle\int_a^x g(x)dx/[a,+\infty)$ φραγμένη,
  - (*ii*) το $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνει,

  τότε, το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ συγκλίνει.

Παρατήρηση

Αρκεί η f να είναι μονότονη και φραγμένη, οπότε αποδεικνύεται (βλ. λυμένη άσκηση 15) ότι το $\int_a^{+\infty}|f'(x)|dx$ συγκλίνει.

Εφαρμογές: Λυμένες ασκήσεις 17, 18.

Ορισμός (Ομοιόμορφη σύγκλιση)

Αν $f/[a,+\infty) \times T$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_a^{+\infty} f(x,t)dx$$

συγκλίνει για κάθε $t \in T$, τότε λέμε ότι το I ***συγκλίνει ομοιόμορφα στο*** *T, αν*
για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $b_0 \geq a$ τέτοιος ώστε,

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x,t)dx \right| < \varepsilon,$$

για κάθε $b > b_0$ και $t \in T$. (Δηλαδή, η επιλογή του b_0 εξαρτάται μόνο από το ε και όχι από το t.)

Πρόταση (Κριτήριο Weierstrass)

Αν $f/[a, +\infty) \times T$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, τοπικά ολοκληρώσιμη ως προς x, για κάθε $t \in T$, και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$ συγκλίνει, για κάθε $t \in T$, και $g/[a, +\infty)$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση, τέτοια ώστε

- *το $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνει,*
- *υπάρχει $b_0 \geq a$, ώστε $|f(x, t)| \leq g(x)$, για κάθε $t \in T$ και $x \geq b_0$,*

τότε το I συγκλίνει ομοιόμορφα στο T.

Γενικευμένο ολοκλήρωμα με παράμετρο t

Πρόταση (6.1)

Έστω $f/[a,+\infty)\times T$ συνεχής, όπου $T^o \neq \varnothing$. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$ συγκλίνει για κάθε $t\in T$, τότε ορίζει τη συνάρτηση $F(t)=\int_a^{+\infty} f(x,t)dx/T$. Επιπλέον

- *Αν το $\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο T, τότε η $F(t)$ είναι συνεχής στο T^o και*

$$\int_p^q F(t)dt = \int_a^{+\infty}\left(\int_p^q f(x,t)dt\right)dx, \quad [p,q]\subseteq T.$$

- *Αν $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ συνεχής και το $\int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο T, τότε*

$$\frac{d}{dt}F(t) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx, \quad t\in T^o.$$

Εφαρμογές: Λυμένες ασκήσεις 22, 23.

Συνάρτηση γάμμα

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ *συγκλίνει για κάθε* $x > 0$ *και ονομάζεται* ***συνάρτηση γάμμα****.*

Ιδιότητες της συνάρτησης γάμμα:

- $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt$
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (οπότε $\Gamma(n+1) = n!$, για $n \in \mathbb{N}$)
- $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$ (και $\Gamma(n+1/2) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$)
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, για $x > 0$, $x \notin \mathbb{N}$

Η συνάρτηση γάμμα επεκτείνεται και σε αρνητικές τιμές, με τη βοήθεια του τύπου $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$.

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ *συγκλίνει για κάθε* $m, n > 0$ *και ονομάζεται* ***συνάρτηση βήτα***.

Ιδιότητες της συνάρτησης βήτα:

- $B(m,n) = B(n,m)$
- $B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta$
- $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Εφαρμογές: Λυμένες ασκήσεις 31, 33, 34, 38, 39.

Άσκηση (βλ. λυμένη άσκηση 1)

Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 3}.$$

Λύση

Θέτοντας $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} / [4, +\infty)$, έχουμε, για $x \geq 4$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} > 0, \text{ και}$$

$$I_1 = \int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = [\ln(x-3) - \ln(x-2)]_4^{+\infty}$$

$$= \left[\ln \frac{x-3}{x-2} \right]_4^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x-3}{x-2} - \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

Λύση (συνέχεια)

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, επειδή

$$x^2+3x+3 = x^2+2x\frac{3}{2}+3 = x^2+2x\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+3 = (x+3/2)^2+3/4,$$

Θέτοντας $x+3/2 = y\sqrt{3/4}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+3/2)^2+3/4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3/4}dy}{(3/4)y^2+3/4} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\operatorname{arctg} y]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y - \lim_{y\to-\infty} \operatorname{arctg} y \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Άσκηση (βλ. λυμένη άσκηση 5)

Να υπολογισθούν οι τιμές των $\lambda, \mu > 0$, ώστε

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+\mu x} - \frac{\lambda}{2x+1} \right) dx = 0.$$

Λύση

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1+\mu t} - \frac{\lambda}{2t+1} \right) dt = \left[\frac{\ln(1+\mu t)}{\mu} - \frac{\lambda \ln(2t+1)}{2} \right]_0^x$$

$$= \frac{\ln(1+\mu x)}{\mu} - \frac{\lambda \ln(2x+1)}{2} = \ln \frac{(1+\mu x)^{1/\mu}}{(2x+1)^{\lambda/2}}, \text{ οπότε}$$

$$I = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \begin{cases} +\infty, & 1/\mu > \lambda/2, \\ -\infty, & 1/\mu < \lambda/2, \\ \dfrac{1}{\mu} \ln \dfrac{\mu}{2}, & 1/\mu = \lambda/2. \end{cases}$$

Επομένως, είναι $I = 0$ αν και μόνο αν $\mu = 2$ και $\lambda = 1$.

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 10)

Να δειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x} dx$, $a > 0$, συγκλίνει.

Λύση

Με παραγοντική ολοκλήρωση, προκύπτει ότι

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{a} \right)' \frac{1}{x} dx = \left[\frac{\sin ax}{xa} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{a} \frac{1}{x^2} dx$$
$$= -\frac{\sin a}{a} + \frac{1}{a} \int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^2} dx$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει, βάσει του κριτηρίου σύγκρισης Ι, διότι $\left| \frac{\sin ax}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ και το $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει ως p-ολοκλήρωμα με $p = 2 > 1$. Επομένως, το I συγκλίνει.

Άσκηση (βλ. λυμένη άσκηση 10)

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x+1)}{x^2+x+1}dx, \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+1}dx,$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^5+x+1}}dx, \quad I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+x+1}}dx,$$

$$I_5 = \int_0^{3} \frac{x^2+1}{(3-x)^{2/3}}dx, \quad I_6 = \int_0^{3} \frac{x^2+1}{(3-x)^{3/2}}dx.$$

Λύση

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x+1)}{x^2+x+1} dx.$$

Για $x \geq 1$, είναι

$$\left| \frac{\sin(2x+1)}{x^2+x+1} \right| = \frac{|\sin(2x+1)|}{x^2+x+1} \leq \frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{1}{x^2}$$

και το $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει ως p-ολοκλήρωμα με $p = 2 > 1$. Επομένως, το I_1 συγκλίνει (απολύτως).

Λύση (συνέχεια)

$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+1} dx.$$

Για $x \geq 2$, είναι

$$0 < \frac{e^{-x}}{x+1} \leq \frac{e^{-x}}{3}$$

και το $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-x} dx$ συγκλίνει. Επομένως, το I_2 συγκλίνει.

Λύση (συνέχεια)

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^5+x+1}}\,dx.$$

(Η διαφορά βαθμών παρονομαστή και αριθμητή είναι $5/2 - 1 = 3/2 > 1$, άρα μάλλον συγκλίνει.) Για $x \geq 1$, είναι

$$0 < \frac{2x+1}{\sqrt{x^5+x+1}} \leq \frac{2x+x}{\sqrt{x^5}} = \frac{3x}{x^{5/2}} = \frac{3}{x^{3/2}}$$

και το $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ συγκλίνει ως p-ολοκλήρωμα με $p = 3/2 > 1$.
Επομένως, το I_3 συγκλίνει.

Λύση (συνέχεια)

$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+x+1}} dx.$$

(Η διαφορά βαθμών παρονομαστή και αριθμητή είναι $4/2 - 1 = 1$, άρα μάλλον δεν συγκλίνει.) Για $x \geq 1$, είναι

$$0 < \frac{2x+1}{\sqrt{x^4+x+1}} \geq \frac{2x}{\sqrt{x^4+x^4+x^4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{x}{x^{4/2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{x}$$

και $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$. Επομένως, $I_4 = +\infty$.

Λύση (συνέχεια)

$$I_5 = \int_0^3 \frac{x^2+1}{(3-x)^{2/3}}dx.$$

(2ου είδους) Για $0 \leq x \leq 3$, είναι $0 < \dfrac{x^2+1}{(3-x)^{2/3}} \leq \dfrac{10}{(3-x)^{2/3}}$ και το $\displaystyle\int_0^3 \frac{10}{(3-x)^{2/3}}dx$ συγκλίνει, ως p-ολοκλήρωμα 2ου είδους με $p = 2/3 < 1$, άρα συγκλίνει και το I_5.

Λύση (συνέχεια)

$$I_6 = \int_0^3 \frac{x^2+1}{(3-x)^{3/2}} dx.$$

(2ου είδους) Για $0 \leq x \leq 3$, είναι $0 < \dfrac{x^2+1}{(3-x)^{3/2}} \geq \dfrac{1}{(3-x)^{3/2}}$ και $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(3-x)^{3/2}} dx = +\infty$, άρα και $I_6 = +\infty$.

Άσκηση (βλ. λυμένη άσκηση 12στ)

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$I = \int_2^3 \frac{x^2+1}{((x-2)(3-x))^{2/3}}dx.$$

Λύση

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων 2ου είδους

$$I_1 = \int_2^{2.5} \frac{x^2+1}{((x-2)(3-x))^{2/3}}dx \qquad I_2 = \int_{2.5}^3 \frac{x^2+1}{((x-2)(3-x))^{2/3}}dx,$$

δηλαδή $I = I_1 + I_2$.

Λύση (συνέχεια)

Για $2 \leq x \leq 2.5$, είναι

$$0 < \frac{x^2+1}{((x-2)(3-x))^{2/3}} \leq \frac{2.5^2+1}{(x-2)^{2/3}(0.5)^{2/3}}$$

και το $\int_2^{2.5} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$ συγκλίνει, άρα και το I_1 συγκλίνει.
Για $2.5 \leq x \leq 3$, είναι

$$0 < \frac{x^2+1}{((x-2)(3-x))^{2/3}} \leq \frac{3^2+1}{(3-x)^{2/3}(0.5)^{2/3}}$$

και το $\int_{2.5}^{3} \frac{1}{(3-x)^{2/3}} dx$ συγκλίνει, άρα και το I_2 συγκλίνει.
Κατόπιν τούτων, το I συγκλίνει.

Παρατήρηση: Εναλλακτικά, η σύγκλιση των I_1, I_2 μπορεί να προκύψει από το κριτήριο σύγκρισης II, συγκρίνοντας την $f(x) = \dfrac{x^2+1}{((x-2)(3-x))^{2/3}}$ με τις $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^{2/3}}$ και $h(x) = \dfrac{1}{(3-x)^{2/3}}$ αντίστοιχα. Πράγματι, είναι

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{(3-x)^{2/3}} = 5,$$

άρα το I_1 συγκλίνει, διότι το $\displaystyle\int_2^{2.5} g(x)dx$ συγκλίνει, και

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+1}{(x-2)^{2/3}} = 10,$$

άρα το I_2 συγκλίνει επίσης, διότι το $\displaystyle\int_{2.5}^{3} h(x)dx$ συγκλίνει.

Άσκηση (βλ. λυμένη άσκηση 12)

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+1}}{x^2+x+1}dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+1}}{(x^2+x+1)^2}dx,$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}dx, \;\; p > 0.$$

Λύση

I_1: Για $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+1}}{x^2+x+1}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x}$, είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x^2+4x+1}}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2}\frac{\sqrt{1+4/x+1/x^2}}{1+1/x+1/x^2} = 1$$

άρα το I_1 είναι της αυτής φύσης με το $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)dx$, δηλαδή $I_1 = +\infty$.

Λύση (συνέχεια)

I_2: Για $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+1}}{(x^2+x+1)^2}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$, είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\sqrt{x^2+4x+1}}{(x^2+x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4}\frac{\sqrt{1+4/x+1/x^2}}{(1+1/x+1/x^2)^2} = 1$$

άρα το I_2 είναι της αυτής φύσης με το $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)dx$, δηλαδή το I_2 συγκλίνει.

Λύση (συνέχεια)

I_3: Έστω $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^p}$. Αν $p > 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{x^q}$, όπου $1 < q < p$, οπότε είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{p-q}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^{p-q})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(p-q)x^{p-q}} = 0.$$

Επομένως, αφού το $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και το I_3.

Αν $p < 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{x^q}$, όπου $p < q < 1$, οπότε είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{p-q}} = \lim_{x\to+\infty} x^{q-p} \ln x = +\infty.$$

Επομένως, αφού $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x) = +\infty$, θα είναι και $I_3 = +\infty$.

Αν $p = 1$, τότε για $q = 1$, προκύπτει όπως πριν ότι $I_3 = +\infty$.

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 25)

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^{\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + x + 4} \right)^x .$$

Λύση

Θέτοντας $f(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + x + 4} \right)^x$, είναι

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)|^{1/x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + x + 4} = \frac{1}{2} < 1,$$

επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο ριζών, το I συγκλίνει απολύτως.

Ασκήσεις

Άσκηση (λυμένη άσκηση 19)

Έστω $g/[1,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε το $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ να συγκλίνει. Να αποδειχθεί ότι και το $I = \int_1^{+\infty} x^{1/x} g(x)dx$ συγκλίνει.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^{1/x}/[1,+\infty)$, με παράγωγο

$$f'(x) = \left(e^{(\ln x)/x}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} f(x).$$

Επομένως, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = e$, δηλαδή είναι φραγμένη, και επιπλέον είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int_e^{+\infty} |f'(x)|dx$ συγκλίνει[α΄], άρα συγκλίνει και το $\int_1^{+\infty} |f'(x)|dx$. Κατόπιν τούτου, από το κριτήριο του Dedekind έπεται ότι το I συγκλίνει.

[α΄] Βάσει της λυμένης άσκησης 15, αλλά μπορεί να αποδειχθεί και με τα κριτήρια σύγκρισης.

Άσκηση (άλυτη άσκηση 35)

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx, \qquad 0 < a < b.$$

Λύση

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι πρώτου είδους, διότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-be^{-bx} + ae^{-ax}}{1} = a - b \in \mathbb{R}.$$

Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε $f/[0, +\infty)$, με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}, & x > 0, \\ a - b, & x = 0, \end{cases}$$

οπότε f συνεχής και $I = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

Λύση (συνέχεια)

Επιπλέον, είναι

$$-\int_a^b e^{-xt}\ dt = -\left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_a^b = \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x},$$

οπότε θέτοντας

$$g(x,t) = -e^{-xt}/[0,+\infty) \times T,$$

όπου $T = [a,b]$, τότε είναι

$$f(x) = \int_a^b g(x,t)dt,$$

για κάθε $x \geq 0$.

Λύση (συνέχεια)

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} g(x,t)dx$ προφανώς συγκλίνει για κάθε $t \in T$ (ως εκθετικό ολοκλήρωμα).
Επιπλέον, βάσει του κριτηρίου Weirstrass, συγκλίνει ομοιόμορφα στο T, διότι

$$t \in T \Rightarrow |g(x,t)| \le e^{-ax}$$

και το $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ συγκλίνει (ως εκθετικό ολοκλήρωμα).
Κατόπιν τούτων, βάσει της Πρότασης 6.1, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty}\left(\int_a^b g(x,t)dt\right)dx = \int_a^b\left(\int_0^{+\infty} g(x,t)dx\right)dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{e^{-tx}}{t}\right]_0^{+\infty} dt = \int_a^b \frac{-1}{t} = -[\ln t]_a^b = \ln a - \ln b. \end{aligned}$$

Άσκηση (βλ. άλυτες ασκήσεις 38, 40)

Να υπολογισθούν με τη βοήθεια της συνάρτησης γάμμα τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-2t^2} dt, \quad I_2 = \int_0^1 (\ln(1/t))^2 dt, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2u} e^{-e^u} du.$$

Λύση

Ως γνωστό, είναι $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, για κάθε $x > 0$.

I_1: Θέτοντας $y = 2t^2$, οπότε $t = (y/2)^{1/2}$ και $dy = 4tdt$, προκύπτει ότι

$$I_1 = \int_0^{+\infty} (y/2)^{5/2} e^{-y} \frac{1}{4} dy = \frac{1}{2^{9/2}} \int_0^{+\infty} y^{5/2} e^{-y} dy = \frac{1}{2^4\sqrt{2}} \Gamma(7/2)$$

$$= \frac{1}{2^4\sqrt{2}} \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3} \sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{2^7\sqrt{2}}.$$

Λύση (συνέχεια)

I_2: Θέτοντας $y = \ln(1/t)$, οπότε $t = e^{-y}$ και $dt = -e^{-y}dy$, προκύπτει ότι

$$I_2 = \int_0^1 (\ln(1/t))^2 dt = \int_{+\infty}^0 y^2(-e^{-y})dy = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = \Gamma(3) = 2.$$

I_3: Θέτοντας $t = e^u$, οπότε $u = \ln t$ και $du = \frac{1}{t}dt$, προκύπτει ότι

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2u} e^{-e^u} du = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \frac{1}{t} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \Gamma(2) = 1.$$

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 43)

Να αποδειχθούν οι σχέσεις

$$\Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \qquad \Gamma(1/6) = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\Gamma^2(1/3).$$

Λύση

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, για $x = 1/3$, προκύπτει ότι

$$\Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = \frac{\pi}{\sin \pi/3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Λύση (συνέχεια)

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την ταυτότητα
$\Gamma(x)\Gamma(x+1/2) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$, για $x = 1/6$, προκύπτει ότι

$$\Gamma(1/6)\Gamma(2/3) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-2/3}}\Gamma(1/3).$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με $\Gamma(1/3)$ και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση, έχουμε ότι

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-2/3}}\Gamma^2(1/3) = \Gamma(1/6)\Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = \Gamma(1/6)\frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

οπότε

$$\Gamma(1/6) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-2/3}}\Gamma^2(1/3) = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\Gamma^2(1/3).$$

Άσκηση (βλ. άλυτες ασκήσεις 45, 46)

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_0^3 x^3 \sqrt{9 - x^2} dx, \qquad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx, \qquad I_3 = \int_0^{\pi} \sin^3 x dx.$$

Λύση

Ως γνωστό, είναι

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1 - x)^{n-1} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta.$$

Λύση (συνέχεια)

I_1: Θέτοντας $x^2 = 9y$, οπότε $x = 3\sqrt{y}$ και $dx = \dfrac{3}{2\sqrt{y}}dy$, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^3 x^3\sqrt{9-x^2}dx = \int_0^1 3^3 y^{3/2}(9-9y)^{1/2}\frac{3}{2\sqrt{y}}dy \\
&= \frac{3^5}{2}\int_0^1 y(1-y)^{1/2}dy = \frac{3^5}{2}B(2,3/2) = \frac{3^5\Gamma(2)\Gamma(3/2)}{2\Gamma(2+3/2)} \\
&= \frac{3^5\Gamma(2)\Gamma(3/2)}{2(1+3/2)\Gamma(1+3/2)} = \frac{3^5\Gamma(2)\Gamma(3/2)}{2(1+3/2)(3/2)\Gamma(3/2)} \\
&= \frac{3^5}{2(5/2)(3/2)} = \frac{3^4\cdot 2}{5}
\end{aligned}
$$

Λύση (συνέχεια)

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx.$$

Είναι

$$\sin^{10} x = \sin^{2m-1} x \cos^{2n-1} x \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 10, \\ 2n - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 11/2, \\ n = 1/2 \end{cases}$$

επομένως

$$I_2 = \frac{1}{2} B(11/2, 1/2) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(11/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(12/2)} = \frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{9 \cdot 7\pi}{2^9}$$

Λύση (συνέχεια)

$$I_3 = \int_0^{\pi} \sin^3 x dx.$$

Θέτοντας $x = 2\theta$, οπότε $dx = 2d\theta$, προκύπτει ότι

$$I_3 = \int_0^{\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^3(2\theta) 2d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (2\sin\theta\cos\theta)^3 d\theta$$
$$= 8B(2,2) = \frac{8\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} = \frac{8}{3!} = \frac{4}{3}.$$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 40)

$i)$ Να αποδειχθεί η σχέση

$$B(m,n) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} du, \qquad m,n > 0.$$

$ii)$ Να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^1 \frac{u^{a-1} + u^{-a}}{1+u} du = B(a, 1-a),$$

για κάθε $a \in (0,1)$.

Λύση

i) Θέτοντας $x = \dfrac{u}{1+u} = 1 - \dfrac{1}{1+u}$, οπότε

$$u + 1 = \frac{1}{1-x}, \quad u = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}, \quad du = \frac{1}{(1-x)^2} dx$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} du &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m-1}} \frac{1}{(1+u)^{n+1}} du \\
&= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1} \frac{1}{(1-x)^2} dx \\
&= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = B(m,n).
\end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

ii) Προφανώς, $I = \int_0^1 \frac{u^{a-1}+u^{-a}}{1+u}du = \int_0^1 \frac{u^{a-1}}{1+u}du + \int_0^1 \frac{u^{-a}}{1+u}du$.
Θέτοντας $u = 1/t$, το δεύτερο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^1 \frac{u^{-a}}{1+u}du = \int_{+\infty}^1 \frac{t^a}{1+1/t}\frac{-1}{t^2}dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt.$$

Επομένως,

$$I = \int_0^1 \frac{u^{a-1}}{1+u}du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{1+u}du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{1+u}du$$

Θέτοντας $m = a$ και $n = 1-a$, είναι $a \in (0,1) \Rightarrow m, n > 0$, οπότε, από το (i), έπεται ότι

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}du = B(m,n) = B(a, 1-a).$$