Μαθηματικά Των Υπολογιστών Φροντιστήριο 3ο

22.11.14

Άσκηση 1

Έστω E ένα σύνολο με 1000 στοιχεία και A, B⊆E για τα οποία ισχύουν $|A|=400$, $|B|=370$, $|C|=600$, $|A\cap B|=180$, $|A\cap C|=250$, $|B\cap C|=250$, $|A\cap B\cap C|=80$
Να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του E.
α) που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από το A, B, C

Τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A, B, C είναι αυτά που ανήκουν στην ένωση των A, B, C.

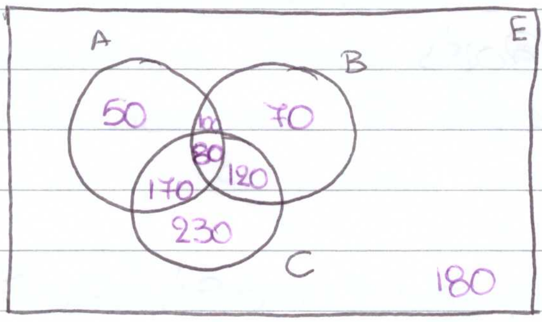
$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-(|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|)+|A\cap B\cap C| =$$
$$= 400+370+600-(180+250+250)+80 = 820$$

β) που δεν ανήκουν σε κανένα από τα A, B, C

Τα στοιχεία του E που δεν ανήκουν σε κανένα από τα A, B, C ανήκουν στην τομή των συμπληρωμάτων τους $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |\overline{A\cup B\cup C}| = |E\setminus A\cup B\cup C| = |E|-|A\cup B\cup C| =$$
$$= 1000-820 = 180$$

γ) που ανήκουν ακριβώς σε ένα από τα σύνολα A, B, C.



Ξεκινάω από το $|A\cap B\cap C|=80$, γιατί είναι το μόνο γνωστό από την εκφώνηση και στη συνέχεια, συμπληρώνω τα υπόλοιπα.

Από το παραπάνω σχήμα η απάντηση στο ζητούμενο είναι

$$\underset{|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}|}{\underset{\shortparallel}{50}}+\underset{|\bar{A}\cap B\cap\bar{C}|}{\underset{\shortparallel}{70}}+\underset{|\bar{A}\cap\bar{B}\cap C|}{\underset{\shortparallel}{230}}=350$$

Άσκηση 2 (Προσοχή!)

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ανάθεση 7 ατομικών εργασιών σε 4 άτομα, έτσι ώστε κάθε άτομο να αναλάβει τουλάχιστον μία εργασία

1ος Τρόπος: (Δεν οδηγεί σε αποτέλεσμα).
Χωρίζουμε (διαμερίζουμε) τις 7 εργασίες σε 4 ομάδες εργασιών.
Στη συνέχεια, πρέπει να διαλέξουμε πως θα αντιστοιχίσουμε κάθε μία από τις 4 ομάδες σε κάθε ένα από τα 4 άτομα.
Αν υπάρχουν x τρόποι για να κάνουμε τη διαμέριση και y τρόποι για να κάνουμε την αντιστοίχιση.
Συνολικά, υπάρχουν $x \cdot y$ για να γίνει η ανάθεση.
$y = 4!$ $x = ?$ (Διακριτά Μαθηματικά)

2ος Τρόπος:
Έστω P το σύνολο των αναθέσεων 7 ατομικών εργασιών σε 4 άτομα (χωρίς περιορισμούς).

Για την 1η εργασία υπάρχουν 4 επιλογές
Για την 2η εργασία υπάρχουν 4 επιλογές
⋮
Για την 7η εργασία υπάρχουν 4 επιλογές

Άρα, $|P| = 4^7 = 16384$

Έστω P_1, P_2, P_3, P_4 τα σύνολα όλων των αναθέσεων 7 ατομικών εργασιών σε 4 άτομα ώστε να μην ανατεθεί εργασία στο 1ο άτομο, στο 2ο άτομο, στο 3ο άτομο και στο

4ο άτομο, αντίστοιχα.

$|P_1| = |P_2| = |P_3| = |P_4| = 3^7$
$|P_1 \cap P_2| = |P_1 \cap P_3| = |P_1 \cap P_4| = |P_2 \cap P_3| = |P_2 \cap P_4| = |P_3 \cap P_4| = 2^7$
$|P_1 \cap P_2 \cap P_3| = |P_1 \cap P_3 \cap P_4| = |P_2 \cap P_3 \cap P_4| = |P_1 \cap P_2 \cap P_4| = 1^7 = 1$
$|P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4| = 0$
$\boxed{*}$

Οι αναθέσεις που ζητούνται είναι αυτές που ανήκουν στο σύνολο $|\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \overline{P}_3 \cap \overline{P}_4|$

$\boxed{*}$ Το σύνολο $\overline{P}_1$ είναι το σύνολο όλων των αναθέσεων στις οποίες το 1ο άτομο αναλαμβάνει τουλάχιστον 1 εργασία. Ομοίως για τα $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$.

Άρα $|\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \overline{P}_3 \cap \overline{P}_4| = |P| - |P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4| =$
$= 4^7 - (4 \cdot 3^7 - 6 \cdot 2^7 + 4 \cdot 1 - 0) =$
$= 16384 - 8748 + 768 - 4 = 8400$

Άσκηση 3

Μια κληρωτίδα περιέχει 5 κόκκινα, 8 μπλε, 10 λευκά, 12 πράσινα και 7 ροζ σφαιρίδια.
Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιριδίων που πρέπει να κληρωθούν ώστε να εξασφαλίσουμε ότι θα υπάρχουν
α) Τουλάχιστον 2 σφαιρίδια του ίδιου χρώματος.

$5 + 1 = 6$

β) Τουλάχιστον 2 σφαιρίδια διαφορετικού χρώματος.

$12 + 1 = 13$

γ) Τουλάχιστον 3 σφαιρίδια ίδιου χρώματος

$2K + 2M + 2\Lambda + 2\Pi + 2P + 1 = 11$

δ) Τουλάχιστον 3 διαφορετικού χρώματος.

$12\Pi + 10\Lambda + 1 = 23$

ε) τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο απο κάθε χρώμα

$12\Pi + 10\Lambda + 8M + 7P + 1 = 38$

στ) τουλάχιστον 2 πράσινα σφαιρίδια

$5K + 8M + 10\Lambda + 7P + 2 = 32$

Άσκηση 4

Αν υποθέσουμε ότι η σχέση γνωριμίας είναι συμμετρική, δηλαδή ο x γνωρίζει τον y αν και μόνο αν ο y γνωρίζει τον x.

Να δειχθεί ότι κάθε συγκέντρωση n ατόμων $(n \geq 2)$ υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που έχουν τον ίδιο αριθμό γνωστών (μέσα στη συγκέντρωση).

Κάθε άτομο μπορεί να έχει απο 0 εως n-1 γνωστούς στη συγκέντρωση

Δεν γίνεται να υπάρχουν ταυτόχρονα 2 άτομα που έχουν 0 και n-1 γνωστούς αντίστοιχα (διότι η σχέση γνωριμίας είναι συμμετρική).

Άρα υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

- Είτε τα άτομα θα έχουν απο $\overbrace{0 \text{ εως } n-2}^{n-1 \text{ διαφορετικές τιμές}}$ γνωστούς
- Είτε τα άτομα θα έχουν απο $\underbrace{1 \text{ εως } n-1}_{n-1 \text{ διαφορετικές τιμές}}$ γνωστούς.

Και στις δύο περιπτώσεις, εφαρμόζοντας την αρχή του περιστερεώνα προκύπτει ότι δύο άτομα θα έχουν τον ίδιο αριθμό γνωστών.

Άσκηση 5

Στο παιχνίδι Λόττο κληρώνονται 6 από τους αριθμούς $\{1, 2, \ldots, 49\}$. Αν υποθέσουμε ότι δημιουργούνται ένα "βραβείο παρηγοριάς" για τα δελτία που δεν περιέχουν κανένα από τους εκλεγμένους αριθμούς, να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός δελτίων που απαιτούνται για να εξασφαλίσουμε το βραβείο.

Αρκούν 7 δελτία:

Για παράδειγμα
Δ1 1, 2, 3, 4, 5, 6
Δ2 7, 8, 9, 10, 11, 12
Δ3 13, ..., 18
Δ4 19, ..., 24
Δ5 25, ..., 30
Δ6 31, ..., 36
Δ7 37, ..., 42

Αρκεί να διαλέξουμε 42 διαφορετικούς αριθμούς στα 7 δελτία

Άσκηση 6 (ΠΡΟΣΟΧΗ!)

Να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$

Υπενθύμιση

$F_0(x)=1$

$F_k(x)=\underbrace{x(x-1)\ldots(x-k+1)}_{k \text{ όρους}}$ $k\geq 1$ $\quad F_p(x)=\frac{\Delta F_{p+1}(x)}{p+1}$ $p\in\mathbb{N}$

π.χ. $F_3(10)=10(10-1)(10-2)$ $\quad F_3(x+5)=(x+5)(x+4)(x+3)$

Θα εκφράσουμε τα μονώνυμα κ^2 και 2κ με τη βοήθεια Παραγοντικών Πολυωνύμων.

$F_1(x)=x \Rightarrow \boxed{k=F_1(k)}$

$F_2(x)=x(x-1) \Rightarrow F_2(x)=x^2-x \Rightarrow x^2=F_2(x)+x=F_2(x)+F_1(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{k^2=F_2(k)+F_1(k)}$

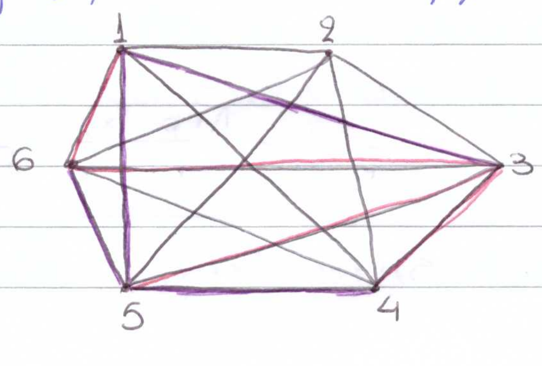
$$k^2+2k=F_2(k)+F_1(k)+2F_1(k)=F_2(k)+3F_1(k)=$$
$$=\frac{\Delta F_3(k)}{3}+3\frac{\Delta F_2(k)}{2}=\Delta\left(\frac{F_3(k)}{3}+\frac{3}{2}F_2(k)\right)$$

Υπενθύμιση:
$$\sum_{k=a}^{b}\Delta g(k)=g(b+1)-g(a)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2+2k=\sum_{k=1}^{n}\Delta\left(\frac{F_3(k)}{3}+\frac{3}{2}F_2(k)\right)=$$
$$=\frac{F_3(n+1)}{3}+\frac{3}{2}F_2(n+1)-\left(\frac{F_3(1)}{3}+\frac{3}{2}F_2(1)\right)=$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}+\frac{3}{2}(n+1)n-\left(\cancelto{0}{\frac{1\cdot 0(-1)}{3}+\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 0}\right)=$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}+\frac{3}{2}(n+1)n$$

Άσκηση 7 (Πρόβλημα της Θεωρίας Ramsey)

Σε κάθε φάδα 6 ατόμων υπάρχουν σίγουρα 3 άτομα που δεν γνωρίζονται ή/και 3 που γνωρίζονται ανά δύο. (Η σχέση γνωριμίας είναι συμμετρική).



Επαναδιατύπωση:
Αν χρωματίσουμε τις άκρες του διπλανού σχήματος μωβ ή κόκκινες τότε υπά

χει σίγουρα ένα κόκκινο τρίγωνο ή ένα μπλε τρίγωνο.

Υπάρχουν $\binom{6}{2}=15$ γραμμές
Κάθε γραμμή έχει 2 επιλογές χρωματισμού
Άρα, υπάρχουν $\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{15\text{ φορές}}=2^{15}$ διαφορετικούς τρόπους χρωματισμού
$=32532$

Τύπος Του Διωνύμου Του Νεύτωνα

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=(a+b)^n$$

Άσκηση 8

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα

α) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

(Αν τεθεί $a=b=1$ τότε)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}1^k\cdot 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

β) $\sum_{k=0}^{n}n\binom{n}{k}=n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=n\cdot 2^n$

γ) $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=n\cdot 2^{n-1}$

Ισχύει ότι
$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\Rightarrow k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

δ) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}2k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=$

$$=2\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2\cdot n\cdot 2^{n-1}+2^n=(n+1)2^n$$

$\varepsilon)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} =$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \xrightarrow[\text{θέτω } n=n+1]{\text{θέτω } k=k+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$