Αρχή του Περιστερεώνα (Παράγραφος 2.3)

Εισαγωγικό παράδειγμα

Υπάρχουν $\binom{20}{11} = 167960$ τρόποι να επιλέξουμε 11 αριθμούς από το σύνολο $[20] = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$.

Μια τέτοια επιλογή είναι για παράδειγμα οι αριθμοί

$\{2, 5, 6, 7, 10, 11, 17, 18, 19, 20, 13\}$

Όποια επιλογή και να κάνουμε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Υπάρχουν (τουλάχιστον) 2 διαδοχικοί αριθμοί
2. Υπάρχουν (τουλάχιστον) 2 αριθμοί με διαφορά 10.
3. Υπάρχουν (τουλάχιστον) 2 αριθμοί με άθροισμα 21.
4. Υπάρχουν (τουλάχιστον) 2 αριθμοί που ο ένας είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Πως είμαστε σίγουροι ότι ισχύουν αυτές οι ιδιότητες;

Υπάρχει μια ιδέα η οποία μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι κάποιες καταστάσεις $\boxed{\text{υπάρχουν}}$ χωρίς όμως να χρειάζεται να τις κατασκευάσουμε ή να τις βρούμε

Η ιδέα αυτή ονομάζεται <u>αρχή του περιστερεώνα</u> ή <u>αρχή της περιστεροφωλιας</u> (<u>pigeonhole principle</u>) ή <u>αρχή του Diríchlet</u>, ή <u>box principle</u> και η διατύπωση της είναι πολύ απλή

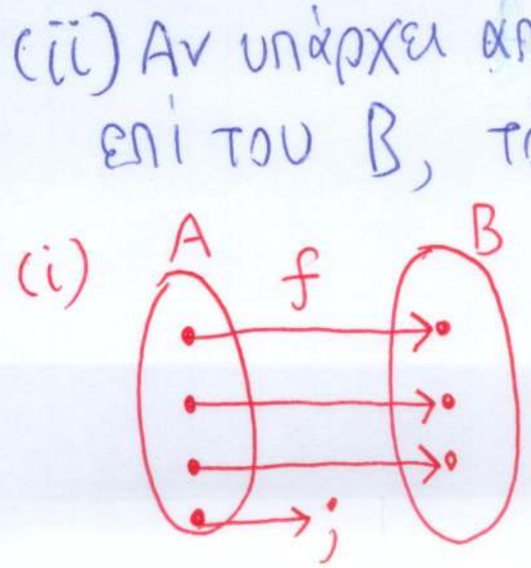
<u>Αρχή του Περιστερεώνα (1η εκδοχή)</u>

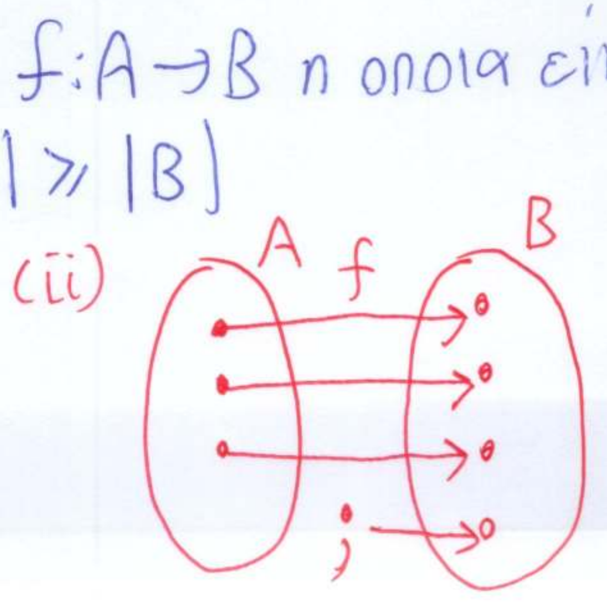
Εστω A, B πεπερασμένα σύνολα

(i) Αν υπάρχει 1-1 απεικόνιση $f: A \to B$, τότε

$$|A| \leq |B|$$

(ii) Αν υπάρχει απεικόνιση $f: A \to B$ η οποία είναι επί του B, τότε $|A| \geq |B|$





Ισοδύναμα, με αντιθετοαναστροφή

Αρχή του Περιστερεώνα (2η εκδοχή)

Έστω A, B πεπερασμένα σύνολα.

(i) Αν $|A| > |B|$, τότε κάθε απεικόνιση $f: A \to B$ δεν είναι 1-1

(ii) Αν $|A| < |B|$, τότε κάθε απεικόνιση $f: A \to B$ δεν είναι επί.

Παραδείγματα

$\boxed{1}$ Σε κάθε ομάδα 13 ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που έχουν το ίδιο ζώδιο.

Πράγματι, έστω

A το σύνολο των 13 ατόμων

B το σύνολο των ζωδίων

Για κάθε άτομο $x \in A$ ορίζουμε $f(x) =$ το ζώδιο του x

Τότε $f: A \to B$ και $|A| = 13 > 12 = |B|$

Άρα, η f δεν είναι 1-1

Δηλαδή υπάρχουν άτομα $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2)$, δηλαδή οι x_1, x_2 έχουν το ίδιο ζώδιο.

$\boxed{2}$ Πόσα φύλλα πρέπει να τραβήξουμε από μια τράπουλα ώστε να εξασφαλίσουμε ότι θα βρούμε δυο τουλάχιστον φύλλα με το ίδιο χρώμα;

Υπάρχουν 4 διαφορετικά χρώματα, άρα πρέπει να τραβήξουμε 5 φύλλα.

Πράγματι, έστω

A το σύνολο των 5 φύλλων που επιλέξαμε

B το σύνολο των 4 χρωμάτων

Για κάθε φύλλο $x \in A$ ορίζουμε $f(x) =$ το χρώμα του x

Τότε $f : A \to B$ και $|A| = 5 > 4 = |B|$

Άρα, η f δεν είναι 1-1.

Δηλαδή υπάρχουν φύλλα $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2)$, δηλαδή τα x_1, x_2 έχουν το ίδιο χρώμα.

$\boxed{3}$ Να δειχθεί ότι αν επιλέξουμε 11 διαφορετικούς αριθμούς από το σύνολο $[20]=\{1,2,..,20\}$ τότε

(α) Υπάρχουν 2 (τουλάχιστον) διαδοχικοί αριθμοί

Εστω A το σύνολο των 11 αριθμών που επιλέξαμε

και

B το σύνολο των 10 ζευγών

$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},..,\{17,18\},\{19,20\}\}$

Τα ζευγη του B αποτελούν μια διαμέριση του $[20]$ με την ιδιότητα τα στοιχεία κάθε ζευγους να είναι διαδοχικοί αριθμοι.

Για κάθε $x\in A$ ορίζουμε την απεικόνιση $g:A\to B$ η οποια αντιστοιχίζει το x στο δισύνολο του B που περιέχει το x.

Παράδειγματα $g(1)=\{1,2\}$
$g(2)=\{1,2\}$
$g(7)=\{7,8\}$
$g(12)=\{11,12\}$

Επειδή $|A|=11>10=|B|$ έπεται οτι η g δεν είναι 1-1, άρα υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$

ώστε $g(x_1) = g(x_2)$ δηλαδη τα x_1, x_2 ανήκουν στο ιδιο ζεύγος του B, άρα είναι διαδοχικοί αριθμοί.

(β) Υπάρχουν (τουλάχιστον) 2 αριθμοί που διαφέρουν ακριβώς 10

Εστω A το σύνολο των 11 αριθμών που επιλέξαμε και B το σύνολο των 10 ζευγων

$\{\{1,11\}, \{2,12\}, \{3,13\}, \ldots, \{9,19\}, \{10,20\}\}$

Τα ζεύγη του B αποτελούν διαμέριση του $[20]$ με την ιδιότητα ότι τα στοιχεία κάθε ζεύγους διαφέρουν ακριβώς κατά 10.

Για κάθε $x \in A$ ορίζουμε την απεικόνιση $h: A \to B$ η οποια αντιστοιχίζει το x στο δισύνολο του B που περιέχει το x.

Παραδείγματα

$h(3) = \{3,13\}$, $h(11) = \{1,11\}$, $h(15) = \{5,15\}$

Επειδη $|A| = 11 > 10 = |B|$ επεται ότι η h δεν είναι 1-1, άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $h(x_1) = h(x_2)$ δηλαδη τα x_1, x_2 ανήκουν στο ίδιο ζεύγος του B, άρα διαφέρουν ακριβώς 10.

(8) Υπάρχουν (τουλάχιστον) 2 αριθμοί με άθροισμα 21

Υπόδειξη: Θεωρείστε το σύνολο των ζευγών

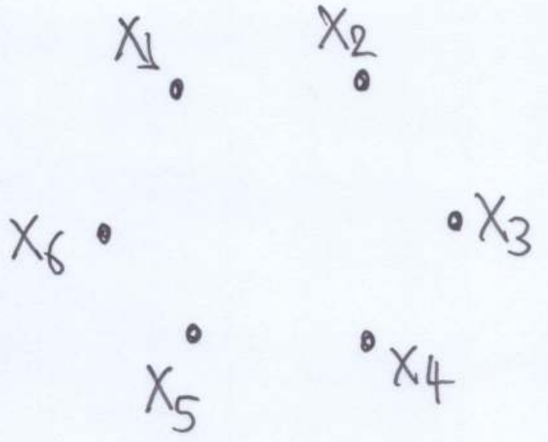
$\{\{1,20\},\{2,19\},\{3,18\},\ldots,\{10,11\}\}$

$\boxed{4}$ (Κατηγορίες ομάδων ατόμων)

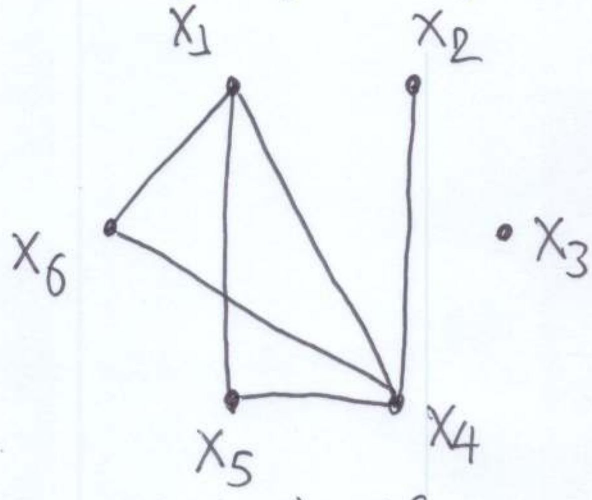
Έστω A μια ομάδα ατόμων.

Κάθε άτομο $x \in A$ αναπαρίσταται από μια τελεία

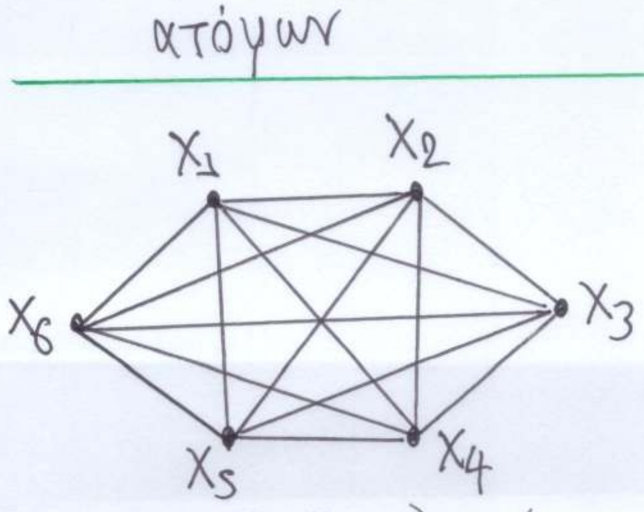
Αν δυο άτομα $x, y \in A$ είναι φίλοι τότε οι αντίστοιχες τελείες ενώνονται με μια γραμμή



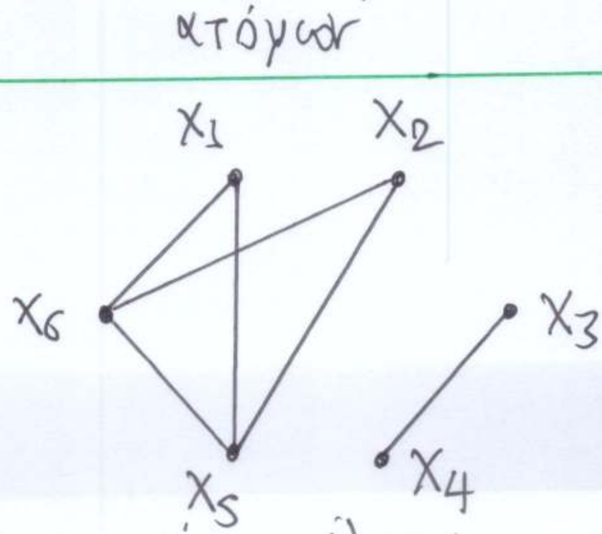
Μια ομάδα απομονωμένων ατόμων



Μια "τυχαία" ομάδα ατόμων



Μια "κλίκα" φίλων



Δυο παρέες φίλων

Αν η ομάδα A περιέχει n άτομα υπάρχουν $2^{\binom{n}{2}}$ διαφορετικοί τρόποι να συνδέονται αυτά τα άτομα.

Για παράδειγμα, αν $n=6$ υπάρχουν $2^{\binom{6}{2}} = 2^{15} = 32768$ διαφορετικοι τρόποι να συνδεονται τα 6 άτομα με σχέση φιλίας.

Μπορούμε να διατυπώσουμε κάποια συμπεράσματα τα οποια να ισχυουν σε κάθε ομάδα ατόμων;
Η απάντηση είναι ΝΑΙ.
Ενα τέτοιο συμπέρασμα είναι το εξής:

(α) Σε κάθε ομάδα n ατόμων, οπου $n \geq 2$, υπάρχουν (τουλάχιστον) δυο άτομα που έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων στην ομάδα.

Εστω A το σύνολο των n ατομων και
$f: A \to \mathbb{N}$ με $f(x)$ = το πλήθος των φίλων του x που ανήκουν στην ομάδα A

Προφανως

$$0 \leq f(x) \leq n-1 \quad \forall x \in A$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \{0, 1, 2, .., n-1\}$$

Η παρατήρηση κλειδί όμως είναι η εξής:
Δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν $x, y \in A$ με

$$f(x)=0 \quad \text{και} \quad f(y)=n-1$$

ο x δεν έχει κανένα φίλο

ο y είναι φίλος με όλους

Άρα, ή $f(x) \in \{0,1,2,\dots,n-2\} \quad \forall x \in A$

ή $f(x) \in \{1,2,\dots,n-1\} \quad \forall x \in A$

Επειδή

$$|A| = n > n-1 = |\{0,1,\dots,n-2\}| = |\{1,2,\dots,n-1\}|$$

έπεται ότι η f δεν είναι 1-1.
Άρα, υπάρχουν άτομα $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2)$ δηλαδή οι x_1, x_2 έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων στην ομάδα A.

Μπορούμε να διατυπώσουμε (και να αποδείξουμε) και άλλες προτάσεις που ισχύουν σε οποιαδήποτε ομάδα ατόμων

Δίδονται δυο τέτοιες προτάσεις ως ασκήσεις (β) Σε κάθε ομάδα 6 ατόμων υπάρχουν τουλάχιστον 3 άτομα τα οποία είτε είναι ανά δύο φίλοι, είτε κανείς τους δεν είναι φίλος με τους άλλους 2.

(γ) Σε κάθε (*) ομάδα n ατόμων, όπου $n \geq 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δυο άτομα που έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων στην ομάδα και είτε είναι μεταξύ τους φίλοι, είτε έχουν ένα κοινό φίλο, είτε και τα δύο.

(*) όπου υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι φίλων

Επίσης είναι γνωστή και η ρήση του Theodore Motzkin (1908-1970)

"COMPLETE CHAOS IS IMPOSSIBLE"

Δηλαδή πάντα μπορούμε να βρούμε τάξη μέσα σε δομές που μοιάζουν χαοτικές, (όπως για παράδειγμα οι διαφορετικοί τρόποι που συνδέονται τα άτομα κοινωνικών δικτύων)

Μια χρησιμη γενικευση της αρχής του περιστερεωνα διδεται στην επόμενη πρόταση

Γενικευμένη αρχή του περιστερεώνα

Εστω A, B πεπερασμένα σύνολα με $|A|>|B|$. Για κάθε απεικόνιση $f: A \to B$ υπάρχει $y \in B$ το οποιο είναι εικόνα τουλάχιστον $\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$ προτύπων δηλαδή $|f^{-1}(y)| \geq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$

$\lceil x \rceil$ = ο ελάχιστος ακέραιος που είναι μεγαλυτερος ή ισος του x.

$\lceil 1 \rceil = 1$, $\lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil 1.2 \rceil = 2$, $\lceil -1.3 \rceil = -1$

(*)

Παραδείγματα

$\boxed{1}$ Σε ενα συνέδριο συμμετέχουν 161 άτομα από 10 χωρες. Να δειχθεί οτι μια τουλάχιστον χώρα έχει στείλει στο συνέδριο τουλάχιστον 17 άτομα

Εστω A το σύνολο των 161 ατόμων
B το σύνολο των 10 χωρών

και $f: A \to B$ με $f(x)$ = η χώρα απο την οποια προέρχεται ο x

⊛ Παρατήρηση

Η 2η εκδοχή της αρχής του περιστερεώνα είναι ειδική περίπτωση της γενικευμένης αρχής.

Πράγματι, αν $|A|>|B|$ τότε για καθε απεικόνιση $f:A\to B$ υπαρχει $y\in B$ το οποιο ειναι εικονα τουλάχιστον $\underbrace{\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil}_{>1} \geq 2$ προτυπων

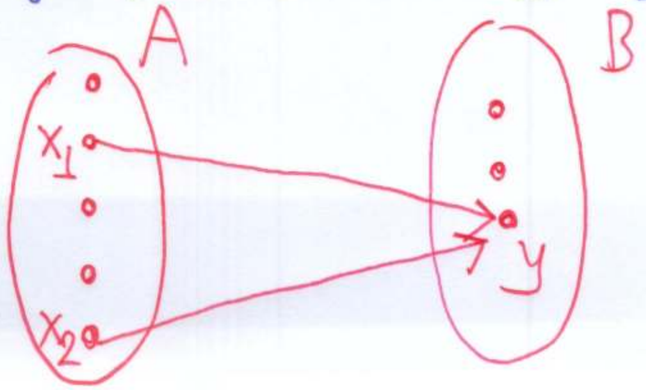
δηλαδη

$$|f^{-1}(y)| \geq 2$$

δηλαδη υπαρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και

$$f(x_1) = f(x_2) = y$$

δηλαδή η f δεν είναι $1-1$.



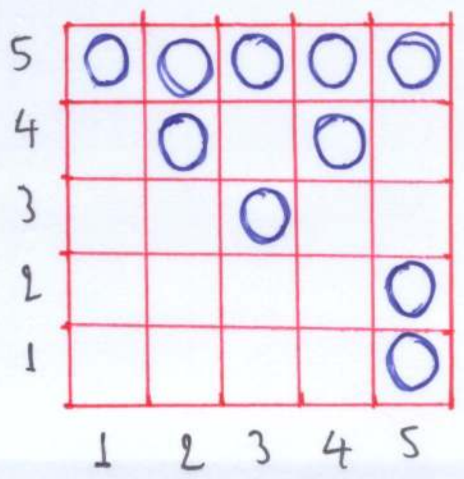
Επειδη $|A|>|B|$
Απο την γενικευμενη αρχη του περιστερεωνα υπαρχει χώρα $y \in B$ ωστε

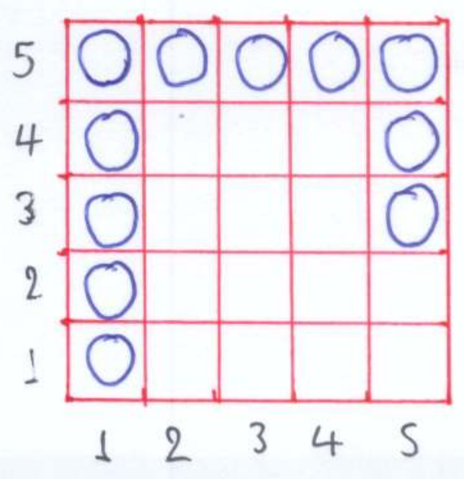
$$|f^{-1}(y)| \geq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil = \left\lceil \frac{161}{10} \right\rceil = \lceil 16.1 \rceil = 17$$

δηλαδη υπάρχει χώρα $y \in B$ από την οποία προερχονται τουλαχιστον 17 άτομα.

$\boxed{2}$ Σε μια 5x5 σκακιέρα τοποθετουνται 11 πύργοι. Να δειχθεί ότι πάντα μπορούμε να επιλέξουμε 3 από αυτούς οι οποίοι δεν απειλουνται μεταξύ τους (Δύο πύργοι απειλούνται ανν βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη της σκακιέρας)

Παραδείγματα





Διαμερίζουμε τα 25 τετράγωνα της 5x5 σκακιέρας σε 5 ομάδες οπως φαίνεται στο σχήμα

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Κάθε ομάδα αποτελείται απο τετράγωνα με τον ίδιο αριθμο. Παρατηρουμε ότι οι πύργοι τοποθέ-τηθουν στην ίδια ομάδα τετραγωνων δεν απειλουνται μεταξύ τους.

Εστω A το συνολο των τετραγωνων οπου τοποθε-τηθηκαν οι 11 πύργοι.

B το σύνολο των 5 ομάδων τετραγωνων.

$f: A \to B$ ειναι η απεικονιση που αντιστοιχιζει καθε τετραγωνο που περιεχει πυργο στην ομαδα στην οποια ανηκει το τετραγωνο.

Επειδη $|A| > |B|$ απο την γενικευμενη αρχη του περιστερεωνα υπαρχει ομάδα τετραγώνων $y \in B$ στην οποια εχουν τοποθετηθει τουλάχιστον

$$\left\lceil \frac{11}{5} \right\rceil = \lceil 2.2 \rceil = 3$$ πύργοι.

Άρα, υπάρχουν τουλάχιστον 3 πύργοι που δεν απειλουνται μεταξύ τους.

Αναζήτηση της χειρότερης περίπτωσης

Παράδειγμα

Μια κληρωτίδα περιέχει 5 Κόκκινα, 8 Μπλε 10 Λευκά, 12 Πράσινα και 7 Ροζ σφαιρίδια. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιριδίων που πρέπει να κληρωθούν ώστε να εξασφαλίσουμε

i) τουλάχιστον 2 σφαιρίδια του ίδιου χρώματος

$$\underbrace{1K + 1M + 1\Lambda + 1\Pi + 1P}_{\text{χειρότερη περίπτωση}} + 1 = 6 \text{ σφαιρίδια}$$

Απόδειξη με την αρχή του περιστερεώνα

ii) τουλάχιστον 2 σφαιρίδια διαφορετικού χρώματος

$$\underbrace{12\Pi}_{\text{worst case}} + 1 = 13 \text{ σφαιρίδια}$$

iii) τουλάχιστον 3 σφαιρίδια του ίδιου χρώματος

$$\underbrace{2K + 2M + 2\Lambda + 2\Pi + 2P}_{\text{χειρότερη περίπτωση}} + 1 = 11 \text{ σφαιρίδια}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Μια κληρωτίδα περιέχει 5 Κόκκινα, 8 Μπλε 10 Λευκά, 12 Πράσινα και 7 Ροζ σφαιρίδια. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιριδίων που πρέπει να κληρωθούν ώστε να εξασφαλίσουμε

iv) τουλάχιστον 1 πράσινο σφαιρίδιο

$$\underbrace{5K + 8M + 10\Lambda + 7P}_{\text{χειρότερη περίπτωση}} + 1 = 31 \text{ σφαιρίδια}$$

v) τουλάχιστον 1 σφαιρίδιο από κάθε χρώμα

$$\underbrace{12\Pi + 10\Lambda + 8M + 7P}_{\text{χειρότερη περίπτωση}} + 1 = 37 \text{ σφαιρίδια}$$

Γενικότερα ισχύει η επόμενη πρόταση

Πρόταση 2.13. *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο με $|S| = n$ και $S_1, S_2, \ldots, S_k$ μια διαμέριση του S σε k υποσύνολα, όπου $k < n$. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων του S που πρέπει να επιλέξουμε, ώστε να εξασφαλίσουμε ότι*

i) *δύο τουλάχιστον ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο,*

ii) *δύο τουλάχιστον ανήκουν σε διαφορετικά υποσύνολα,*

iii) *ένα τουλάχιστον ανήκει στο υποσύνολο S_j, όπου $j \in [k]$,*

iv) *υπάρχουν στοιχεία από κάθε υποσύνολο,*

v) *r τουλάχιστον ανήκουν στο ίδιο σύνολο.*

Λύση.

i) Επειδή $k < n$, από την αρχή του περιστερεώνα υπάρχει υποσύνολο της διαμέρισης με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Αρκεί να επιλέξουμε $k + 1$ στοιχεία από το S. Πράγματι, έστω A το σύνολο των $k + 1$ στοιχείων και $f : A \to \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$, με $f(x)$ το υποσύνολο στο οποίο ανήκει το x. Επειδή $|A| = k + 1 > k = |\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}|$, από την αρχή του περιστερεώνα δύο τουλάχιστον στοιχεία θα ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο.

ii) Αρκεί να επιλέξουμε $M + 1$ στοιχεία από το S, όπου $M = \max\{|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_k|\}$. Για να μην ανήκουν σε διαφορετικό υποσύνολο, θα ανήκουν στο ίδιο. Έστω λοιπόν ότι όλα ανήκουν στο S_j. Τότε

$$M + 1 \leq |S_j|,$$

άτοπο.

iii) Αρκεί να επιλέξουμε $n - |S_j| + 1$ στοιχεία από το S. Για να μην υπάρχουν στοιχεία από το υποσύνολο S_j, όλα τα στοιχεία θα ανήκουν στο σύνολο $S \setminus S_j$, οπότε

$$n - |S_j| + 1 \leq |S \setminus S_j|$$
$$n - |S_j| + 1 \leq |S| - |S_j|$$
$$n - |S_j| + 1 \leq n - |S_j|,$$

άτοπο.

iv) Αρκεί να επιλέξουμε $n - m + 1$ στοιχεία από το S, όπου $m = \min\{|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_k|\}$. Για να μην υπάρχουν στοιχεία από κάθε υποσύνολο, αρκεί να μην υπάρχουν στοιχεία από κάποιο συγκεκριμένο υποσύνολο. Έστω λοιπόν ότι δεν υπάρχουν στοιχεία από το S_j. Τότε όλα τα στοιχεία θα ανήκουν στο σύνολο $S \setminus S_j$, οπότε

$$n - m + 1 \leq |S \setminus S_j|$$
$$n - m + 1 \leq |S| - |S_j|$$
$$n - m + 1 \leq n - |S_j|$$
$$|S_j| + 1 \leq m,$$

άτοπο.

v) Αν $r > M$, όπου $M = \max\{|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_k|\}$, τότε δεν υπάρχει τέτοια επιλογή.

Έστω $r \leq M$. Έστω $L = \bigcup S_i$ η ένωση των υποσυνόλων των S_i με $|S_i| < r$ και t ο αριθμός των υποσυνόλων S_i με τουλάχιστον r στοιχεία. Αρκεί να επιλέξουμε $|L| + t(r - 1) + 1$ στοιχεία. (Γιατί;). □