ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ 1–2
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

- **Αρχή της (απλής) επαγωγής**
- **Αρχή της ισχυρής επαγωγής**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Έστω $\Pi(n)$ ένας ισχυρισμός που εξαρτάται από ένα φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Παραδείγματα:

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
4. $2^n > n$.
5. $\left(\frac{4}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n > \frac{7n}{12}$.
6. Ο αριθμός $7^n + 3^n - 2$ είναι πολλαπλάσιο του 8.
7. Ο αριθμός 23 διαιρεί τον $5^{2n+1} + 9 \cdot 2^{n+1}$.
8. Το πλήθος των σημείων τομής n ευθειών ενός επιπέδου, οι οποίες ανα δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο είναι $\frac{n^2-n}{2}$.
9. Το πλήθος των περιοχών που μπορεί να χωρισθεί το επίπεδο από n ευθείες, οι οποίες ανά δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο είναι $1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

Για να αποδειχθεί καθένας από τους παραπάνω ισχυρισμούς χρησιμοποιείται η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής, σύμφωνα με την οποία προκειμένου να ισχύει ο ισχυρισμός $\Pi(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ αρκεί να δείξουμε

1. τον ισχυρισμό για $n = 1$.
2. να υποθέσουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός για $n = k$ και να το αποδειξούμε για $n = k + 1$.

Συγκεκριμένα ισχύει η πρόταση

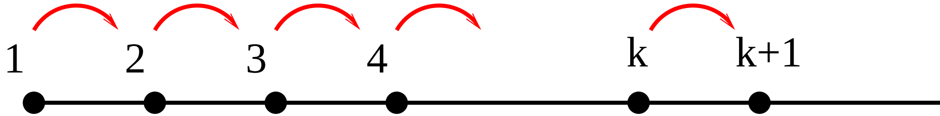
Πρόταση 1 (Αρχή της επαγωγής)

Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση με $n \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

1. *Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.*
2. *Αν η $\Pi(k)$ είναι αληθής, τότε και η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής.*

Τότε η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Η πρόταση αυτή ονομάζεται **αρχή της απλής ή τέλειας επαγωγής** και χρησιμοποιείται συχνά για την απόδειξη προτάσεων που αναφέρονται σε φυσικούς αριθμούς.
Η απόδειξή της στηρίζεται στα Αξιώματα του Peano που θεμελιώνουν τους φυσικούς αριθμούς.



Παράδειγμα 1

Να δειχθεί ότι

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη: Η πρόταση που θέλουμε να δείξουμε είναι η:

$$\Pi(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Η $\Pi(1)$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ προφανώς ισχύει.

2. Έστω ότι ισχύει η $\Pi(k)$, δηλαδή έστω ότι

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $\Pi(k+1)$, δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

(οπότε βάσει της αρχής της επαγωγής, η $\Pi(n)$ θα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$). Πράγματι,

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + k}_{=\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)(\frac{k}{2} + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Παράδειγμα 2

Να δειχθεί ότι $2^n > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη:¨ Εδώ $\Pi(n)$: $2^n > n$.

1. $\Pi(1)$: $2^1 > 1$ ισχύει.
2. Έστω ότι ισχύει η
$$\Pi(k) : 2^k > k.$$
Θα δείξουμε ότι ισχύει και η
$$\Pi(k+1) : 2^{k+1} > k+1.$$
Πράγματι,
$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k \geq k+1$$
(αφού $k \in \mathbb{N}^*$ και άρα $k \geq 1$).

Άρα, βάσει της αρχής της επαγωγής, η $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα 3

Να δειχθεί ότι $\left(\frac{4}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n > \frac{7n}{12}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη: Εδώ $\Pi(n) : \left(\frac{4}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n > \frac{7n}{12}$

1. $\Pi(1)$: $\frac{4}{3} + \frac{5}{4} > \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{31}{12} > \frac{7}{12}$ ισχύει.
2. Έστω ότι ισχύει η

$$\Pi(k) : \left(\frac{4}{3}\right)^k + \left(\frac{5}{4}\right)^k > \frac{7k}{12}.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η

$$\Pi(k+1) : \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} + \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1} > \frac{7(k+1)}{12}$$

Πράγματι,

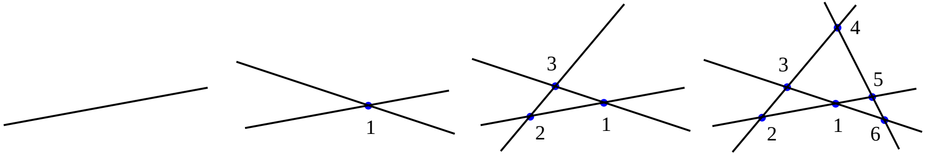
$$\begin{aligned}
\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} + \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1} &= \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{k} + \frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^{k} \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^{k} + \left(\frac{5}{4}\right)^{k} + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{k} + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^{k} \\
&> \frac{7k}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{7k}{12} + \frac{7}{12} \\
&= \frac{7(k+1)}{12}
\end{aligned}$$

Άρα, βάσει της αρχής της επαγωγής, η $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα 4 (Σημεία τομής ευθειών)

Δίδονται n ευθείες ενός επιπέδου οι οποίες ανά δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να ευρεθεί το πλήθος των σημείων τομών τους.

Λύση: Έστω a_n το πλήθος των σημείων τομής των n ευθείων.
Προφανώς, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$ και $a_4 = 6$



Παρατηρούμε ότι κάθε φορά που προσθέτουμε μια ευθεία αυτή τέμνει τις υπόλοιπες n σε n καινούργια σημεία δηλαδή

$$a_{n+1} = a_n + n.$$

Με τη βοήθεια αυτού του αναδρομικού τύπου και την μέθοδο της επαγωγής θα δεχθεί ότι το ζητούμενο πλήθος των σημείων τομής δίδεται από τον τύπο

$$a_n = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Πράγματι, $a_1 = 0 = \dfrac{1^2 - 1}{2}$ δηλαδή ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$, δηλαδή $a_k = \dfrac{k^2 - k}{2}$, θα δειχθεί ότι ο τύπος ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή

$a_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2 - (k+1)}{2} = \dfrac{k^2 + 2k + 1 - k - 1}{2} = \dfrac{k^2 + k}{2}.$

Είναι

$$a_{k+1} = a_k + k = \frac{k^2 - k}{2} + k = \frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{k^2 + k}{2}$$

Άρα, ο τύπος ισχύει και για $n = k + 1$, οπότε από την αρχή της επαγωγής ο τύπος ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα 5

Να δειχθεί ότι ο αριθμός $7^n + 3^n - 2$ είναι πολλαπλάσιο του 8, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη: Εδώ $\Pi(n)$: $7^n + 3^n - 2$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

1. $\Pi(1)$: $7^1 + 3^1 - 2$ πολλαπλάσιο του 8, ισχύει.
2. Έστω ότι ισχύει η

$$\Pi(k) : 7^k + 3^k - 2 \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 8.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η

$$\Pi(k+1) : 7^{k+1} + 3^{k+1} - 2 \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 8.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
7^{k+1} + 3^{k+1} - 2 &= 7 \cdot 7^k + 3 \cdot 3^k - 2 \\
&= (8-1) \cdot 7^k + (4-1) \cdot 3^k - 2 \\
&= 8 \cdot 7^k + 4 \cdot 3^k - (7^k + 3^k) - 2 \\
&= 8 \cdot 7^k + 4 \cdot 3^k - (7^k + 3^k - 2) - 4 \\
&= 8 \cdot 7^k + 4 \cdot (3^k - 1) - (7^k + 3^k - 2)
\end{aligned}$$

Οπότε επειδή ο αριθμός $8 \cdot 7^k$ είναι πολλαπλάσιο του 8, ο αριθμός $4(3^k - 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 8 (αφού $3^k - 1$ άρτιος) και ο αριθμός $7^k + 3^k - 2$ είναι επίσης πολλαπλάσιο του 8 από την υπόθεση της επαγωγής έπεται ότι και ο αριθμός $7^{k+1} + 3^{k+1} - 2$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

Παρατήρηση: Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η $\Pi(n)$ δεν ισχύει (ή δεν έχει νόημα) για n μικρότερο από κάποιο φυσικό αριθμό ν. Τότε ξεκινάμε αποδεικνύοντας την $\Pi(\nu)$ αντί της $\Pi(1)$.

Παράδειγμα 6 (Άθροισμα γωνιών κυρτού πολυγώνου)

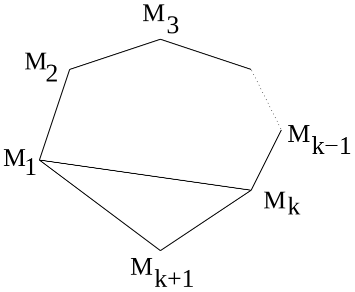
Να δειχθεί ότι το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού n-γώνου ισούται με $180 \cdot (n-2)$ μοίρες.

Απόδειξη: Εδώ $\Pi(n)$: Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού n-γώνου ισούται με $180 \cdot (n-2)$ μοίρες.
Εδώ, προφανώς, η πρόταση $\Pi(n)$ έχει νόημα για $n \geq 3$.

1. $\Pi(3)$: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με
   $180 \cdot (3-2) = 180$ μοίρες,
   το οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει.

2. Έστω ότι για κάποιο $k \geq 3$ ισχύει η
$\Pi(k)$: Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού k-γώνου ισούται με $180 \cdot (k-2)$-μοίρες.
Θα δείξουμε ότι ισχύει και η
$\Pi(k+1)$: Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού $(k+1)$-γώνου ισούται με $180 \cdot ((k+1)-2)$-μοίρες.

Έστω ένα κυρτό $(k+1)$-γωνο $M_1 M_2 \cdots M_k M_{k+1}$. Φέρνουμε την διαγώνιο $M_1 M_k$ (βλέπε σχήμα).



Το άθροισμα των γωνιών του $(k+1)$-γώνου ισούται με το άθροισμα των γωνιών του k-γώνου $M_1 M_2 \cdots M_k$ ($180(k-2)$ μοίρες) συν του τριγώνου $M_1 M_k M_{k+1}$ (180 μοίρες), οπότε το συνολικό άθροισμα των γωνιών του $(k+1)$-γώνου θα είναι

$$180(k-2) + 180 = 180(k-2+1) = 180((k+1)-2) \text{ μοίρες},$$

δηλαδή η $\Pi(k+1)$ ισχύει.

Άρα, βάσει της αρχής της επαγωγής, η $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq 3$.

Παράδειγμα 7

Να δειχθεί ότι

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > n+1, \ \textit{για κάθε } n \geq 4.$$

Απόδειξη: Αρκεί λοιπόν τώρα, για την πρόταση $\Pi(n)$: $\left(\frac{3}{2}\right)^n > n+1$ να δείξουμε ότι:

1. $\Pi(4)$: αληθής, δηλαδή

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 4+1 \Leftrightarrow \frac{81}{16} > 5,$$

το οποίο ισχύει.

2. Έστω ότι ισχύει η $\Pi(k)$, δηλαδή

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k > k+1.$$

Τότε ισχύει και η $\Pi(k+1)$.
Πράγματι,

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} &= \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right) > (k+1)\frac{3}{2} = \frac{3}{2}k + \frac{3}{2} \\ &= k + \frac{k}{2} + \frac{3}{2} = k + \frac{k+3}{2} \geq k+2 = k+1+1,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > (k+1)+1,$$

άρα ισχύει η $\Pi(k+1)$.

Άρα, βάσει της αρχής της επαγωγής, η $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq 4$.

Παράδειγμα 8

Να δειχθεί ότι ο αριθμός $2n^3 - 3n^2 + n$ είναι πολλαπλάσιο του 6, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \geq 2$.

Απόδειξη: Αρκεί λοιπόν τώρα, για την πρόταση
$\Pi(n)$: $2n^3 - 3n^2 + n$ πολλαπλάσιο του 6,
να δείξουμε ότι:

1. $\Pi(2)$: αληθής, δηλαδή

$$2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 6, \text{ πολλαπλάσιο του } 6$$

   το οποίο ισχύει.

2. Έστω ότι ισχύει η $\Pi(k)$, δηλαδή

$$2k^3 - 3k^2 + k \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 6$$

   Τότε ισχύει και η $\Pi(k+1)$, δηλαδή

$$2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + k + 1 \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 6$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} &2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + k + 1 \\ &= 2\left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right) - 3\left(k^2 + 2k + 1\right) + k + 1 \\ &= (2k^3 - 3k^2 + k) + 6k^2, \end{aligned}$$

το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 6, αφού $6k^2$ είναι πολλαπλάσιο του 6 και λόγω της υπόθεσης της επαγωγής $2k^3 - 3k^2 + k$ είναι επίσης πολλαπλάσιο του 6.

Άρα, βάσει της αρχής της επαγωγής, η $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq 2$.

Παρατήρηση: Προσοχή!
Όταν αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι μια πρόταση $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ πρέπει να ελέγχουμε ότι η συνεπαγωγή

$$\Pi(k) \Rightarrow \Pi(k+1)$$

ισχύει για κάθε $k \geq n_0$.
Ομοίως, πρέπει να ελέγχουμε ότι η πρόταση $\Pi(n_0)$ είναι αληθής.

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί που είναι το σφάλμα στην επόμενη ``επαγωγική απόδειξη''.
Πρόταση. $2^n = 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$.

¨Απόδειξη¨: Έστω η πρόταση $\Pi(n)$: ``$2^n = 0$''.
Υποθέτουμε ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $k \geq 1$, δηλαδή $2^k = 0$.
Θα δείξουμε ότι και η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής, δηλαδή $2^{k+1} = 0$. Πράγματι,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2 \cdot 0 = 0.$$

Παράδειγμα 10

Να βρεθεί που είναι το σφάλμα στην επόμενη ``επαγωγική απόδειξη´´.

Πρόταση. *Όλα τα τριαντάφυλλα έχουν το ίδιο χρώμα.*

¨Απόδειξη¨: Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς τον αριθμό n των τριαντάφυλλων.

Έστω η πρόταση $\Pi(n)$: ``Σε κάθε σύνολο με n τριαντάφυλλα όλα έχουν το ίδιο χρώμα.´´

Η $\Pi(1)$ είναι προφανώς αληθής.

Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής, δηλαδή σε κάθε σύνολο με k τριαντάφυλλα όλα έχουν το ίδιο χρώμα. Θα αποδειχθεί ότι και η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής.

Έστω $\{r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}\}$ είναι ένα σύνολο με $k+1$ τριαντάφυλλα. Τότε τα υποσύνολα $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ και $\{r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}\}$ περιέχουν k τριαντάφυλλα, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, σε κάθε σύνολο όλα τα τριαντάφυλλα έχουν το ίδιο χρώμα. Επειδή το r_2 ανήκει και στα δύο σύνολα, έπεται όλα τα τριαντάφυλλα έχουν το ίδιο χρώμα, άρα η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής.

Ισχυρή μαθηματική επαγωγή

Σε ορισμένες περιπτώσεις προκειμένου να αποδείξουμε μια πρόταση μας διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μορφή της αρχής της επαγωγής, η οποία ονομάζεται **αρχή της ισχυρής επαγωγής** και διατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 2 (Αρχή της ισχυρής επαγωγής)

Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση με $n \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

1. *Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.*
2. *Αν η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $1 \leq k < n$, τότε και η $\Pi(n)$ είναι αληθής.*

Τότε η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Παρατηρήσεις:

1. Αποδεικνύεται ότι η αρχή της (απλής) επαγωγής και της ισχυρής επαγωγής είναι ισοδύναμες, δηλαδή κάθε πρόταση που αποδεικνύεται με την μια μορφή της επαγωγής μπορεί να αποδειχθεί και με την άλλη μορφή της.
2. Επειδή υπάρχουν περιπτώσεις όπου η $\Pi(n)$ δεν ισχύει (ή δεν έχει νόημα) για n μικρότερο από κάποιο φυσικό αριθμό ν, και εδώ ξεκινάμε αποδεικνύοντας την $\Pi(\nu)$ αντί της $\Pi(1)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $\nu \leq k < n$ αντί για $1 \leq k < n$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 2, ονομάζεται **πρώτος** αν και μόνο αν διαιρείται μόνο με το 1 και τον εαυτό του. Διαφορετικά ονομάζεται **σύνθετος**.
Για παράδειγμα, οι αριθμοί 2, 3, 5, 7 είναι πρώτοι, ενώ οι αριθμοί 4, 6, 8 και 9 είναι σύνθετοι.

Παράδειγμα 1

Να δειχθεί ότι κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 2 είναι πρώτος ή είναι γινόμενο πρώτων αριθμών.

Απόδειξη: Έστω η πρόταση $\Pi(n)$: ``Ο n είναι πρώτος αριθμός ή είναι γινόμενο πρώτων αριθμών.'' Τότε,

1. $\Pi(2)$ αληθής, αφού ο αριθμός 2 είναι πρώτος αριθμός.
2. Έστω ότι $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $2 \leq k < n$. Τότε ισχύει και η $\Pi(n)$. Πράγματι, αν n είναι πρώτος τότε η $\Pi(n)$ ισχύει.

Αν n είναι σύνθετος τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί p και q ώστε

$$n = pq \text{ όπου } 2 \leq p, q < n.$$

Επειδή $2 \leq p, q < n$, από την υπόθεση της επαγωγής ο p είτε είναι πρώτος είτε είναι γινόμενο πρώτων. Επίσης ο q είτε είναι πρώτος είτε είναι γινόμενο πρώτων. Συνεπώς, ο $pq = n$ είναι γινόμενο πρώτων.

Άρα, σε κάθε περίπτωση η $\Pi(n)$ ισχύει.

Άρα, από την αρχή της ισχυρής επαγωγής η πρόταση $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq 2$.

Παράδειγμα 2

Έστω η ακολουθία (a_n) με

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 4 \\ a_n &= 3a_{[n/2]} + 6, \ \textit{για κάθε } n \geq 3. \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι κάθε όρος της ακολουθίας (a_n) είναι άρτιος.

Υπενθυμίζεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $[x]$ συμβολίζεται το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή ο μέγιστος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x.

Απόδειξη: Έστω η πρόταση $\Pi(n)$: ``Ο a_n είναι άρτιος.''

1. $\Pi(1)$: αληθής, αφού $a_1 = 2$.
   $\Pi(2)$: αληθής, αφού $a_2 = 4$.
2. Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $2 \leq k < n$. Τότε ισχύει και η $\Pi(n)$. Πράγματι, επειδή $n \geq 3$ ισχύει ότι

   $$a_n = 3a_{[n/2]} + 6.$$

   Επειδή, $1 \leq [n/2] < n$, από την υπόθεση της επαγωγής και από το γεγονός ότι a_1 είναι άρτιος, έπεται ότι $a_{[n/2]}$ είναι άρτιος. Επομένως, $3a_{[n/2]}$ είναι επίσης άρτιος και άρα και ο a_n είναι άρτιος.

Αλγεβρικές παραστάσεις

Μια αλγεβρική παράσταση αποτελείται από ορισμένες μεταβλητές που συνδέονται με τις 4 γνωστές δυαδικές πράξεις $+, -, \cdot$ και $:$

Παραδείγματα:

- Μια αλγεβρική παράσταση με 1 εμφάνιση μεταβλητής είναι για παράδειγμα η $A = x_1$.
- Αλγεβρικές παραστάσεις που έχουν 2 εμφανίσεις μεταβλητών είναι οι επόμενες:

$$A = x_1 + x_2, B = x_1 - x_2, \Gamma = x_1 \cdot x_2 \text{ και } \Delta = x_1 : x_2$$

- Μια αλγεβρική παράσταση που έχει 10 εμφανίσεις μεταβλητών είναι η

$$A = (((x_1 - x_2) + (x_3 : x_4)) : (x_5 - x_6)) + (((x_7 - x_8) + x_9) \cdot x_{10})$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε ένα από τα προηγούμενα παραδείγματα το πλήθος των εμφανίσεων των μεταβλητών είναι κατά ένα περισσότερο από το πλήθος των εμφανίσεων των πράξεων.

Αυτό όπως θα δούμε ισχύει γενικά για κάθε αλγεβρική παράσταση. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της ισχυρής επαγωγής.

Το κρίσιμο σημείο στην απόδειξη, όπως θα δούμε είναι η διάσπαση κάθε αλγεβρικής παράστασης A με τουλάχιστον 2 μεταβλητές σε μια από τις παρακάτω μορφές:

$$A = A_1 + A_2 \text{ ή } A = A_1 - A_2 \text{ ή } A = A_1 \cdot A_2 \text{ ή } A = A_1 : A_2$$

όπου A_1, A_2 είναι αλγεβρικές παραστάσεις.
Για παράδειγμα, για την τελευταία από τις παραπάνω παραστάσεις A είναι

$$A = A_1 + A_2$$

όπου $A_1 = ((x_1 - x_2) + (x_3 : x_4)) : (x_5 - x_6)$ και $A_2 = ((x_7 - x_8) + x_9) \cdot x_{10}$

Παράδειγμα 3

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε αλγεβρική παράσταση με n εμφανίσεις μεταβλητών, υπάρχουν $n-1$ εμφανίσεις των τεσσάρων (δυαδικών) πράξεων $+, -, \cdot, :$.

Απόδειξη: Έστω η πρόταση $\Pi(n)$: ``Σε κάθε αλγεβρική παράσταση με n εμφανίσεις μεταβλητών, υπάρχουν $n-1$ εμφανίσεις των τεσσάρων (δυαδικών) πράξεων $+, -, \cdot, :$''.
Η $\Pi(1)$ προφανώς ισχύει, αφού όταν έχουμε μια μόνο εμφάνιση μεταβλητής, δεν μπορεί να υπάρξει καμιά δυαδική πράξη.

Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $1 \leq k < n$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει η $\Pi(n)$. Πράγματι, κάθε αλγεβρική παράσταση A, με $n > 1$ εμφανίσεις μεταβλητών, θα έχει μια από τις επόμενες μορφές: $A_1 + A_2$, $A_1 - A_2$, $A_1 \cdot A_2$ και $A_1 : A_2$, όπου A_1, A_2 είναι αλγεβρικές παραστάσεις με n_1, n_2 εμφανίσεις μεταβλητών αντίστοιχα και $n_1 + n_2 = n$.
Επειδή $1 \leq n_1, n_2 < n$, από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι η A_1 έχει $n_1 - 1$ εμφανίσεις των τεσσάρων πράξεων και ότι η A_2 έχει $n_2 - 1$ εμφανίσεις των τεσσάρων πράξεων.
Συνολικά, στην A οι εμφανίσεις των τεσσάρων πράξεων είναι ίσες με το άθροισμα των εμφανίσεων των τεσσάρων πράξεων στις A_1, A_2 συν μια επιπλέον εμφάνιση πράξης, (αυτή που συνδέει της A_1 και A_2).
Επομένως, οι εμφανίσεις των πράξεων στην A ισούνται με

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1,$$

δηλαδή η $\Pi(n)$ ισχύει.
Άρα, από την αρχή της ισχυρής επαγωγής η πρόταση $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Έτσι, η αλγεβρική παράσταση $(x + y) \cdot (x + w)$ έχει 4 εμφανίσεις μεταβλητών και 3 εμφανίσεις πράξεων (2 προσθέσεις και 1 πολλαπλασιασμό).
Επίσης, η αλγεβρική παράσταση $\frac{(a+b)\cdot\gamma}{(a+\gamma)\cdot(b-\delta)}$ έχει 7 εμφανίσεις μεταβλητών και 6 εμφανίσεις πράξεων (2 προσθέσεις, 1 αφαίρεση, 2 πολλαπλασιασμούς και 1 διαίρεση).

Η επαγωγική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων

Η επαγωγική προσέγγιση σε ένα πρόβλημα αποτελείται από δύο μέρη: Συνήθως το πρόβλημα έχει μια παράμετρο n, $n \in \mathbb{N}^*$ που εκφράζει το 'μέγεθος' του προβλήματος

1. Για μικρές τιμές της παραμέτρου n γνωρίζουμε τις απαντήσεις στο πρόβλημα.
2. Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με παράμετρο n χρησιμοποιώντας την λύση του προβλήματος με παράμετρο $n-1$, ή γενικότερα τις λύσεις του προβλήματος με παράμετρο k, όπου $k < n$.

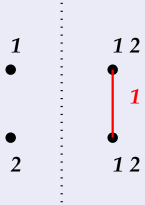
Παράδειγμα 1 (Διάδοση κουτσομπολιών)

Μια παρέα n ατόμων κουτσομπολεύουν ανά δύο μέσω τηλεφώνου. Κάθε άτομο γνωρίζει τουλάχιστον ένα κουτσομπολιό που δεν το γνωρίζουν τα υπόλοιπα άτομα. Σε μια τηλεφωνική συνομιλία μεταξύ των A και B, ο A λέει στον B όλα τα κουτσομπολιά που έχει ακούσει και ο B ανταποδίδει. Έστω a_n ο ελάχιστος αριθμός τηλεφωνικών κλήσεων που πρέπει να γίνουν μεταξύ n ατόμων, ώστε όλα τα κουτσομπολιά να είναι γνωστά στον καθένα.

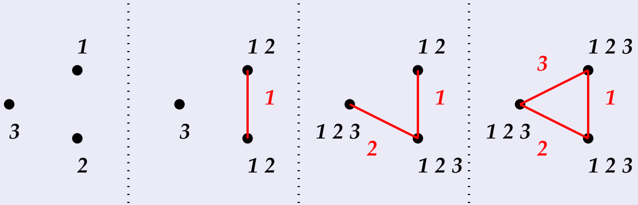
1. *Να δειχθεί ότι $a_2 = 1$, $a_3 = 3$ και $a_4 = 4$.*
2. *Να δειχθεί ότι $a_n \leq 2n - 4$, για κάθε $n \geq 4$.*

Λύση

ι) Πράγματι, για $n = 2$ αρκεί ένα τηλεφώνημα.



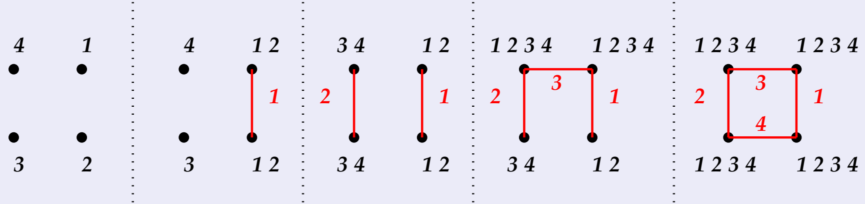
Για $n = 3$ αρκούν τρία τηλεφωνήματα.



Επαγωγή

Λύση (συνέχεια)

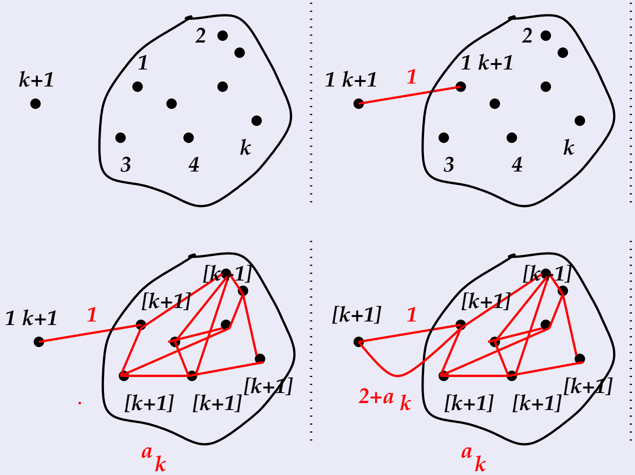
Για $n = 4$ αρκούν τέσσερα τηλεφωνήματα.



Λύση (συνέχεια)

ii) Έστω η πρόταση $\Pi(n) : a_n \leq 2n - 4$.
Για $n = 4$ έχουμε ότι $a_4 = 2 \cdot 4 - 4 = 4$, άρα η $\Pi(4)$ είναι αληθής.
Έστω ότι η πρόταση $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k \geq 4$, δηλαδή $a_k \leq 2k - 4$.
Θα δείξουμε ότι και η πρόταση $\Pi(k+1)$ είναι αληθής, δηλαδή
$a_{k+1} \leq 2(k+1) - 4$.
Πράγματι, έστω ότι έχουμε $k + 1$ άτομα. Αρχικά, το άτομο $k + 1$ επικοινωνεί με το άτομο 1 και ανταλλάσουν τα κουτσομπολιά που γνωρίζουν. Στην συνέχεια τα άτομα $1, 2, \ldots, k$ ανταλλάσουν τα κουτσομπολιά που γνωρίζουν χρησιμοποιώντας a_k κλήσεις (αγνοώντας το άτομο $k + 1$). Στο τέλος, το άτομο 1 καλεί το άτομο $k + 1$ και του μεταφέρει όλα τα υπόλοιπα κουτσομπολιά.

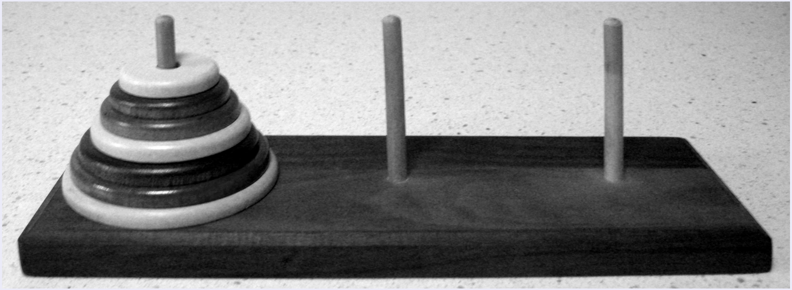
Λύση (συνέχεια)



Άρα, $a_{k+1} \leq 1 + a_k + 1 \leq 1 + (2k-4) + 1 \leq 2(k+1) - 4.$

Παράδειγμα 2 (Πύργοι του Hanoi)

Έστω τρεις στύλοι και n διαφορετικοί δίσκοι, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Να βρεθεί πως μπορούμε να μεταφέρουμε τους n δίσκους σε άλλο στύλο, όταν μετακινούμε μόνο ένα δίσκο κάθε φορά και κανένας δίσκος δεν πρέπει να τοποθετηθεί πάνω σε μικρότερό του. Πόσες κινήσεις θα χρειαστούμε;

Λύση

Έστω a_n ο ζητούμενος αριθμός των κινήσεων που απαιτούνται όταν έχουμε να μεταφέρουμε n δίσκους.
Αν $n = 1$, τότε το πρόβλημα λύνεται άμεσα. Μετακινούμε τον μοναδικό δίσκο από τον στύλο που βρίσκεται σε ένα διαφορετικό στύλο. Άρα, $a_1 = 1$
Θα λύσουμε το πρόβλημα για $n \geq 2$ δίσκους.
Έστω ότι γνωρίζουμε να λύνουμε το πρόβλημα για $n - 1$ δίσκους, τότε στην περίπτωση που έχουμε να μεταφέρουμε n δίσκους:

- Μεταφέρουμε τους $n - 1$ μικρότερους δίσκους σε κάποιο άλλο στύλο (αγνοώντας τον μεγαλύτερο δίσκο).
- Έπειτα, μεταφέρουμε τον μεγαλύτερο δίσκο στον άδειο στύλο που απομένει.
- Και μεταφέρουμε τους $n - 1$ μικρότερους δίσκους στον στύλο όπου βρίσκεται ο μεγαλύτερος δίσκος.

Λύση (συνέχεια)

Συνολικά, θα χρειαστούμε $a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$ κινήσεις, επομένως

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

Με την βοήθεια του αναδρομικού τύπου μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι

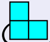
$$a_n = 2^n - 1$$

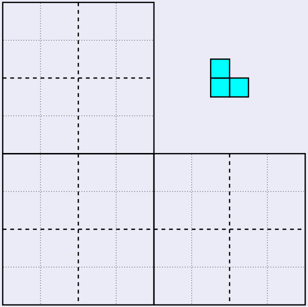
Πράγματι, για $n = 1$ έχουμε $a_1 = 2^1 - 1 = 1$ άρα ο ισχυρισμός ισχύει.
Υποθέτουμε ότι $a_k = 2^k - 1$ για κάποιο $k \geq 1$ και θα δείξουμε ότι $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.
Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αναδρομικό τύπο

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Άρα, από την αρχή της επαγωγής ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Παράδειγμα 3 (Κάλυψη με τρόμινο)

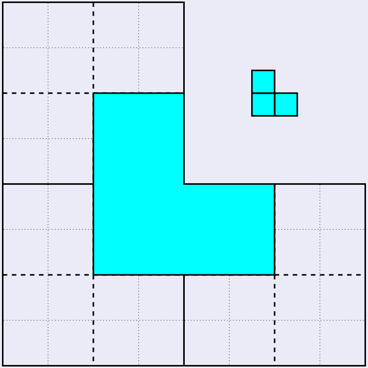
Να βρεθεί πως μπορούμε να καλύψουμε με σχήματα L-τρόμινο () μια $2^n \times 2^n$ L-τρόμινο σκακιέρα.



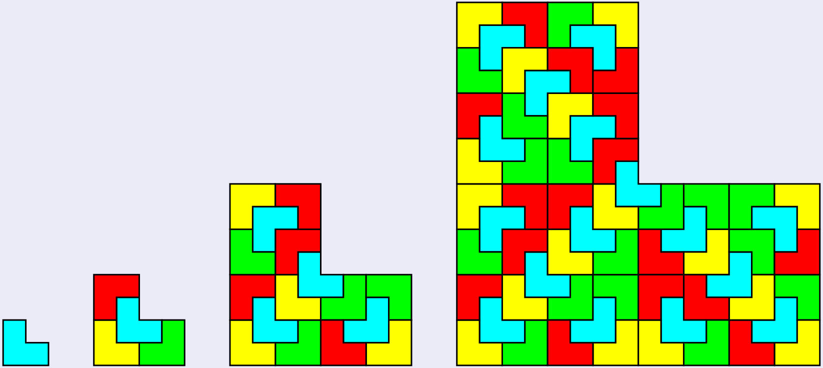
Δεν επιτρέπονται οι επικαλύψεις στα L-τρόμινο αλλά επιτρέπονται οι περιστροφές.

Λύση

Για $n = 1$, η κάλυψη μιας $2^1 \times 2^1$ L-τρόμινο σκακιέρας είναι προφανής.
Έστω ότι μπορούμε να καλύψουμε μια $2^n \times 2^n$ σκακιέρα. Τότε μπορούμε να καλύψουμε την $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ σκακιέρα διαμερίζοντας την σκακιέρα σε τέσσερα $2^n \times 2^n$ τμήματα.

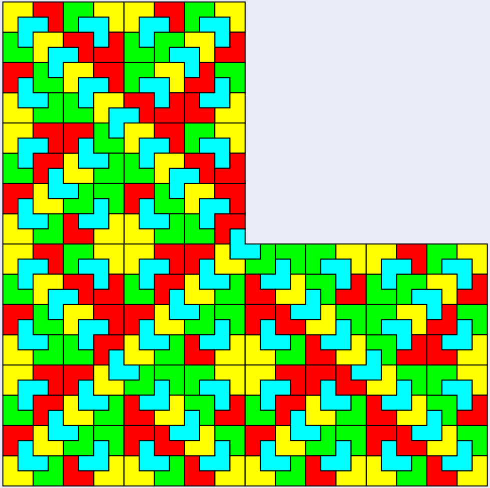


Λύση (συνέχεια)



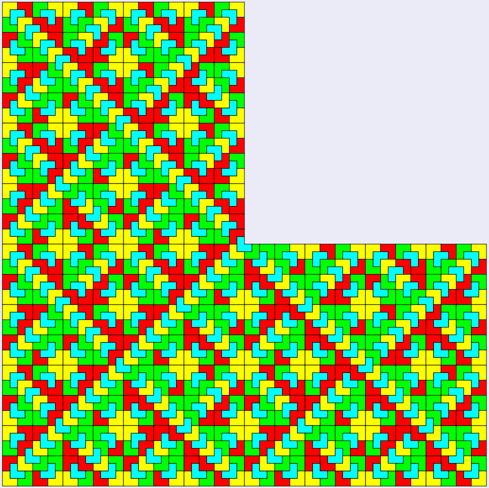
$n = 1$ $\quad n = 2$ $\quad n = 3$ $\quad n = 4$

Λύση (συνέχεια)



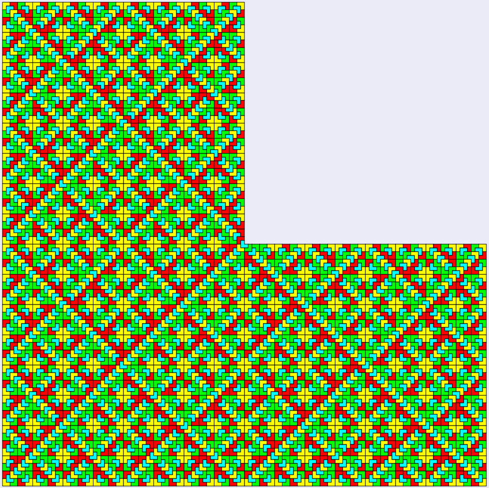
$n = 5$

Λύση (συνέχεια)



$n = 6$

Λύση (συνέχεια)



$n = 7$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να αποδειχθεί ότι:
   1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
   2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
   3. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
   4. $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$, όπου $\alpha > -1$ και $\alpha \neq 0$, για κάθε $n \geq 2$ (Ανισότητα Bernoulli).
2. Να αποδειχθεί ότι:
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{n},$$
   για κάθε $n \geq 2$.
3. Έστω ότι για μια πρόταση $\Pi(n)$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν η $\Pi(k)$ είναι αληθής, τότε και η $\Pi(k+3)$ είναι επίσης αληθής. Τι πρέπει να ισχύει έτσι ώστε η $\Pi(n)$ να είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$;
4. Μπορεί να υπάρξει αρχή της επαγωγής στο $\mathbb{Z}$, ή στο $\mathbb{Q}$, ή στο $\mathbb{R}$;

Ασκήσεις προς επίλυση

5. (*) Γράψτε ένα πρόγραμμα που λύνει το πρόβλημα των κουτσομπολιών των n ατόμων με ακριβώς με $1, 3$ και $2n - 4$ τηλεφωνήματα όταν $n = 2, 3$ και $n \geq 4$ αντίστοιχα.
6. (*) Γράψτε ένα πρόγραμμα που λύνει το πρόβλημα μεταφοράς των n δίσκων από τον ένα στύλο στον άλλο (χρησιμοποιώντας έναν επιπλέον δίσκο ως βοηθητικό).
7. (*) Να δειχθεί ότι μπορούμε να πληρώσουμε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο των 10 ευρώ και μεγαλύτερο ή ίσο των 40 ευρώ, χρησιμοποιώντας μόνο χαρτονομίσματα των 20 και 50 ευρώ.