ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
2η Εργασία

Άλυτες Ασκήσεις Κεφαλαίου 12:

2		16		17		19		20	
23		24		26		27		31	
34		40		44		53		56	
59		61		65		67		68	
69		70		73					

Άλυτες Ασκήσεις Κεφαλαίου 13:

13		14		23		24		27	
28		29		34		38		40	
41		46		48		54		56	
58		59		61		62			

Να λυθούν **20** από τις παραπάνω προτεινόμενες άλυτες ασκήσεις του βιβλίου.
Σημειώστε με ☑ στους παραπάνω πίνακες τις ασκήσεις που λύσατε και χρησιμοποιήστε τη σελίδα αυτή ως εξώφυλλο στην εργασία που θα παραδώσετε. Η εργασία μπορεί να παραδοθεί ηλεκτρονικά **μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf μεγέθους το πολύ 5MB** (χρησιμοποιήστε χαμηλή ανάλυση κατά τη σάρωση, ή και ασπρόμαυρη σάρωση, αρκεί το χειρόγραφο να είναι σχετικά ευδιάκριτο), στο email kmanes@unipi.gr.
Ονομάστε το αρχείο ως ergasia2analysh2_X.pdf, όπου X ο αριθμός μητρώου σας. Μην παραλείψετε να συμπεριλάβετε τα στοιχεία σας (αριθμός μητρώου και ονοματεπώνυμο).
Η εργασία είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0,5.

Ονοματεπώνυμο:
Αριθμός Μητρώου:

Ημερομηνία παράδοσης: Τρίτη 25/06/2024

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Θ)

Να ευρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x,y)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-y^2}$, β) $g(x,y)=\ln\left(x\ln(y-x)\right)$, γ) $h(x,y)=\sqrt{y\sin x}$,

και στη συνέχεια να γίνει η γεωμετρική τους παράσταση.

ΑΣΚΗΣΗ 16 (Θ)

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού της σύγκλισης, ότι

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\left(3x^2+4y^2\right)=7 .$$

ΑΣΚΗΣΗ 17 (Θ)

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού της σύγκλισης, ότι

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)}\left(3xy+x^2-2y\right)=0 .$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του ακολουθιακού ορισμού της σύγκλισης, ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,

όταν $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{1+y^2}, & \text{αν } x+y=0 \\ \ln(x+y+e), & \text{αν } x+y>0 \\ 2e^x, & \text{αν } x+y<0. \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Να εξετασθεί αν υπάρχουν τα όρια:

α) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-3x^2y+xy^2}{x^3-y^3}$, β) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+2x^2y^2+4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να ευρεθούν τα όρια:

α) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$, β) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} e^{-\frac{1}{(x-1)^2(y-2)^2}}$, γ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-xy^3}{x^2+y^2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Να ευρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(x+1)\sin(xy^2)}{x^2y^2(x+2)}$, β) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{(e^{x+y-3}-1)\sin\frac{\pi}{4}x}{x+y-3}$,

γ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2+1}}{y^2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 26

Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις:

α) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0), \end{cases}$ β) $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0), \end{cases}$

γ) $h(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{2x}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 27

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f/[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, με

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}, & \text{αν } y\neq 0 \\ \dfrac{x}{2}, & \text{αν } y=0. \end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο του άξονα των τετμημένων.

ΑΣΚΗΣΗ 31 (Θ)

Να ευρεθούν (αν υπάρχουν) οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, όταν

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2+4xy-18y^2}{2x-6y}, & \text{αν } x\neq 3y \\ 0, & \text{αν } x=3y. \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 34 (Θ)

Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=x^3+y^3/\mathbb{R}^2$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(2,-1)$, και στη συνέχεια να ευρεθεί το διαφορικό της στο σημείο αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ 40

Να ευρεθούν, με τη βοήθεια της πρότασης 7.1, οι μερικές παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x,y)=\ln\left((x^2+3)(y^2+1)\right)/\mathbb{R}^2$,

β) $g(x,y)=\sin\left((2x^3-y^2)(x^2+3y^2)\right)/\mathbb{R}^2$,

γ) $h(x,y)=e^{(3xy-y^2)\cos(x-y)}/\mathbb{R}^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 44

Δίδονται οι συναρτήσεις $f,g/\mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχουν οι δύο πρώτες παράγωγοι, και η συνάρτηση $h/\mathbb{R}^2$, με

$$h(x,y)=f(y+\sin x)+g(y-\sin x).$$

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\operatorname{tg}x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\cos^2 x\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 53

Να ευρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ όταν:

α) $\sin xy-e^{xy}-x^2y=0$, β) $x\ln y-y\ln x=1$, γ) $\left(x^2+y^2\right)^2-9\left(x^2-y^2\right)=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 56 (*)

Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα

$$2x\left(x^3+y^3\right)dx+3y^2\left(x^2+y^2\right)dy$$

είναι ακριβές διαφορικό, και στη συνέχεια να ευρεθεί μια διαφορίσιμη συνάρτηση της οποίας το διαφορικό να είναι ίσο με το δοσμένο άθροισμα.

ΑΣΚΗΣΗ 59 (*)

Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$(x\cos x-\sin x)dy=xy\sin x dx$$

είναι ακριβής, και να ευρεθεί η γενική λύση της.

ΑΣΚΗΣΗ 61 (*)

Δίδεται η διαφορική εξίσωση $xydy+y^2dx=0$.

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή δεν είναι ακριβής.

β) Να αναχθεί η δοσμένη διαφορική εξίσωση σε ακριβή, με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα $I(x,y)=y^{-1}$.

γ) Να ευρεθεί η γενική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 65 (*)

Να ευρεθούν τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y) = -x^3 - y^3 + 3xy \,/\, \mathbb{R}^2,$$

και στη συνέχεια να προσδιορισθεί η φύση τους.

ΑΣΚΗΣΗ 67 (*)

Να ευρεθούν τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^4y^4 - x^2 + xy - y^2 \,/\, \mathbb{R}^2,$$

και στη συνέχεια να προσδιορισθεί η φύση τους.

ΑΣΚΗΣΗ 68 (*)

Να εκφρασθεί ένας θετικός αριθμός α ως γινόμενο τριών θετικών αριθμών, έτσι ώστε το άθροισμά τους να γίνεται ελάχιστο.

ΑΣΚΗΣΗ 69 (*)

Ποιες θετικές τιμές των x, y, z δίδουν στην παράσταση x^3y^2z τη μεγαλύτερη τιμή της όταν $x + y + z = k$, όπου k είναι μια πραγματική θετική σταθερά;

ΑΣΚΗΣΗ[1] 70 (*)

Να ευρεθεί η μικρότερη απόσταση μεταξύ της ευθείας $x + y = 2$ και της περιφέρειας $x^2 + y^2 = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 73 (*)

Να προσδιορισθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τα σημεία της καμπύλης με εξίσωση

$$3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140.$$

[1] Υπενθυμίζεται ότι η απόσταση d ενός σημείου (ξ,η) από μια ευθεία με εξίσωση $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ δίδεται από τον τύπο $d = \dfrac{|\alpha\xi + \beta\eta + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint_A x^2 dxdy$, όπου A είναι το παραλληλόγραμμο με εξισώσεις πλευρών $y = x, y = x+3, y = -2x+1$ και $y = -2x+5$.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint_A x^{\frac{3}{2}} dxdy$, όπου A είναι το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ και της ευθείας $x+y=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint_A \left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dxdy$ όπου A είναι το άνω ημικύκλιο του κύκλου με κέντρο $(1,0)$ και ακτίνα 1.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint_A \left(x\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy$ όπου $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0 \text{ και } y \ge 0\right\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 27

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A x^2 e^{\left(x^2+y^2\right)^2} dxdy$$

όπου A είναι ο δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου $(0,0)$ και ακτίνων 1 και 2.

ΑΣΚΗΣΗ 28

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint_A \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$ όπου $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9, \text{ και } \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x\right\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 29

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint_A \frac{x}{x^2+3y^2}dxdy$ όπου $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ 1 \le x^2+3y^2 \le 4, \text{ και } -\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}\right\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 34

Να υπολογισθεί η τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A \cos(x-y)e^{x+y}(x+y)^2\,dxdy$$

όπου A είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία

$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(0,\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 38

Να υπολογισθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x=\alpha\cos^4\theta,\ \ y=\alpha\sin^4\theta$ όπου $0\le\alpha\le 1$ και $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint_A \sqrt{xy}\,dxdy$ όπου $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0, y\ge 0 \text{ και } \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\right\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 40

Να υπολογισθεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x^2-y^2=u,\ 2xy=v$ η τιμή του διπλού ολοκληρώματος $\iint_A (x^2+y^2)^3\,dxdy$,

όπου A είναι το καμπυλόγραμμο τετράπλευρο που ορίζεται στο πρώτο τεταρτημόριο από τις υπερβολές

$$x^2-y^2=1, x^2-y^2=4, xy=1 \text{ και } xy=2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 41

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που ευρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $z=0, z=x+y+1$ και μέσα στην κυλινδρική επιφάνεια

$$\left\{x^2+y^2=4, x>0, y>0, z>0\right\}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 46

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το ελλειπτικό παραβολοειδές $z=x^2+y^2$ και τα επίπεδα x=0, y=0 και x+y=1.

ΑΣΚΗΣΗ 48

Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ των παραβολών $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}$ και της ευθείας x=4.

ΑΣΚΗΣΗ 54

Να υπολογισθεί το εμβαδό του μέρους της επιφάνειας του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$, με $x,y\ge 0$ και $z\le r$, όπου r>0.

ΑΣΚΗΣΗ 56

Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|-|y|}dxdy.$$

ΑΣΚΗΣΗ 58

Να αποδειχθεί ότι

$$\iint_A \frac{dxdy}{(1+x^2)y^2} = \frac{\pi}{4}$$

όπου $A = [0,1]\times[1,\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 59

Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A e^{-y^2}dxdy$$

όπου $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le y\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 61

Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{11}{4}}}dxdy$$

όπου $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\ge 0 \text{ και } x^2+y^2\le 1\}$.

ΑΣΚΗΣΗ[2] 62

Να υπολογισθεί η τιμή του γενικευμένου διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{1+x}}$$

όπου $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le 0, y\ge 0 \text{ και } x^2+y^2\le 1\}$.

[2] Η λύση της είναι ανάλογη με τη λυμένη άσκηση 44.