ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

ΚΕΦ.11: Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων
Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Ακολουθία συναρτήσεων

Έστω μια συνάρτηση δύο μεταβλητών x και n, η οποία θα συμβολίζεται με $f_n(x)$, όπου το n παίρνει τιμές στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών και το x παίρνει τιμές σε ένα υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών.
Θέτοντας $n = 0, 1, 2, \ldots$ και θεωρώντας το x ως παράμετρο, οι εκφράσεις

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$$

αποτελούν τους όρους μιας ακολουθίας η οποία συμβολίζεται με (f_n).
Οι όροι της είναι συναρτήσεις ως προς τη μεταβλητή x με κοινό πεδίο ορισμού A, για το λόγο αυτό η (f_n) ονομάζεται ακολουθία συναρτήσεων.
Το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, αν υπάρχει για κάθε $x \in A$, θα ισούται με μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το A, οπότε λέμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει προς τη συνάρτηση f και γράφουμε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \text{για κάθε } x \in A$$

Αντίστοιχα η σειρά συναρτήσεων είναι το άπειρο άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

των όρων μιας ακολουθίας συναρτήσεων (g_n) με κοινό πεδίο ορισμού A, δηλαδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

και αν υπάρχει για κάθε $x \in A$, θα ισούται με μια συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το A.

Ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός

Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με κοινό πεδίο ορισμού A συγκλίνει ομοιόμορφα στο A στη συνάρτηση f/A, αν και μόνο αν

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

Αντίστοιχα, η σειρά συναρτήσεων $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A στη συνάρτηση f, αν και μόνο αν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A στη συνάρτηση f.

Δηλαδή, η επιλογή του n_0 εξαρτάται μόνο από το ε και όχι από το $x \in A$. Πρακτικά, η ταχύτητα σύγκλισης είναι ανεξάρτητη της τιμής του x, δηλαδή η ακολουθία προσεγγίζει το ίδιο γρήγορα (δηλαδή, για το ίδιο n_0) την τιμή του ορίου της σε απόσταση μικρότερη του ε, ανεξαρτήτως της τιμής του x.

Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων

Ο έλεγχος για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων μπορεί να γίνει είτε με τη βοήθεια του ορισμού, δηλαδή αποδεικνύοντας ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 **που δεν εξαρτάται από το** x, τέτοιο ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, είτε με τη βοήθεια της επόμενης πρότασης.

Πρόταση

Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με κοινό πεδίο ορισμού A συγκλίνει ομοιόμορφα στο A στη συνάρτηση f/A, αν και μόνο αν η ακολουθία $\rho_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ είναι μηδενική.

Παρατήρηση

Όταν το A είναι κλειστό διάστημα και η συνάρτηση $|f_n(x) - f(x)|$ είναι συνεχής στο A, τότε ως γνωστό λαμβάνει μέγιστη τιμή σε αυτό, οπότε ο ρ_n ισούται με την τιμή αυτή. Αν επιπλέον είναι παραγωγίσιμη, τότε η μέγιστη τιμή της μπορεί να προσδιορισθεί με τη βοήθεια της πρώτης παραγώγου της.

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2015)

Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας (f_n) *με*

$$f_n(x) = \sqrt{n} x e^{-nx^2} / [0,1]$$

και να εξετασθεί αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Λύση.

Για $x = 0$, είναι $f_n(0) = 0$, ενώ για $0 < x \leq 1$ είναι

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{|x|\sqrt{n+1}e^{-(n+1)x^2}}{|x|\sqrt{n}e^{-nx^2}} = e^{-x^2}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \to e^{-x^2} < 1$$

άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$.
Στη συνέχεια, θα εξετασθεί αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, με τη βοήθεια της ακολουθίας $\rho_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$, όπου $f(x) = 0$.

Λύση (συνέχεια).

Η $f_n(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με παράγωγο

$$f_n'(x) = \sqrt{n}e^{-nx^2}(1-2nx^2)$$

Επομένως, $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/\sqrt{2n}$, ενώ

$$x \in (0, 1/\sqrt{2n}) \Rightarrow f_n'(x) > 0 \quad \text{και} \quad x \in (1/\sqrt{2n}, 1) \Rightarrow f_n'(x) < 0$$

δηλαδή η $f_n(x)$ λαμβάνει μέγιστη τιμή στο σημείο $x = 1/\sqrt{2n}$, οπότε

$$\rho_n = f_n(1/\sqrt{2n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{n}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} \neq 0.$$

Κατόπιν τούτων, η (ρ_n) δεν είναι μηδενική, οπότε η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2012)

Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας (f_n) *με*

$$f_n(x) = (1 - x^2)x^n/[-1, 1]$$

και να εξετασθεί αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Λύση.

Για $x \in \{-1, 0, 1\}$, είναι $f_n(x) = 0$, ενώ για $|x| \in (0, 1)$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - x^2)|x|^{n+1}}{(1 - x^2)|x|^n} = |x| < 1$$

άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.
Στη συνέχεια, θα εξετασθεί αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, με τη βοήθεια της ακολουθίας $\rho_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$, όπου $f(x) = 0$.

Λύση (συνέχεια).

Η $f_n(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, με παράγωγο

$$f_n'(x) = (n-(n+2)x^2)x^{n-1}, \qquad n>0,$$

Επομένως, $f_n'(x)=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{n/(n+2)}$, ενώ

$$x\in(0,x_0) \Rightarrow f_n'(x)>0 \quad \text{και} \quad x\in(x_0,1)\Rightarrow f_n'(x)<0,$$

όπου $x_0=\sqrt{n/(n+2)}$. Επιπλέον, η $|f_n(x)|$ είναι άρτια, επομένως λαμβάνει μέγιστη τιμή στο σημείο x_0, οπότε

$$\begin{aligned}\rho_n = f_n(x_0) &= \left(1-\tfrac{n}{n+2}\right)\left(\tfrac{n}{n+2}\right)^{n/2}\\ &= \tfrac{2}{n+2}\left(\tfrac{n+2}{n}\right)^{n\cdot(-1/2)} \to 0\cdot(e^2)^{-1/2}=0.\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Ομοιόμορφα βασική ακολουθία συναρτήσεων

Ορισμός

Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) *με κοινό πεδίο ορισμού* A *ονομάζεται ομοιόμορφα βασική στο* A*, αν και μόνο αν*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : m > n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

για κάθε $x \in A$.

Πρόταση

Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) *με κοινό πεδίο ορισμού* A *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* A *αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα βασική στο* A.

Ομοιόμορφα βασική ακολουθία συναρτήσεων

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη Πρόταση, για την ακολουθία μερικών αθροισμάτων μιας σειράς συναρτήσεων, προκύπτει ότι:

Πόρισμα

Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *με κοινό πεδίο ορισμού* A *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* A *αν και μόνο αν*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{i=n+1}^{m} f_i(x) \right| < \varepsilon,$$

για κάθε $x \in A$.

Ωστόσο, ο έλεγχος για ομοιόμορφη σύγκλιση μιας σειράς συναρτήσεων γίνεται συνήθως όχι με το προηγούμενο πόρισμα, αλλά με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση (Κριτήριο Weierstrass)

Αν για την ακολουθία (f_n) συναρτήσεων f_n/A και την ακολουθία (a_n) ισχύει (τελικά) ότι $|f_n(x)| \leq a_n$, για κάθε $x \in A$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

Υπενθύμιση βασικών σειρών που συγκλίνουν:

- (Γεωμετρική σειρά) $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}$ αν και μόνο αν $|x| < 1$, όπου $k \in \mathbb{N}$.
- (Εκθετική σειρά) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (p-σειρά) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 10.)

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής* $[a, +\infty)$, *όπου* $a > 1$.

Λύση.

Θα χρησιμοποιηθεί η γνωστή ανισότητα $\ln x \leq x - 1$, όπου $x > 0$. Έστω $a > 1$. Θέτοντας $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$, τότε για $x \in [a, +\infty)$, έχουμε ότι

$$|f_n(x)| = \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \leq \frac{nx}{nx^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{1}{a^{n-1}}$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n-1}}$ συγκλίνει (στο $\dfrac{1}{1-1/a}$), έπεται από το κριτήριο Weierstrass ότι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

Ομοιόμορφη σύγκλιση σειράς συναρτήσεων

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 9.)

Να δειχθεί ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$.

Λύση.

Σημείωση: $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow \frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$.

Για $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$, έχουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n(1+nx^2)} = \frac{1}{2n\sqrt{n}} \cdot \frac{2|x|\sqrt{n}}{1+nx^2} \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ συγκλίνει (p-σειρά με $p = 3/2 > 1$), έπεται από το κριτήριο Weierstrass ότι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Συνέπειες της ομοιόμορφης σύγκλισης

Έστω η ακολουθία συναρτήσεων (f_n), η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο A στην f/A.

- Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, είναι $\lim_{x\to\xi} f_n(x) = a_n$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n$. Δηλαδή, ισχύει ότι
$$\lim_{x\to\xi}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\xi} f_n(x).$$
- Κατά συνέπεια, αν f_n συνεχείς, τότε θα είναι και η f συνεχής, αφού για κάθε $\xi \in A$,
$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\xi} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi) = f(\xi),$$
- $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$, για κάθε διάστημα $[a, b] \subseteq A$.
- Αν υπάρχει $\xi \in [a, b]$, ώστε $\lim_{n\to\infty} F_n(\xi) \in \mathbb{R}$ και η (F_n') συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f/[a, b]$, τότε υπάρχει $F/[a, b]$, ώστε $F_n \overset{\text{ομ}}{\to} F$ και $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Έστω σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο A στην g/A.

- Αν g_n συνεχείς, τότε και η g είναι συνεχής.
- $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x)dx$, για κάθε διάστημα $[a,b] \subseteq A$.
- Αν υπάρχει $\xi \in [a,b]$, ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} G_n(\xi) \in \mathbb{R}$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} G_n'$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g/[a,b]$, τότε υπάρχει $G/[a,b]$, ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$ να συγκλίνει ομοιόμορφα στη G και $G'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$.

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 19)

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f/A, όπου $A = (-1/a, 1/a)$, $a > 1$, με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1} x^{n-1}$ είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{1/b} f(x)dx$, $b > a$.

Λύση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_n/A, με $f_n(x) = n a^{n-1} x^{n-1}$,
Προκειμένου να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο A, αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο $x_0 \in A$. Για το σκοπό αυτό, επειδή οι f_n είναι συνεχείς στο A, βάσει της προηγούμενης πρότασης, αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.
Επιλέγουμε λοιπόν $r \in (|x_0|, 1/a)$, ώστε να είναι $x_0 \in [-r, r]$ και θα δείξουμε ότι η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο $[-r, r]$.

Λύση (συνέχεια)

Για κάθε $x \in [-r, r]$, ισχύει ότι

$$|f_n(x)| = na^{n-1}|x|^{n-1} \leq na^{n-1}r^{n-1}.$$

Η σειρά της ακολουθίας $a_n = na^{n-1}r^{n-1}$ συγκλίνει, διότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)a^n r^n}{na^{n-1}r^{n-1}} = \frac{n+1}{n}ar \to ar < 1$$

Επομένως, βάσει του κριτηρίου του Weierstrass, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-r, r]$ προς την f, η οποία θα είναι συνεχής στο $[-r, r]$, διότι οι f_n είναι συνεχείς. Επομένως, f συνεχής στο x_0, για κάθε $x_0 \in A$.

Συνέπειες της ομοιόμορφης σύγκλισης

Λύση (συνέχεια)

Για τον υπολογισμού του ολοκληρώματος I, αν το r επιλεχθεί έτσι ώστε $1/b < r < 1/a$, αποδεικνύεται όπως και πριν ότι η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο $[-r, r]$, οπότε είναι

$$I = \int_0^{1/b} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} \int_0^{1/b} x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^{1/b}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{b^n} = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(a/b)^n = \frac{1/b}{1-a/b} = \frac{1}{b-a}.$$

Δυναμοσειρές

Δυναμοσειρά (με κέντρο 0) ονομάζεται μια σειρά συναρτήσεων της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, όπου (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Προφανώς, κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει (στο a_0) όταν $x = 0$. Ακτίνα σύγκλισης ρ της δυναμοσειράς ονομάζεται το supremum του συνόλου των τιμών του x για τις οποίες αυτή συγκλίνει απολύτως.

Πρόταση

Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *συγκλίνει για* $x_0 \neq 0$, *τότε συγκλίνει απολύτως για κάθε* $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Επομένως, θα είναι $\rho \geq 0$ και

- αν $\rho = +\infty$, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\rho, \rho) = \mathbb{R}$,
- αν $\rho = 0$, το διάστημα σύγκλισης είναι το $\{0\}$,
- αν $\rho \in (0, +\infty)$, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\rho, \rho)$ και η δυναμοσειρά ενδεχομένως να συγκλίνει και όταν το x είναι κάποιο από τα άκρα του.

Πρόταση

Η ακτίνα σύγκλισης ρ *της δυναμοσειράς* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *δίνεται από τους τύπους:*

- $\dfrac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$,
- $\dfrac{1}{\rho} = \lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, *όταν υπάρχει το όριο στο* $\overline{\mathbb{R}}$.

Υπενθύμιση

- Κάθε σημείο συσσώρευσης μιας ακολουθίας είναι το όριο κάποιας υπακολουθίας της.
- Το $\limsup$ μιας ακολουθίας είναι το μέγιστο σημείο συσσώρευσης (μπορεί να είναι και άπειρο).
- Αν η ακολουθία **διαμερίζεται** σε k υπακολουθίες, αυτές θα αντιστοιχούν σε k το πολύ σημεία συσσώρευσης.
- Λόγω διαμέρισης, δεν θα υπάρχουν άλλα σημεία συσσώρευσης. Το μέγιστο από αυτά είναι το $\limsup$.

Υπενθύμιση βασικών ορίων ακολουθιών:

- $p > 0 \Rightarrow \lim n^{-p} = 0$
- $|a| < 1 \Rightarrow \lim a^n = 0$
- $\lim(1 + a/n)^n = e^a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$
- $a > 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
- Γενικά, $\lim \sqrt[n]{p(n)} = 1$, για κάθε πολυώνυμο p.
  (Απόδειξη με το κριτήριο παρεμβολής)
- Γενικά, $\lim \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$, για $a_1, \ldots, a_k > 0$.
  (Απόδειξη με το κριτήριο παρεμβολής)

Άσκηση (ΙΟΥΝ 2017.)

Να ευρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, *όταν*

$$a_n = \begin{cases} n^3 + 4n^2 - 3n + 2, & n = 3k, k \in \mathbb{N}^* \\ (1 + 1/n)^{n^2}, & n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ 3^n, & n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Λύση.

Επειδή όταν υπάρχει το όριο μιας ακολουθίας, τότε και κάθε υπακολουθία της έχει το ίδιο όριο, έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[3k]{|a_{3k}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+4n^2-3n+2} = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[3k+1]{|a_{3k+1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1+1/n)^{n^2}} = e$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[3k+2]{|a_{3k+2}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3$$

Επομένως

$$1/\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \max\{1, e, 3\} = 3,$$

δηλαδή $\rho = 1/3$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 24.)

Να ευρεθεί το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ *για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n(n+2)^2}(x-5)^n$.

Λύση.

Θέτοντας $y = x - 5$ και $a_n = \frac{2n+1}{3^n(n+2)^2}$, έχουμε ότι

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{1}{3} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^2 \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{1}{3}.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ είναι $\rho = 3$, δηλαδή η τελευταία δυναμοσειρά συγκλίνει όταν $y \in (-3, 3)$.
Στη συνέχεια θα εξετασθεί η σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος.

Λύση (συνέχεια).

Για $y = 3$, έχουμε $a_n 3^n = \dfrac{2n+1}{(n+2)^2} \geq \dfrac{n}{(n+2n)^2} = \dfrac{1}{9n}$ και επειδή $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n} = +\infty$, έπεται ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^n = +\infty$.

Για $y = -3$, έχουμε $a_n(-3)^n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{(n+2)^2}$.

Το τελευταίο κλάσμα είναι μια φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, επομένως από το κριτήριο Leibniz έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a^n(-3)^n$ συγκλίνει.

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a^n y^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $y \in [-3, 3)$. Άρα η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $x - 5 \in [-3, 3)$, δηλαδή

$$2 \leq x < 8.$$

Πρόταση

Κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *με ακτίνα σύγκλισης* $\rho \neq 0$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[-r, r]$*, για κάθε* $0 < r < \rho$.

Κατά συνέπεια, μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ με ακτίνα σύγκλισης $\rho \neq 0$, συγκλίνει προς μια συνάρτηση $f/(-\rho, \rho)$ η οποία είναι συνεχής και ονομάζεται συνάρτηση της δυναμοσειράς.

Πρόταση (Abel)

Αν μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *με ακτίνα σύγκλισης* $0 < \rho < +\infty$, *συγκλίνει για* $x = \rho$ *(αντ.* $x = -\rho$*), τότε θα συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[0, \rho]$ *(αντ.* $[-\rho, 0]$*).*

Κατά συνέπεια, αν η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = \rho$ (αντ. για $x = -\rho$), τότε θα συγκλίνει προς μια συνεχή συνάρτηση $f/(-\rho, \rho]$ (αντ. $f/[-\rho, \rho)$) και θα είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = \lim_{x \to \rho^-} f(x) = f(\rho)$$

και αντίστοιχα

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\rho)^n = \lim_{x \to -\rho^+} f(x) = f(-\rho).$$

Παραγώγιση δυναμοσειρών.

Η συνάρτηση δυναμοσειράς $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n / (-\rho, \rho)$ είναι παραγωγίσιμη, με

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται επαγωγικά για τις παραγώγους όλων των τάξεων, οπότε, παραγωγίζοντας n φορές και στη συνέχεια θέτοντας $x = 0$, προκύπτει ότι

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Κατά συνέπεια, αν δύο δυναμοσειρές είναι ίσες, τότε θα ταυτίζονται οι συντελεστές τους.

Ολοκλήρωση δυναμοσειρών.

Η συνάρτηση δυναμοσειράς $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n / (-\rho, \rho)$ είναι ολοκληρώσιμη, με

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},$$

όπου $-\rho < a < b < \rho$.

Βασικές δυναμοσειρές - Σειρές Maclaurin

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in (-1,1).$
- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$
- $(1+x)^r = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n,\ x \in (-1,1),\ r \in \mathbb{R}^*.$
- $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,\ x \in (-1,1].$
- $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ x \in \mathbb{R}.$
- $\sinh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n},\ x \in \mathbb{R}.$

Παρατήρηση: Μια εξίσου σημαντική δυναμοσειρά είναι η

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{n} x^n, \qquad x \in (-1,1), r \in \mathbb{R},$$

η οποία προκύπτει από την διωνυμική σειρά, με χρήση της γνωστής ταυτότητας

$$\binom{-r}{n} = (-1)^n \binom{n+r-1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R},$$

ως εξής:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-r-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-r-1}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+r+1-1}{n} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{n} x^n.\end{aligned}$$

Η επόμενη άσκηση μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια της προηγούμενης δυναμοσειράς. Εναλλακτικά, θα λυθεί (πιο γρήγορα) με τη βοήθεια των δύο πρώτων παραγώγων της γεωμετρικής σειράς.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 25)

Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, $x \in (-1, 1)$, *και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα* $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$.

▸ Απάντηση

Λύση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g/(-1,1)$, με $g(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$,

Οι δύο πρώτες παράγωγοί της είναι οι
$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$.

Λύση (συνέχεια).

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2-(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= g''(x) - g'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2 x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n \end{aligned}$$

Επομένως, είναι $S = f(1/2) = \dfrac{1+1/2}{(1-1/2)^3} = \dfrac{3/2}{1/8} = 12.$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 32)

Να υπολογισθεί το άθροισμα $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n+1} \frac{n+2}{n!}$.

▸ Απάντηση

Λύση.

Λόγω του $n!$ στον παρονομαστή, σκεφτόμαστε την εκθετική σειρά $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Παρατηρούμε ότι αν την πολλαπλασιάσουμε με x^2 και έπειτα την παραγωγίσουμε, θα εμφανιστεί επιπλέον ο συντελεστής $(n+2)$, δηλαδή θεωρούμε τη συνάρτηση $f/\mathbb{R}$, με

$$f(x) = x^2 e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2}, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

Λύση (συνέχεια).

και εφαρμόζοντας την παραγώγιση δυναμοσειράς, έχουμε ότι

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x^{n+2})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{n!} x^{n+1}$$

Επειδή η τελευταία δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι

$$f'(-2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{n!}(-2)^{n+1} = -4 + S$$

(Το -4 είναι ο όρος του αθροίσματος για $n = 0$).
Από την άλλη, είναι $f'(x) = (x^2 e^x)' = (2x + x^2)e^x$, οπότε $f'(-2) = 0$.
Επομένως, $S = f'(-2) + 4 = 4$.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 32)

Να προσδιορισθούν τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ συγκλίνει και να υπολογισθεί το άθροισμά της.

▸ Απάντηση

Λύση.

Θέτοντας $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, για την ακτίνα σύγκλισης ρ ισχύει

$$\frac{1}{\rho} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1,$$

άρα $\rho = 1$ και η σειρά συγκλίνει (απολύτως) για $x \in [-1, 1]$. Η σύγκλιση στα άκρα προκύπτει με σύγκριση με μια p-σειρά, $p = 2$.

Λύση (συνέχεια).

Η συνάρτηση της δυναμοσειράς μπορεί να προκύψει είτε ολοκληρώνοντας δύο φορές τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, είτε χρησιμοποιώντας απευθείας τη λογαριθμική σειρά $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, η οποία, θέτοντας $-x$ αντί για x, δίνει $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ για $x \in [-1, 1)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n = -\ln(1-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\
&= -\ln(1-x) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} = -\ln(1-x) - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\
&= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x) = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση

Ειδικά για $x = 1$, προκύπτει από την Πρόταση Abel ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

Το τελευταίο όριο υπολογίζεται με τη βοήθεια του κανόνα L' Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^{-1}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(1-x)^{-1}}{(1-x)^{-2}} \\ &= \lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0\end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε πιο εύκολα, υπολογίζοντας το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ως τηλεσκοπική σειρά.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 47)

Να προσεγγιστεί η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^{0.5} \frac{\mathrm{arctg} x}{x} dx$ *εκφράζοντάς το σε σειρά και χρησιμοποιώντας 2 όρους αυτής. Ποιο είναι το σφάλμα της προσέγγισης;*

▸ Απάντηση

Λύση.

Θέτουμε $f(x) = \mathrm{arctg} x$ και $g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$, για $x \in [0, 1)$. Βάσει της γεωμετρικής σειράς, έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \text{ άρα}$$

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Λύση (συνέχεια).

Επομένως,

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^x t^{2n}dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n+1}$$

Θέτοντας $x = 1/2$, προκύπτει ότι

$$g(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 2^{2n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \cdots \simeq 0.486$$

Από την πρόταση Leibniz, το σφάλμα της προσέγγισης φράσσεται απολύτως από τον επόμενο όρο της σειράς σε απόλυτο, δηλαδή $|g(1/2) - (1/2 - 1/72)| \leq \frac{1}{25 \cdot 32} = \frac{1}{800}$.