ΣΥΝΟΛΑ - ΣΧΕΣΕΙΣ - ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

- **Σύνολα**
  - Σχέσεις συνόλων
  - Πράξεις συνόλων
  - Δυναμοσύνολο
  - Καρτεσιανό γινόμενο
  - Διαμερίσεις συνόλων
- **Σχέσεις**
  - Σχέσεις ισοδυναμίας
  - Σχέσεις διάταξης
  - Φραγμένα σύνολα
- **Απεικονίσεις**
  - Βασικές απεικονίσεις
  - Αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις
  - Γραφική παράσταση
  - Σύνθεση απεικονίσεων
  - Αντίστροφη απεικόνιση
  - Εικόνες συνόλων

Σύνολα

Το **σύνολο** είναι μια συλλογή αντικειμένων σαφώς καθορισμένων τα οποία θεωρούμε ως μια ολότητα. Τα αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο ονομάζονται **στοιχεία του συνόλου**. Όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι το αντικείμενο x ανήκει (αντίστοιχα δεν ανήκει) στο σύνολο A, τότε σημειώνουμε $x \in A$ (αντίστοιχα $x \notin A$). Το **κενό σύνολο** είναι το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και σημειώνεται με $\emptyset$ ή $\varnothing$.
Τα σύνολα συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, ενώ τα στοιχεία τους με μικρά. Τα σύνολα παρουσιάζονται δια αναγραφής των στοιχείων τους, όπου αυτό είναι δυνατό, αλλιώς δια περιγραφής των στοιχείων του.
Παραδείγματα. Τα σύνολα

$$A = \{1, 1/2, -1/3, a\}, B = \{-1, 4, \{-1, 2\}, 6, 1\}$$

δίδονται δια αναγραφής των στοιχείων τους, ενώ τα σύνολα

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 3\} \text{ (ή } \Gamma = \{x \in \mathbb{R} | x^2 > 3\}),$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ πολλαπλάσιο του } 5\}$$

δια περιγραφής των στοιχείων τους.

Παρατηρήσεις

1. Σε ένα σύνολο, κάθε στοιχείο μπορεί να εμφανίζεται το πολύ μια φορά.
2. Σε ένα σύνολο, δεν παίζει ρόλο η σειρά που αναγράφονται τα στοιχεία του. Έτσι, $\{2, -3, 4, 7\} = \{-3, 7, 4, 2\}$.
3. Το σύνολο $\{\varnothing\}$ δεν είναι κενό, αλλά περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο (είναι μονοσύνολο), το κενό σύνολο. Γενικά, ισχύει $\{x\} \neq x$.

Μερικά βασικά σύνολα είναι τα παρακάτω:

$\mathbb{N}$ το σύνολο των **φυσικών αριθμών**,

$\mathbb{Z}$ το σύνολο των **ακεραίων αριθμών**,

$\mathbb{Q}$ το σύνολο των **ρητών αριθμών**,

$\mathbb{R}$ το σύνολο των **πραγματικών αριθμών**,

$\mathbb{C}$ το σύνολο των **μιγαδικών αριθμών**.

Αν A είναι ένα από τα παραπάνω σύνολα με A^*, σημειώνουμε το σύνολο που αποτελείται από όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του A.

Κάθε σύνολο της μορφής $\{1, 2, \ldots, n\}$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, ονομάζεται **τμήμα φυσικών αριθμών** και σημειώνεται με $[n]$. Για παράδειγμα, $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Σχέσεις συνόλων

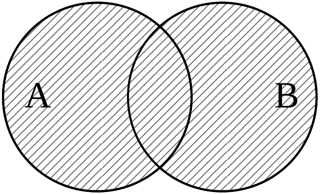
Εγκλεισμός: Ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου B (συμβολισμός $A \subseteq B$) αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται ότι $x \in B$. Στην περίπτωση αυτή το B ονομάζεται **υπερσύνολο** του A.
Όταν $A \subseteq B$ και υπάρχει ένα τουλάχιστο στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A τότε το A ονομάζεται **γνήσιο υποσύνολο** του B (συμβολισμός $A \subset B$).
Για παράδειγμα, τα γνήσια υποσύνολα του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$ είναι τα σύνολα $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\varnothing$.
Το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου A. Κάθε σύνολο A είναι υποσύνολο του εαυτού του.
Ισότητα: Δύο σύνολα ονομάζονται ίσα (συμβολισμός $A = B$) όταν κάθε στοιχείο του ενός συνόλου ανήκει στο άλλο και αντιστρόφως. Προφανώς ισχύει

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A).$$

Πράξεις συνόλων

(i) Αν A, B είναι δύο σύνολα τότε η **ένωση** των A, B (συμβολισμός $A \cup B$) είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή/και στο B, δηλαδή

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή/και } x \in B\}.$$

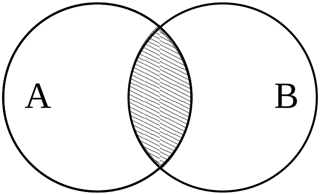


A	B	$A \cup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.)

(ii) Αν A, B είναι δύο σύνολα τότε η **τομή** (συμβολισμός $A \cap B$) των A, B είναι το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των A, B, δηλαδή

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$$



A	B	$A \cap B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Αν για τα A, B ισχύει ότι $A \cap B = \varnothing$, τότε τα A, B ονομάζονται **ξένα**.

Η ένωση και η τομή των συνόλων ορίζεται για περισσότερα από δύο σύνολα,

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : \text{ Υπάρχει } i \in [n] \text{ με } x \in A_i\},$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in [n]\}$$

Επίσης σημειώνουμε

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : \text{ Υπάρχει } i \in \mathbb{N}^* \text{ με } x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}^*\}.$$

Γενικότερα, αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια συνόλων ορίζεται η ένωση και η τομή τους ως εξής:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \text{ Υπάρχει } i \in I \text{ με } x \in A_i\},$$

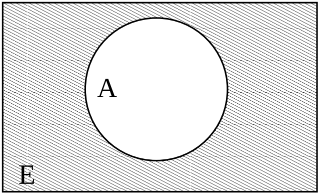
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

Παραδείγματα

1. Αν $I = \{3, 7, 11\}$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i = A_3 \cup A_7 \cup A_{11}$
2. Αν $I = \mathbb{N}^*$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$.
3. Αν $I = \{2n : n \in \mathbb{N}^*$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i = A_2 \cup A_4 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$.

(iii) Έστω ένα σύνολο E (το οποίο πολλές φορές θα θεωρείται βασικό σύνολο) και $A \subseteq E$. Το **συμπλήρωμα** του συνόλου A (συμβολισμός $\overline{A}$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του E που δεν ανήκουν στο A.

$$\overline{A} = \{x \in E : x \notin A\}$$

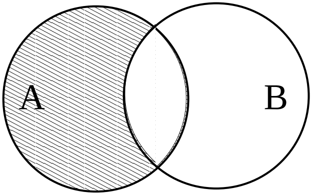


A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Άλλοι συμβολισμοί για το συμπλήρωμα είναι: A^c, A'.

(iv) Αν A, B είναι δύο σύνολα τότε η **διαφορά** (συμβολισμός $A \setminus B$) είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B, δηλαδή

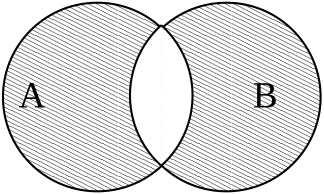
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$



A	B	$A \setminus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

(v) Αν A, B είναι δύο σύνολα τότε η **συμμετρική διαφορά** των A και B (συμβολισμός $A \triangle B$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B και όλων των στοιχείων του B που δεν ανήκουν στο A, δηλαδή

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



A	B	$A \triangle B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Παραδείγματα. Έστω $E = [10] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ και } B = \{2, 3, 5, 7, 9\}.$$

Τότε $A, B \subseteq E$ και

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}, A \cap B = \{2, 3, 5\},$$

$$\overline{A} = \{7, 8, 9, 10\}, \overline{B} = \{1, 4, 6, 8, 10\},$$

$$A \setminus B = \{1, 4, 6\}, B \setminus A = \{7, 9\}, A \triangle B = \{1, 4, 6, 7, 9\}.$$

Ιδιότητες Πράξεων

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$, $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$
3. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (De Morgan).

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων να γίνουν ως ασκήσεις. Στις επόμενες ασκήσεις δίδονται δυο αντιπροσωπευτικές μέθοδοι απόδειξης.

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί ότι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Λύση.

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\
&\Leftrightarrow x \notin A \text{ και } x \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ και } x \in \overline{B} \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}
\end{aligned}
$$

οπότε, επειδή χρησιμοποιήθηκαν παντού ισοδυναμίες,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Άσκηση 2

Να αποδειχθεί ότι $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Λύση. Τα A, B, C είναι υποσύνολα του E.

Πού μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο $x \in E$;

Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Οι στήλες $A \cap (B \cup C)$ και $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ είναι ίδιες. Άρα, τα σύνολα αυτά έχουν τα ίδια στοιχεία του E, δηλαδή είναι ίσα.

Αν σε ένα τύπο εμφανίζονται:

2 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^2 = 4$ γραμμές (περιπτώσεις),
3 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^3 = 8$ γραμμές (περιπτώσεις),
n διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει 2^n γραμμές (περιπτώσεις).

Η μέθοδος των πινάκων είναι πρακτική όταν σε ένα τύπο εμφανίζονται το πολύ 4 διαφορετικά σύνολα.

Δυναμοσύνολο

Το σύνολο όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου E ονομάζεται **δυναμοσύνολο** του E και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(E)$.
Παράδειγμα Αν $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, τότε

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, E\}.$$

Αν $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(F) = \{&\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\gamma, \delta\}, \\ &\{\alpha, \beta, \delta\}, \{\alpha, \gamma, \delta\}, \{\beta, \gamma, \delta\}, F\} \\ = \mathcal{P}(E) \cup \{&\emptyset \cup \{\delta\}, \{\alpha\} \cup \{\delta\}, \{\beta\} \cup \{\delta\}, \{\gamma\} \cup \{\delta\}, \{\alpha, \beta\} \cup \{\delta\}, \\ &\{\alpha, \gamma\} \cup \{\delta\}, \{\beta, \gamma\}, E \cup \{\delta\}\}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το E έχει 3 στοιχεία και το $\mathcal{P}(E)$ έχει $2^3 = 8$ στοιχεία. Επίσης, το F έχει 4 στοιχεία και το $\mathcal{P}(F)$ έχει $2^4 = 16$ στοιχεία.
Γενικά ισχύει ότι αν το σύνολο E έχει n στοιχεία τότε το $\mathcal{P}(E)$ θα έχει 2^n στοιχεία.

Καρτεσιανό γινόμενο

Έστω A, B δυο μή κενά σύνολα, τότε **καρτεσιανό γινόμενο**, με πρώτο παράγοντα το A και δεύτερο παράγοντα το B, ονομάζεται το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (α, β) με $\alpha \in A$, $\beta \in B$ (συμβολισμός $A \times B$), δηλαδή

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}.$$

Όταν το ένα (τουλάχιστον) από τα σύνολα A, B είναι το κενό σύνολο τότε ως καρτεσιανό γινόμενο τους ορίζεται το κενό σύνολο.

Παραδείγματα

1. Αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και $B = \{1, 2\}$ τότε είναι

$$A \times B = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2), (\gamma, 1), (\gamma, 2), (\delta, 1), (\delta, 2)\}$$

και

$$B \times A = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (1, \beta), (2, \beta), (1, \gamma), (2, \gamma), (1, \delta), (2, \delta)\}.$$

2. Αν $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$ και $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι το σύνολο των ενδείξεων των 52 χαρτιών της τράπουλας.

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου γενικεύεται για περισσότερους από δύο παράγοντες ως εξής:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ για κάθε } i \in [n]\}.$$

Εξάλλου, αν $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ φορές}}$ σημειώνεται με A^n.

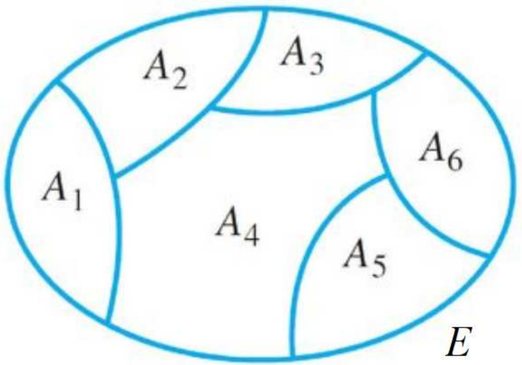
Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται συχνά τόσο στη Μαθηματική Ανάλυση όσο και στη Γραμμική Άλγεβρα για τους χώρους $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ των δύο, τριών, $\ldots$, n διαστάσεων.

Διαμερίσεις

Μια οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$, μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου E ονομάζεται **διαμέριση** του E αν ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

(i) τα σύνολα A_i είναι ανά δύο ξένα,

(ii) η ένωσή τους είναι το E.



Παραδείγματα

(i) Έστω E το σύνολο όλων των περιττών φυσικών αριθμών και A_i, $i \in I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών που λήγουν σε i, τότε η οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ αποτελεί μια διαμέριση του E.

(ii) Έστω $E = \mathbb{R}$ και $A_i = [i, i+1)$, όπου $i \in \mathbb{Z}$, τότε η οικογένεια $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ αποτελεί μια διαμέριση του $\mathbb{R}$.

(iii) Έστω E το σύνολο των ατόμων που που φοιτούν στο Πα.Πει., F το σύνολο των γυναικών που φοιτούν του Πα.Πει και M το σύνολο των ανδρών που φοιτούν στο Πα.Πει. Τα σύνολα F, M αποτελούν μια διαμέριση του E.

Μια άλλη διαμέριση του E ορίζεται από τα σύνολα A (αντ. $\overline{A}$) των ατόμων που φοιτούν στο Πα.Πει και γεννήθηκαν (αντ. δεν γεννήθηκαν) στην πόλη της Αθήνας.

Σχέσεις

Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα, τότε κάθε μη κενό υποσύνολο R του $A \times B$ ορίζει μια **διμελή σχέση** (ή απλά **σχέση**) μεταξύ των στοιχείων των A και B. Συγκεκριμένα, αν για τα στοιχεία $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ ισχύει $(\alpha, \beta) \in R$ τότε τα στοιχεία α, β σχετίζονται μέσω της σχέσης R και σημειώνουμε ότι $\alpha R \beta$, δηλαδή

$$\alpha R \beta \Longleftrightarrow (\alpha, \beta) \in R.$$

Παραδείγματα

(i) Αν A είναι το σύνολο των καταναλωτικών αγαθών και B το σύνολο των καταστημάτων, τότε ο προτασιακός τύπος ``το αγαθό $\alpha \in A$ πωλείται στο κατάστημα $\beta \in B$'' ορίζει μια σχέση μεταξύ των στοιχείων των A και B.

(ii) Αν E είναι το σύνολο των σπουδαστών ενός έτους, τότε ο προτασιακός τύπος ``ο σπουδαστής α έχει την ίδια επίδοση με το σπουδαστή β'' ορίζει μια σχέση των στοιχείων του E.

(iii) Αν E είναι το σύνολο των ευθειών του επιπέδου, τότε η καθετότητα ορίζει μια σχέση (την οποία συμβολίζουμε με $\perp$) μεταξύ των στοιχείων του E, με $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$ όταν η ευθεία ϵ_1 είναι κάθετη στην ευθεία ϵ_2.

(iv) Αν E είναι το σύνολο όλων των φοιτητών του Τμήματος, τότε ορίζεται μια σχέση R των στοιχείων του E ως εξής:

$$aRb \Leftrightarrow \text{ οι } a,\, b \text{ είναι φίλοι.}$$

(v) Αν E είναι το σύνολο των ανθρώπων, τότε ορίζεται μια σχέση R των στοιχείων του E ως εξής: aRb αν οι a, b είναι συγγενείς.

Μια σχέση R στο σύνολο E (δηλαδή υποσύνολο $E \times E$) ονομάζεται **ανακλαστική** ανν για κάθε $a \in E$ ισχύει ότι aRa.
Παραδείγματα E = Το σύνολο όλων των ανθρώπων, $a, b \in E$.
$aRb \Leftrightarrow$ Οι a, b έχουν γεννηθεί την ίδια χρονιά. (Ειναι ανακλαστική.)
$aSb \Leftrightarrow$ Ο a είναι πατέρας του b. (Δεν είναι ανακλαστική.)

Μια σχέση R στο σύνολο E ονομάζεται **συμμετρική** ανν για κάθε $a, b \in E$ ισχύει ότι $aRb \Leftrightarrow bRa$.
Παραδείγματα E = Το σύνολο όλων των ανθρώπων, $a, b \in E$.
$aRb \Leftrightarrow$ Οι a, b είναι φίλοι. (Ειναι συμμετρική.)
$aSb \Leftrightarrow$ Ο a είναι πατέρας του b. (Δεν είναι συμμετρική.)
$R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(2,3),(4,2),\ldots\}$
Αν η R είναι συμμετρική, τότε θα περιέχει σίγουρα και τα ζεύγη $(1,2)$, $(2,4)$.
(Μπορεί να περιέχει και άλλα ζεύγη.)

Μια σχέση R στο σύνολο E ονομάζεται **μεταβατική** αν και μονο για κάθε $a, b, c \in E$ με aRb και bRc έπεται ότι aRc.
Παραδείγματα E = Το σύνολο όλων των ανθρώπων, $a, b, c \in E$.
$aRb \Leftrightarrow$ Οι a, b είναι αδερφια (με τους ίδιους γονείς). (Ειναι μεταβατική.)
$aSb \Leftrightarrow$ Οι a, b είναι γνωστοί/φίλοι. (Δεν είναι μεταβατική.)

Σχέσεις ισοδυναμίας

Μια σχέση R στο E ονομάζεται **ισοδυναμία** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:
(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $a \in E$ (**ανακλαστική**)
(ii) $\alpha R \beta \Leftrightarrow \beta R \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**συμμετρική**)
(ii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma \Longrightarrow \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση ισοδυναμίας σημειώνεται με $\sim$ αντί R.

Παραδείγματα

1. Αν E είναι το σύνολο των φοιτητών που φοιτούν στο Πα.Πει., τότε η σχέση R με

$$aRb \Leftrightarrow a, b \text{ φοιτούν στο ίδιο Τμήμα του Πα.Πει.}$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

2. Αν $E = \mathbb{N}^*$ τότε το σύνολο $R = \{(x, y) : |x - y| \text{ πολλαπλάσιο του } 2\}$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας, με $n_1 \sim n_2$ όταν $\frac{n_1 - n_2}{2}$ είναι ακέραιος αριθμός.

Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο E και $\alpha \in E$ τότε το σύνολο

$$C_\alpha = \{\beta \in E : \beta \sim \alpha\}$$

ονομάζεται **κλάση ισοδυναμίας** του στοιχείου α.

Για παράδειγμα, η κλάση ισοδυναμίας C_a ενός φοιτητή a του Πα.Πει. σύμφωνα με την σχέση R του 1ου παραδείγματος, είναι το σύνολο όλων των φοιτητών που φοιτούν στο ίδιο Τμήμα με αυτόν.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας μπορεί να συμπίπτουν για ορισμένα $\alpha \in E$.
Συγκεκριμένα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\alpha \in C_\alpha$, για κάθε $\alpha \in E$.
2. $\alpha \sim \beta \Longrightarrow C_\alpha = C_\beta$.
3. $\alpha \not\sim \beta \Longrightarrow C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$.

Από τις τρεις ιδιότητες αυτές προκύπτει ότι:
Κάθε σχέση ισοδυναμίας στο E ορίζει μια διαμέριση του E.
Ισχύει και το **αντίστροφο**, δηλαδή αν (A_i) είναι μια διαμέριση του E, τότε ορίζουμε τη σχέση R στο E ως εξής:

$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } i \in I \text{ με } x, y \in A_i.$$

Εύκολα προκύπτει ότι η σχέση αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες (i),(ii) και (iii) οπότε είναι μια σχέση ισοδυναμίας με κλάσεις ισοδυναμίας τα σύνολα A_i.

Το σύνολο $\{C_\alpha : \alpha \in E\}$ ονομάζεται **σύνολο πηλίκο** του E για τη σχέση $\sim$ και συμβολίζεται με $E/\sim$.
Για παράδειγμα, το σύνολο πηλίκο της σχέσης R του πρώτου παραδείγματος είναι το σύνολο των 10 Τμημάτων του Πα.Πει.
Το σύνολο πηλίκο της σχέσης του 2ου παραδείγματος είναι το σύνολο $\{A_1, A_2\}$ όπου A_1, A_2 είναι αντίστοιχα τα σύνολα των περιττών και άρτιων αριθμών.

Μια σχέση R στο σύνολο E ονομάζεται **αντισυμμετρική** ανν για κάθε $a, b \in E$ το πολύ ένα από (a, b) και (b, a) ανήκει στην σχέση R.
Παράδειγμα Αν η R είναι αντισυμμετρική τότε
$(1, 2) \in R \Rightarrow (2, 1) \notin R$.
Ισοδύναμα μια σχέση R είναι αντισυμμετρική αν έχει την ιδιότητα ότι αν aRb και bRa τότε $a = b$.

Σχέσεις διάταξης

Μια σχέση R στο E ονομάζεται (μερική) **διάταξη** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες :
(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $\alpha \in E$ (**ανακλαστική**)
(ii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**αντισυμμετρική**)
(iii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma \Longrightarrow \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).
Συνήθως η σχέση διάταξης σημειώνεται με $\leq$.
Η διάταξη ονομάζεται **ολική** αν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\alpha \leq \beta \text{ ή } \beta \leq \alpha, \ \forall \alpha, \beta \in E.$$

Παραδείγματα

1. Η σχέση $\leq$ στο $\mathbb{R}$ είναι ολική διάταξη, ενώ η σχέση $<$ στο $\mathbb{R}$ δεν είναι διάταξη.

2. Η σχέση διαιρετότητας $\mid$ στο $\mathbb{N}^*$ είναι μερική διάταξη.

Άσκηση 3 (Μερική διάταξη διαιρετότητας)

Στο σύνολο $\mathbb{N}^*$*, ορίζουμε την σχέση διαιρετότητας* $\mid$ *ως εξής*

$$\begin{aligned} x \mid y &\Leftrightarrow x \text{ διαιρεί τον } y \\ &\Leftrightarrow \text{υπάρχει } k \in \mathbb{N}^* \text{ ώστε } y = kx. \end{aligned}$$

1. *Να δειχθεί ότι η σχέση διαιρετότητας* $\mid$ *είναι σχέση μερικής διάταξης στο* $\mathbb{N}^*$.
2. *Είναι η σχέση διαιρετότητας* $\mid$ *σχέση ολικής διάταξης στο* $\mathbb{N}^*$*;*

Λύση του (1).

(Ανακλαστική ιδιότητα.) Για κάθε $x \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $x = 1 \cdot x$, άρα $x \mid x$.
(Αντισυμμετρική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid x$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $x = k_2 y$, οπότε $y = k_1 k_2 y$ και

$$y = k_1 k_2 y \Rightarrow k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow x = y.$$

(Μεταβατική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid z$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $z = k_2 y$, οπότε $z = k_2 k_1 x$. Επειδή $k_2 k_1 \in \mathbb{N}^*$ έπεται ότι $x \mid z$.
Κατόπιν τούτων, η σχέση $\mid$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N}^*$.
Λύση του (ii). Δεν είναι ολική διάταξη στο $\mathbb{N}^*$, διότι υπάρχουν αριθμοί στο $\mathbb{N}^*$ που δεν συγκρίνονται. Για παράδειγμα,

$$3 \nmid 5 \text{ και } 5 \nmid 3.$$

$\square$

3. Η σχέση εγκλεισμού $\subseteq$ στο $\mathcal{P}(E)$ είναι μερική διάταξη.
Πράγματι, ισχύουν οι ιδιότητες
(i) $A \subseteq A$ για κάθε $A \subseteq E$.
(ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$ για κάθε $A, B \subseteq E$.
(iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \subseteq C$ για κάθε $A, B, C \subseteq E$.
Η σχέση αυτή δεν είναι ολική, αφού για παράδειγμα τα σύνολα $\{x\}$ και $\{y\}$ δεν συγκρίνονται όταν $x \neq y$.

Ένα σύνολο E εφοδιασμένο με μια μερική (αντίστοιχα ολική) διάταξη ονομάζεται **μερικά** (αντίστοιχα **ολικά**) διατεταγμένο σύνολο και σημειώνεται με $(E, \leq)$.

Φραγμένα σύνολα

Αν $(E, \leq)$ είναι ένα διατεταγμένο σύνολο και A είναι ένα μη κενό υποσύνολό του τότε ένα στοιχείο $\alpha \in E$ (αντίστοιχα $\beta \in E$) ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) φράγμα του A όταν $x \leq \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leq x$) για κάθε $x \in A$. Όταν υπάρχει ένα τουλάχιστον άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα ενός συνόλου A, τότε το σύνολο αυτό ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) **φραγμένο** σύνολο.

Αν A είναι ένα άνω (αντίστοιχα κάτω) φραγμένο υποσύνολο του $(E, \leq)$ τότε ένα στοιχείο $s \in E$ (αντίστοιχα $i \in E$) που ικανοποιεί τις ιδιότητες:
(i) s είναι άνω φράγμα (αντίστοιχα i είναι κάτω φράγμα).
(ii) $s \leq \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leq i$) για κάθε άνω φράγμα α (αντίστοιχα κάτω φράγμα β) του A ονομάζεται **supremum ή άνω πέρας** (αντίστοιχα **infimum ή κάτω πέρας**) του A και σημειώνεται με $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$).

Πρέπει να τονισθεί ότι τα $\sup A$ και $\inf A$ δεν υπάρχουν πάντα για ένα σύνολο. Όταν όμως υπάρχουν είναι μοναδικά. Γενικά το $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$) δεν ανήκει υποχρεωτικά στο σύνολο A. Όμως, στην περίπτωση που ανήκει ονομάζεται **μέγιστο** (αντίστοιχα **ελάχιστο**) στοιχείο του A και σημειώνεται με $\max A$ (αντίστοιχα $\min A$).

Παραδείγματα

1. Για το ολικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{R}, \leq)$ είναι:

α) Αν $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ τότε $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$.

Το 1 είναι μέγιστο στοιχείο του A, διότι $1 \in A$, ενώ το A δεν έχει ελάχιστο, αφού $0 \notin A$.

β) Αν $A = (\alpha, \beta)$ τότε $\sup A = \beta$ και $\inf A = \alpha$.

Το A δεν έχει μέγιστο, ούτε ελάχιστο στοιχείο, αφού τα α, β δεν ανήκουν στο A.

2. Για το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}^*, |)$, όπου $|$ είναι η σχέση διαιρετότητας και $A = \{4, 16, 28, 40\}$ ισχύει ότι

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ είναι άνω φράγμα του } A$$

$$\Leftrightarrow 4|n \text{ και } 16|n \text{ και } 28|n \text{ και } 40|n$$

$$\Leftrightarrow n \text{ κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του } A$$

Οπότε, το ελάχιστο άνω φράγμα του A θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του A, δηλαδή

$$\sup A = \text{ΕΚΠ}(4, 16, 28, 40) = 560.$$

Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\inf A = \text{ΜΚΔ}(4, 16, 28, 40) = 4.$$

3. Για το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ όπου $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ και

$$A = \{\{2, 4, 8\}, \{6, 8\}, \{2, 8, 10\}, \{4, 8\}\}$$

ισχύουν ότι

$$B \text{ είναι άνω φράγμα του } A$$

$$\Leftrightarrow \{2, 4, 8\} \subseteq B, \{6, 8\} \subseteq B, \{2, 8, 10\} \subseteq B, \{4, 8\} \subseteq B$$

Οπότε, το ελάχιστο άνω φράγμα του A θα είναι το ``μικρότερο'' τέτοιο σύνολο B, δηλαδή η ένωση όλων των στοιχείων του A. Κατόπιν τούτου, είναι

$$\sup A = \{2, 4, 8\} \cup \{6, 8\} \cup \{2, 8, 10\} \cup \{4, 8\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\inf A = \{2, 4, 8\} \cap \{6, 8\} \cap \{2, 8, 10\} \cap \{4, 8\} = \{8\}.$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Έστω E ένα μη κενό σύνολο και $A, B, C \subseteq E$. Να δειχθεί ότι
$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$
(Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την διαφορά.)

2. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ ορίζουμε μια σχέση R ως εξής:
$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } k \in Z \text{ ώστε } y - x = 3k.$$
Για παράδειγμα,
$$2R5, \text{ διότι } 5 - 2 = 3 \cdot 1$$
$$2R8, \text{ διότι } 8 - 2 = 3 \cdot 2$$
$$8R2, \text{ διότι } 2 - 8 = 3 \cdot (-2)$$
$$(3, 7) \notin R \text{ διότι δεν υπάρχει } k \in \mathbb{Z} \text{ ώστε } 7 - 3 = 4 = 3k.$$
Να δειχθεί ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}$.

3. Έστω R σχέση στο $\mathbb{N}$, με $xRy \Leftrightarrow x = y^k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Να δειχθεί ότι η R είναι σχέση μερικής διάταξης. Είναι η R σχέση ολικής διάταξης;

Ασκήσεις προς επίλυση

4. Έστω το διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}^*, |)$ και

$$A_1 = \{32, 80, 160, 640\}$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ περιττός }, n^2 \leq 40\}$$

Να ευρεθούν τα supremum και infimum των παραπάνω συνόλων. Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;

5. Έστω το διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ όπου $E = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$

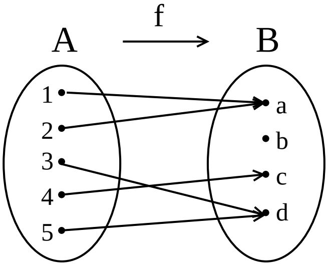
$$A_1 = \{\{10, 15\}, \{5, 20, 25\}, \{10, 30\}, \{20, 35\}\}$$

$$A_2 = \{\{10, 20, 25\}, \{5, 10, 40\}, \{5, 10, 35\}, \{5, 10, 20, 40\}\}$$

Να ευρεθούν τα supremum και infimum των παραπάνω συνόλων. Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;

Απεικονίσεις

Δίνονται δύο μη κενά σύνολα A, B και ένας κανόνας (που συνήθως μπορεί να περιγραφεί από ένα τύπο) με τον οποίο αντιστοιχίζουμε σε κάθε στοιχείο του A ένα και μόνο ένα στοιχείο του B. Τότε ορίζεται μια απεικόνιση f του A στο B (συμβολισμός $f : A \to B$).



Το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και συμβολίζεται με $D(f)$ ή D_f τα δε στοιχεία του ονομάζονται **πρότυπα**. Αν το πρότυπο α αντιστοιχίζεται μέσω της f στο στοιχείο β τότε σημειώνουμε $f(\alpha) = \beta$. Στην περίπτωση αυτή το β ονομάζεται **εικόνα** του στοιχείου α.

Το υποσύνολο του B που αποτελείται από όλες τις εικόνες ονομάζεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $R(f)$ ή R_f, δηλαδή

$$R(f) = \{\beta \in B : \text{ υπάρχει } \alpha \in A \text{ με } f(\alpha) = \beta\} = \{f(x) : x \in D(f)\}$$

Μια απεικόνιση $f : A \to \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής** (ή απλά **συνάρτηση**). Στην περίπτωση αυτή το τυχαίο στοιχείο του A συμβολίζεται συνήθως με x και ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** ενώ η εικόνα του $y = f(x)$ ονομάζεται **τιμή** της ανεξάρτητης μεταβλητής. Το τυχαίο στοιχείο $y \in R(f)$ ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Γενικότερα, αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ η απεικόνιση $f : A \to R$ ονομάζεται πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών. Εδώ έχουμε n το πλήθος ανεξάρτητες μεταβλητές και μια εξαρτημένη $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Όταν μια πραγματική συνάρτηση f, n μεταβλητών, δε συνοδεύεται από το πεδίο ορισμού της, τότε ως $D(f)$ νοείται το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in D(f)$ μπορεί να ορισθεί ο αριθμός $f(x) \in \mathbb{R}$.

Βασικές απεικονίσεις

Η απεικόνιση $f : A \to A$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in A$ ονομάζεται **ταυτοτική απεικόνιση** του A και σημειώνεται με 1_A.
Μια απεικόνιση f ονομάζεται **σταθερή** αν το σύνολο τιμών της είναι μονοσύνολο, δηλαδή $R(f) = \{\beta\}$.

Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός συνόλου E τότε η απεικόνιση $f : E \to \{0, 1\}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση του** A και συμβολίζεται με μ_A (ή χ_A). Η χαρακτηριστική συνάρτηση χρησιμεύει για τον καθορισμό των σχέσεων και πράξεων των συνόλων όπως φαίνεται και από την επόμενη άσκηση.

Παράδειγμα

$E = [10]$, $A = \{1, 3, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 9, 10\}$, $A \cap B = \{3, 9\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

Στην περίπτωση αυτή, η χαρακτηριστική συνάρτηση οποιουδήποτε υποσυνόλου F του E μπορεί να αναπαρασταθεί από μια 10-άδα (δυαδική λέξη)

$$\mu_F = (\mu_F(1), \mu_F(2), \ldots, \mu_F(10))$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\mu_A &= (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \\
\mu_B &= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) \\
\mu_{A \cap B} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
\mu_{A \cup B} &= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x), \forall x \in E.$

$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in E.$

Αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις

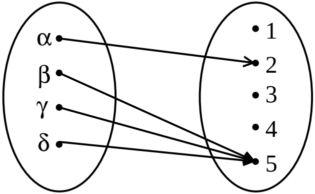
(i) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται $1-1$ όταν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά πρότυπα έχουν διαφορετικές εικόνες, δηλαδή

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

Ισοδύναμα για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
(ii) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **επί** όταν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A, δηλαδή όταν $B = R(f)$.
(iii) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** όταν είναι $1-1$ και επί.

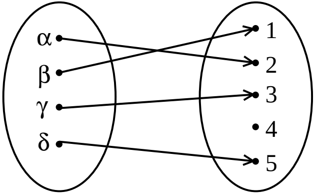
Παραδείγματα

α)



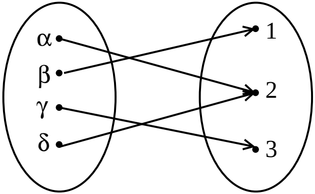
Δεν είναι ούτε 1-1 ούτε επί.

β)



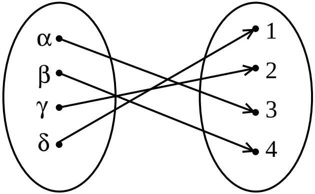
Είναι 1-1 αλλά όχι επί.

γ)



Είναι επί αλλά όχι 1-1.

δ)



Είναι αμφιμονοσήμαντη.

Άσκηση 4

Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f : [0, 1] \to [5, 8]$ *με* $f(x) = 3x + 5$ *είναι αμφιμονοσήμαντη.*

Λύση.

Έστω $x_1, x_2 \in A = [0, 1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι $1-1$.
Έστω $y \in B = [5, 8]$ με $f(x) = y$ τότε

$$5 \leq y \leq 8 \Leftrightarrow 5 \leq 3x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [5, 8]$ υπάρχει $x \in [0, 1]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = 3x + 5$ προκύπτει ότι $x = \dfrac{y-5}{3}$.
Άρα, η f είναι αμφιμονοσήμαντη. $\square$

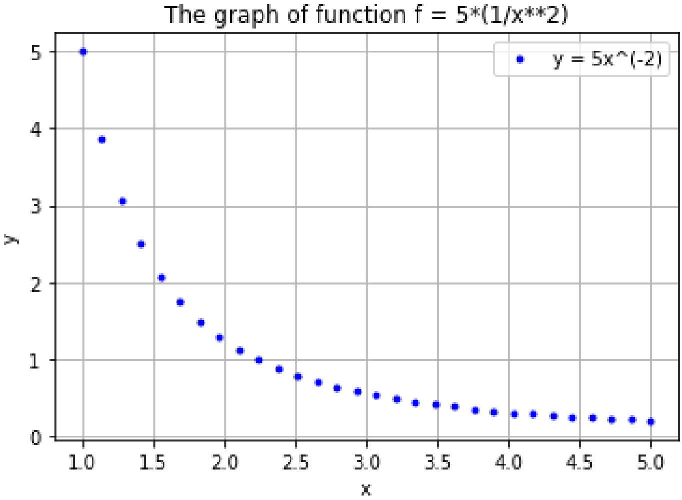
Γραφική παράσταση

Έστω η απεικόνιση $f : A \to B$, τότε το σύνολο

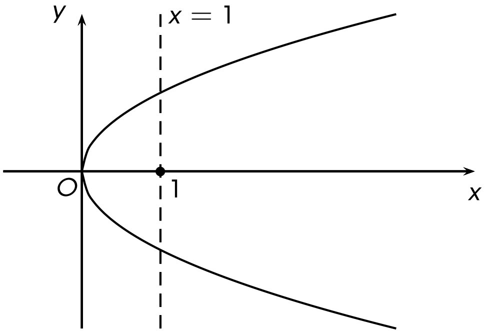
$$\{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$$

ονομάζεται **γραφική παράσταση** ή (**διάγραμμα**) της απεικόνισης f και συμβολίζεται με $G(f)$ (ή G_f).
Η γραφική παράσταση μιας πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής συνήθως είναι δυνατό να σχεδιασθεί στο Καρτεσιανό επίπεδο και έχει την ιδιότητα ότι κάθε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα Oy την τέμνει σε ένα το πολύ σημείο.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#function f(x) = 5x^(-2)
f = lambda x: 5*(1/x**2)

#create n points (x,f(x)), 1 <= x <= 5
n = 30
x = np.linspace(1, 5, n)
y = f(x)

#plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, y, 'b.', label = 'y = 5x^(-2)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)
plt.title("The graph of function f = 5*(1/x**2)")
plt.legend()
plt.show()
```

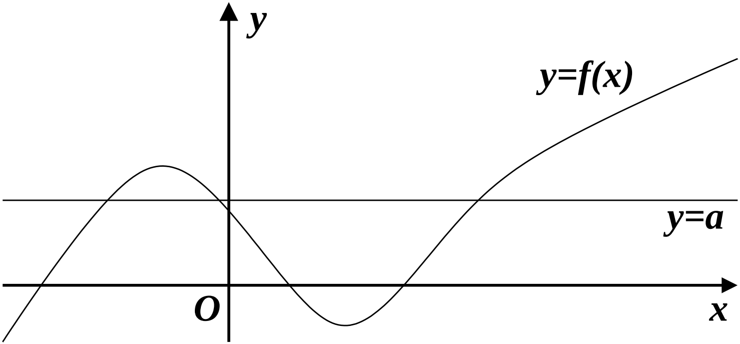

The graph of function f = 5*(1/x**2)
y = 5x^(-2)
y
x
0
1
2
3
4
5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0

Παράδειγμα. Η καμπύλη του επόμενου σχήματος δεν είναι γραφική παράσταση κάποιας πραγματικής συνάρτησης της μεταβλητής x, διότι τέμνεται από την ευθεία $x = 1$ σε 2 σημεία.



Αν η συνάρτηση είναι $1-1$, τότε και κάθε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα Ox πρέπει να την τέμνει σε ένα το πολύ σημείο.

Παράδειγμα



Η συνάρτηση $y=f(x)$ δεν είναι $1-1$ διότι τέμνεται από την ευθεία $y=a$ σε τρία σημεία.

Υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων δεν είναι δυνατό να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση του Dirichlet που ορίζεται ως εξής:

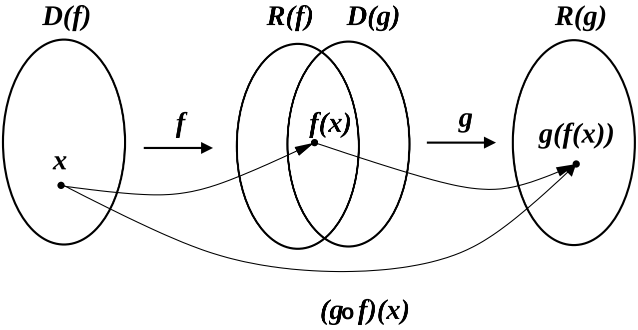
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Σύνθεση απεικονίσεων

Δίνονται δύο απεικονίσεις f, g με $R(f) \cap D(g) \neq \emptyset$.
Τότε ορίζεται μια καινούρια απεικόνιση που ονομάζεται **σύνθεση** της g με την f, και συμβολίζεται με $g \circ f$, ως εξής:

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\},$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Παράδειγμα

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = \sqrt{x-6}$. Τότε $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [2, +\infty)$, $D(g) = [6, +\infty)$ και $R(g) = [0, +\infty)$.
Είναι $D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 \geq 6\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) - 6} = \sqrt{x^2 - 4}$.
Επιπλέον, $D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \{x \in [6, +\infty) : \sqrt{x-6} \in \mathbb{R}\} = [6, +\infty)$
και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 2 = x - 4$.
Οπως προκύπτει και από το προηγούμενο παράδειγμα οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ είναι εν γένει διαφορετικές.

Άσκηση

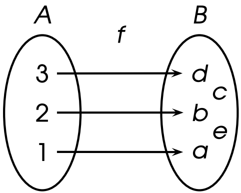
Δίνονται οι συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$. Να δειχθεί ότι αν f, g είναι $1-1$ (αντίστοιχα επί) τότε και η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι $1-1$ (αντίστοιχα επί).

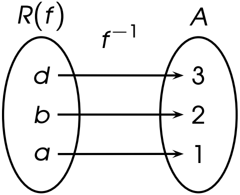
Αντίστροφη απεικόνιση

Έστω $f : A \to B$ μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, τότε η **αντίστροφη απεικόνιση** της f, που συμβολίζεται με f^{-1}, είναι η απεικόνιση που σε κάθε $y \in B$ αντιστοιχεί το μοναδικό $x \in A$ με $f(x) = y$, δηλαδή ισχύει :

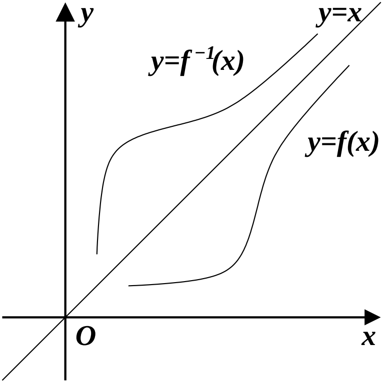
$$f^{-1} : B \to A \text{ με } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Εύκολα προκύπτει ότι $f^{-1} \circ f = 1_A$ και $f \circ f^{-1} = 1_B$.
Προκειμένου να ορίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση μιας $1 - 1$ αλλά όχι επί απεικόνισης $f : A \to B$ θεωρούμε αντί του συνόλου B το σύνολο $R(f)$ και ορίζουμε την $f^{-1} : R(f) \to A$.
Παράδειγμα. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται μια απεικόνιση $f : A \to B$ και η αντίστροφή της, όπου $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{a, b, c, d, e\}$.





Η γραφική παράσταση της αντίστροφης μια αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης μιας μεταβλητής f στο Καρτεσιανό επίπεδο είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$.



Άσκηση Αν $f : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$ είναι δυο αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις τότε $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Εικόνες συνόλων

Αν $f : A \to B$ είναι μια απεικόνιση και $\Gamma \subseteq A$, $\Delta \subseteq B$ τότε τα σύνολα

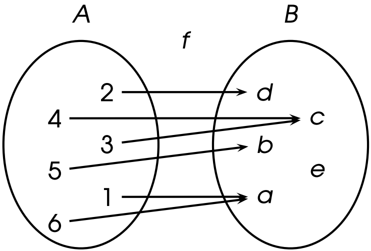
$$f(\Gamma) = \{y \in B : \text{ υπάρχει } x \in \Gamma \text{ με } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in \Gamma\}$$

και

$$f^{-1}(\Delta) = \{x \in A : f(x) \in \Delta\}$$

ονομάζονται αντίστοιχα **εικόνα** του Γ και **αντίστροφη εικόνα** του Δ.

Παράδειγμα



$f(\{2,3\}) = f(\{2,3,4\}) = \{c,d\}$
$f^{-1}(\{a,c\}) = f^{-1}(\{a,c,e\}) = \{1,6,3,4\}$
$f(f^{-1}(\{a,c,e\})) = f(\{1,6,3,4\}) = \{a,c\} \subset \{a,c,e\}$
$f^{-1}(f(\{2,3\})) = f^{-1}(\{c,d\}) = \{2,3,4\} \supset \{2,3\}.$

Εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες

1. $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $f(f^{-1}(\Delta)) \subseteq \Delta$ και $f^{-1}(f(\Gamma)) \supseteq \Gamma$.
3.
   1. $f(\Gamma_1) \subseteq f(\Gamma_2)$, όταν $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq A$.
   2. $f^{-1}(\Delta_1) \subseteq f^{-1}(\Delta_2)$, όταν $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq B$.
4.
   1. $f(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = f(\Gamma_1) \cup f(\Gamma_2)$, όταν $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq A$.
   2. $f^{-1}(\Delta_1 \cup \Delta_2) = f^{-1}(\Delta_1) \cup f^{-1}(\Delta_2)$, όταν $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq B$.
5.
   1. $f(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \subseteq f(\Gamma_1) \cap f(\Gamma_2)$, όταν $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq A$.
   2. $f^{-1}(\Delta_1 \cap \Delta_2) = f^{-1}(\Delta_1) \cap f^{-1}(\Delta_2)$, όταν $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq B$.

Πρόταση. Για μια απεικόνιση $f : A \to B$ ισχύουν

(i) f $1-1$ αν και μόνον αν $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma, \forall \Gamma \subseteq A$.

(ii) f επί αν και μόνον αν $f(f^{-1}(\Delta)) = \Delta, \forall \Delta \subseteq B$.

(iii) f $1-1$ αν και μόνον αν $f(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = f(\Gamma_1) \cap f(\Gamma_2)$ για κάθε $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq A$.

Απόδειξη της (i)

Έστω ότι η απεικόνιση f είναι $1-1$· θα δειχθεί ότι $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$. Σύμφωνα με την ιδιότητα 2, αρκεί να δειχθεί ότι $f^{-1}(f(\Gamma)) \subseteq \Gamma$. Πραγματικά, αν $x \in f^{-1}(f(\Gamma))$ τότε $f(x) \in f(\Gamma)$ οπότε θα υπάρχει $\xi \in \Gamma$ με $f(x) = f(\xi)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι $1-1$ έπεται ότι $x = \xi$ οπότε $x \in \Gamma$. Αντίστροφα αν $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma \; \forall \Gamma \subseteq A$, θα δειχθεί ότι η f είναι $1-1$. Πραγματικά, αν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ εφαρμόζουμε τη δοσμένη ισότητα για $\Gamma = \{x_1\}$, οπότε προκύπτει ότι $x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$ και επομένως $x_1 = x_2$.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να αποδειχθούν τα παρακάτω
(i) $A = B$ αν και μόνο αν $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in E$.
(ii) $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in E$.
(iii) $\mu_A(x) + \mu_{\overline{A}}(x) = 1$ για κάθε $x \in E$.
(iv) $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x), \forall x \in E$.
(v) $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in E$.
(Υπόδειξη: Διακρίνετε περιπτώσεις για το $x \in E$)
2. Σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι $1-1$, επί, ή αμφιμονοσήμαντη;
(i) $A = [0, 1]$, $B = [5, 9]$ και $f(x) = 3x + 5$.
(ii) $A = [-2, 2]$, $B = [0, 4]$ και $f(x) = x^2$.
(iii) $A = [0, 2]$, $B = [\frac{1}{3}, 1]$ και $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
3. Δίνονται τα σύνολα $A = \{2^3, 2^4, 2^5, \ldots\}$ και $B = \{4^6, 4^8, 4^{10}, \ldots\}$. Να δοθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : A \to B$.
4. Έστω $A = \{1, 2, 4, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ και $f : A \to B$ με $f(x) = (x-5)(x-4)$. Να βρεθούν τα σύνολα $f(A)$, $f(\{3, 4\})$, $f(\emptyset)$, $f(\{1, 2, 6\})$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{0, 2\})$,