18.10.14

Μαθηματικά Των Υπολογιστών Προγραμματισμένα Φροντιστήρια

1ο: Σαβ. 18.10.14 Σύνολα
2ο: Σαβ 1.11.14 Συνδυαστική
3ο: Σαβ 22.11.14 Αρχές / Διαφορές
4ο: Σαβ 6.12.14 Λογική
5ο: Σαβ 20.12.14 Λογική
6ο: Σαβ 17.1.15 Θεωρία Αριθμών

Γιάννης Τασσιάτης
jtas@unipi.gr
γραφείο 542

Ερώτηση 1

Ποια είναι η διαφορα μεταξύ συνόλου και οικογένειας;

Οικογένεια είναι ένα σύνολο, το οποίο μπορεί να περιέχει το ίδιο στοιχείο πολλές φορές.

Στα σύνολα δεν επιτρέπεται να επαναλαμβάνεται ένα στοιχείο τους, στις οικογένειες επιτρέπεται.

Παράδειγμα

{1,2,3} σύνολο και οικογένεια
{1,1,2} οικογένεια

Ερώτηση 2:

Πως αναπαρίστανται τα σύνολα στον υπολογιστή;

Υπάρχουν πολλοί τρόποι. Ένας απλός τρόπος είναι ο επόμενος:
Προϋπόθεση: Θεωρούμε ότι υπάρχει ένα βασικό σύνολο αναφοράς E το οποίο είναι <u>πεπερασμένο</u> και κάθε σύνολο A που θα χρειαστούμε είναι υποσύνολο του E.
Επίσης, θα χρειαστεί να ορίσουμε μία διάταξη (σειρά) στα στοιχεία του E.
Έστω $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ και ας υποθέσουμε ότι η διάταξη (σειρά) των στοιχείων του είναι $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Κάθε $A \subseteq E$ μπορεί να <u>κωδικοποιηθεί</u> από μία δυαδική λέξη μήκους <u>n</u> $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

$$\text{όπου } a_i = \begin{cases} 1 & \text{αν το i-στο στοιχείο του } E \text{ ανήκει στο } A. \\ 0 & \text{αν το i-στο στοιχείο του } E \text{ δεν ανήκει στο } A. \end{cases}$$

Παράδειγμα

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = [10]$

Το σύνολο

$A_1 = \{1, 3, 8\} \subseteq E$ έχει αναπαράσταση

Θεωρούμε τα στοιχεία του E διατεταγμένα σύμφωνα με τη διάταξή τους ως αριθμοί.

(1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)

$\boxed{1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0}$

$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\} \subseteq E$ έχει αναπαράσταση

0101010101

Η λέξη 1001001001 αναπαριστά το σύνολο
$A_3 = \{1, 4, 7, 10\}$

Η λέξη 0000000000 αναπαριστά το κενό σύνολο $\varnothing$.

Η λέξη 1111111111 αναπαριστά το σύνολο E.

Πλεονεκτήματα της αναπαράστασης αυτής

• Είναι "εύκολο" να εξετάσουμε αν ένα στοιχείο του E ανήκει σε ένα υποσύνολο A.
• Είναι "εύκολο" να κάνουμε πράξεις στα σύνολα χρησιμοποιώντας αυτή την αναπαράσταση.

Παράδειγμα

Έστω $|E| = n$ [$|E|$ πλήθος στοιχείων του E]
υπάρχει μία διάταξη στα στοιχεία του και $A, B \subseteq E$ και $a_1 a_2 \dots a_n$
$b_1 b_2 \dots b_n$ είναι οι αναπαραστάσεις τους.

Το συμπλήρωμα του A: A' ή $\bar{A}$
Θα έχει αναπαράσταση $c_1, c_2, \dots, c_n$ όπου $c_i = 1 - a_i$ για κάθε $i \in [n]$

Η ένωση των A και B: $A \cup B$
Θα έχει αναπαράσταση $c_1, c_2, \dots, c_n$ όπου $c_i = a_i + b_i - a_i b_i$
ή $c_i = \max\{a_i, b_i\}$

Η τομή των A και B: $A \cap B$
Θα έχει αναπαράσταση $c_1, c_2, \dots, c_n$ όπου $c_i = a_i b_i = \min\{a_i, b_i\}$

Μειονεκτήματα αυτής της αναπαράστασης

• Αν το σύνολο αναφοράς E είναι πολύ μεγάλο και τα σύνολα A που μας ενδιαφέρουν "πολύ μικρά" τότε η αναπαράσταση του A έχει μεγάλο μήκος και αποτελείται σχεδόν εξ ολοκλήρου από 0 και από λίγα 1. (Σπατάλη μνήμης).
• Δεν είναι εύκολο, πάντα, να βρίσκουμε γρήγορα τη θέση ενός στοιχείου στη διάταξη.

Καρτεσιανό γινόμενο

Αν A, B είναι δύο μη κενά σύνολα, τότε καρτεσιανό γινόμενο με πρώτο παράγοντα το A και δεύτερο παράγοντα το B, ονομάζεται το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (α, β) με $\alpha \in A$, $\beta \in B$ και συμβολίζεται με $A \times B$, δηλαδή

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}$$

Αν κάποιο από τα σύνολα A, B είναι κενό ορίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ να είναι το κενό σύνολο.

Παράδειγμα

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{x, y\}$

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$B \times B = \{(x,y), (y,x), (x,x), (y,y)\}$$

$$A \times B = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y), (3,x), (3,y)\}$$

$$B \times A = \{(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3)\}$$

Ερώτηση: Πότε $A \times B = B \times A$;
Απάντηση: α) Αν ένα από τα δύο είναι το κενό σύνολο.
β) Αν $A = B$

Σχέσεις

Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα. Κάθε μη κενό υποσύνολο R^{*} του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ ονομάζεται διμελής σχέση ή δυαδική σχέση ή απλά σχέση μεταξύ των στοιχείων των A, B

(*) R: Relations όχι $\mathbb{R}$: Reals.

Αν για τα στοιχεία $a \in A$ και $b \in B$ ισχύει ότι $(a, b) \in R$ τότε λέμε ότι τα a, b σχετίζονται μέσω της σχέσης R και γράφουμε aRb.

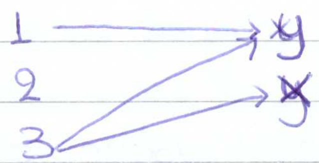
Παράδειγμα

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{x, y\}$
Μια σχέση R στο $A \times B$ είναι το σύνολο
$R = \{(1, x), (2, y)\}$
Αν το (a, b) δεν ανήκει στο R $[(a, b) \notin R]$ τότε λέμε ότι τα a, b δεν σχετίζονται μέσω της σχέσης R.

Το 1 σχετίζεται με το x, ενώ το 1 δεν σχετίζεται με το y σύμφωνα με τη σχέση R.
Άλλη μία σχέση R' είναι το σύνολο
$R' = \{(1, y), (3, x), (3, y)\}$

Τρόποι αναπαράστασης μιας σχέσης

$\boxed{1}$ Με γράφημα



Η σχέση R' μπορεί να περιγραφεί στο διπλανό σχήμα.
Γράφημα της σχέσης.

$\boxed{2}$ Με πίνακα

Η R' μπορεί να αποθηκευτεί στον επόμενο πίνακα

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3 γραμμές 2 στήλες
Πίνακας γειτνίασης ή πρόσπτωσης της σχέσης

Διαμερίσεις και σχέσεις ισοδυναμίας

Μια οικογένεια $(A_i),\ i \in I$ μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου E ονομάζεται διαμέριση αν

(1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$
(2) $\bigcup_{i \in I} A_i = E$

Παράδειγμα

$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = [8]$
Τα σύνολα
$A_1 = \{1,2,5\}$ $A_2 = \{3,4\}$ $A_3 = \{6,7,8\}$
αποτελούν μια διαμέριση του E.

Μια άλλη διαμέριση του E είναι τα σύνολα
$\{1\}, \{2,8\}, \{4,5\}, \{3,6,7\}$

Μια επιπλέον διαμέριση του E αποτελούν τα σύνολα
$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}$, δηλαδή όλα τα μονοσύνολα του E.
Τα σύνολα
$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$
$A_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
δεν είναι διαμέριση
Ούτε τα σύνολα
$B_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ $B_2 = \{5, 6, 7\}$
είναι διαμέριση.

• Μια (δυαδική) σχέση R στο $E \times E$ ονομάζεται ισοδυναμία ή σχέση ισοδυναμίας αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:
α) xRx για κάθε $x \in E$ (ανακλαστική)
β) Αν xRy τότε yRx για κάθε $x, y \in E$ (συμμετρική)
γ) Αν xRy και yRz τότε xRz για κάθε $x, y, z \in E$ (μεταβατική)

Συνήθως μια σχέση ισοδυναμίας συμβολίζεται με ~ και αν aRb γράφουμε $a \sim b$ και λέμε ότι τα a, b είναι ισοδύναμα.

• Αν S είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο E και $a \in E$ τότε το σύνολο $C_a = \{b \in E : a \sim b\}$ ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας του a.
Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας μιας σχέσης ισοδυναμίας S ονομάζεται σύνολο πηλίκο.

Παράδειγμα

E = {το σύνολο όλων των φοιτητών του Πα.Πει.}
Στο σύνολο E (πιο αυστηρά $E \times E$) ορίζουμε τη σχέση R xRy

αν και μόνο αν οι x,y είναι στο ίδιο τμήμα για κάθε $x,y \in E$.
Η σχέση R είναι ανακλαστική
Η σχέση R είναι συμμετρική
Η σχέση R είναι μεταβατική
Άρα, η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας

Η κλάση ισοδυναμίας ενός φοιτητή x είναι το σύνολο όλων των φοιτητών που βρίσκονται στο ίδιο τμήμα με τον x. (κλάση ισοδυναμίας περιέχει φοιτητές)
Το σύνολο πηλίκο αυτής της σχέσης είναι το σύνολο των τμημάτων του Πα.Πει. (Σύνολο πηλίκο περιέχει τμήματα σύνολα φοιτητών).

Παράδειγμα

$E=\{$σύνολο παικτών που συμμετέχουν σε ένα πρωτάθλημα$\}$
$R: \; xRy \Leftrightarrow y,x$ παίζουν στην ίδια ομάδα
$S: \; xSy \Leftrightarrow x,y$ έχουν την ίδια εθνικότητα

Πρόταση (Σύνδεση μεταξύ διαμερίσεων και σχέσεων ισοδυναμίας)

Κάθε σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο E ορίζει μία διαμέριση του E. Τα στοιχεία της διαμέρισης είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης.

Σχέσεις Διάταξης

Μια σχέση R στο E ονομάζεται μερική διάταξη ή απλά διάταξη όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:
α) aRa για κάθε $a \in E$ (ανακλαστική)
β) Αν aRb και bRa τότε $a=b$ (αντισυμμετρική) για κάθε $a,b \in E$

γ) <u>Αν</u> $\alpha R\beta$ <u>και</u> $\beta R\gamma$ <u>τότε</u> $\alpha R\gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (μεταβατική)

Συνήθως μία σχέση διάταξης συμβολίζεται με $\leq$

• Άλλη γραφή για το β.
β' <u>Αν</u> $\alpha \neq \beta$ <u>και</u> $\alpha R\beta$ <u>τότε</u> $\beta \not R \alpha$.

• Μία διάταξη ονομάζεται <u>ολική</u> αν ικανοποιεί την ιδιότητα:
Για κάθε $\alpha, \beta \in E$ ισχύει ότι $\alpha R\beta$ ή/και $\beta R\alpha$.

<u>Παραδείγματα</u>

Έστω $X=\{1,2,3\}$ και E το σύνολο των υποσυνόλων του X (δυναμοσύνολο του X): $P(X)$ [powerset]
Για κάθε $A, B \in E$ (ισοδύναμα $A, B \subseteq X$) ορίζουμε
$\boxed{ARB \text{ αν } A \subseteq B}$

<u>Π.χ.</u> $A=\{1\}$ $B=\{1,2\}$ τότε ARB διότι $\{1\} \subseteq \{1,2\}$
αλλά $B \not R A$ διότι $\{1,2\} \not\subseteq \{1\}$

<u>Π.χ.</u> $A=\{1,2\}$ $B=\{1,3\}$
$A \not R B$ και $B \not R A$.

• Η σχέση R είναι ανακλαστική αφού $A \subseteq A$ για κάθε $A \in E$
Η σχέση R είναι αντισυμμετρική, αφού

$$\text{αν } ARB \text{ και } BRA$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$\underbrace{A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A}_{\Downarrow}$$
$$A = B$$

• Η σχέση R είναι μεταβατική, αφού

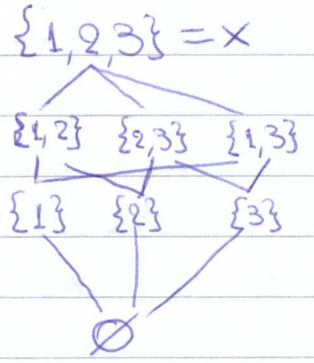
$$\left.\begin{array}{l} ARB \Rightarrow A\subseteq B \\ BR\Gamma \Rightarrow B\subseteq \Gamma \end{array}\right\} A\subseteq \Gamma \Rightarrow AR\Gamma$$

Επομένως, η σχέση R είναι σχέση διάταξης.
Η σχέση R <u>δεν είναι</u> ολική διάταξη.

Π.χ. $A=\{1\}$ $B=\{2\}$ τότε ούτε $A\subseteq B$ ούτε το $B\subseteq A$.

Οι σχέσεις μερικής διάταξης μπορούν να απεικονισθούν από το λεγόμενο <u>διάγραμμα Hasse</u>.

<u>Π.χ.</u>
$x=\{1,2,3\}$ $\quad E=P(x)=\{\emptyset, x, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$



<u>Παράδειγμα</u>

$E=\{$οι διαιρέτες του $36\}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$
Ορίζουμε τη σχέση / στο σύνολο E ως εξής:
$\alpha/\beta \Leftrightarrow$ α διαιρεί το β, για κάθε $\alpha,\beta\in E$
Η σχέση / είναι ανακλαστική [σχέση διαιρετότητας]
Η σχέση / είναι αντισυμμετρική
Η σχέση / είναι μεταβατική
Άρα, είναι μερική διάταξη
Η σχέση / δεν είναι ολική, αφού ούτε $2/3$ ούτε $3/2$