6.12.14

Μαθηματικά Των Υπολογιστών 4ο Φροντιστήριο

Σήμερα: Λογική

ΑΛΗΘΗΣ: Α, 1, Τ, α ΨΕΥΔΗΣ: Ψ, 0, F, ψ

p	q	p∨q	p∧q	p→q	p↔q
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	ψ	Α	ψ	ψ	ψ
ψ	Α	Α	ψ	Α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	Α	Α

p	¬p
Α	ψ
ψ	Α

- $v(\phi)=1$ $\boxed{v \models \phi}$ v ικανοποιεί ή επαληθεύει την φ
  v μοντέλο της φ.

- $v(\phi)=1$ για κάθε $v \in \Sigma$ $\boxed{v \models \Sigma}$ v ικανοποιεί ή επαληθεύει το Σ
  v μοντέλο του Σ

- Αν υπάρχει v ώστε $v \models \Sigma$, τότε το Σ λέγεται ικανοποιήσιμο

- Αν ισχύει ότι $v \models \Sigma \Rightarrow \boxed{v \models \phi}$ φ λογικό συμπέρασμα του Σ.
  $\Sigma \models \phi$

- Αν ισχύει η ισοδυναμία $v \models \phi \Leftrightarrow v \models y$ φ, y λογικά ισοδύναμες $\boxed{\phi \models\!\!\!\dashv y}$

(Οι φ, y έχουν τον ίδιο πίνακα αληθείας)

Οι προτάσεις της γλώσσας P μπορεί να έχουν αρκετά πολύπλοκη μορφή, π.χ.

$(\neg p \wedge (q \to r)) \wedge ((s \vee t) \wedge (\neg p \leftrightarrow (\neg p \to t))) \to$
$(t \to (r \wedge s) \vee (\neg u \wedge (w \leftrightarrow x)))$

Είδαμε ότι με τη βοήθεια των λογικών ισοδυναμιών:

$p \to q \;\text{⫤⊨}\; \neg p \vee q$

$p \leftrightarrow q \;\text{⫤⊨}\; (p \to q) \wedge (q \to p)$

μπορούμε για κάθε πρόταση ϕ να βρούμε μία πρόταση ϕ', η οποία είναι λογικά ισοδύναμη με την ϕ και δεν περιέχει καθόλου $\to$, $\leftrightarrow$.
Υπάρχει τρόπος να βρούμε την ϕ' απευθείας από τη ϕ, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τις ισοδυναμίες αυτές.

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΙΑΖΕΥΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ
DISJUNCTIVE NORMAL FORM (DNF)

Έστω ϕ μία πρόταση, η οποία περιέχει τα άτομα $p_1, p_2, \dots, p_k$ τότε η ϕ είναι λογικά ισοδύναμη με μια πρόταση ϕ', η οποία αποτελείται από διαζεύξεις συζεύξεων των $p_1, p_2, \dots, p_k$ ή των αρνήσεών τους.
Συγκεκριμένα, οι συζεύξεις της ϕ' είναι της μορφής

$$p_1^* \wedge p_2^* \wedge p_3^* \wedge \dots \wedge p_k^*$$

όπου $p_i^* = \begin{cases} p_i & \text{αν για την εκτίμηση } v \text{ που επαληθεύει την } \phi \text{ ισχύει } v(p_i)=1 \\ \neg p_i & \text{αν για την εκτίμηση } v \text{ που επαληθεύει την } \phi \text{ ισχύει } v(p_i)=0 \end{cases}$

για κάθε εκτίμηση v που επαληθεύει την ϕ.

Αυτή η πρόταση που θα προκύψει λέγεται κανονική διαζευκτική μορφή της ϕ.

Άσκηση 1

Να βρεθεί η κανονική διαζευκτική μορφή της πρότασης
$\phi = (p_1 \land p_2) \to p_3$

Αρχικά θα κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας της ϕ.

	p_1	p_2	p_3	$p_1 \land p_2$	ϕ
1	Α	Α	Α	Α	Α
	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
2	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
3	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
4	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
5	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
6	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
7	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

Υπάρχουν 7 εκτιμήσεις v που ικανοποιούν την ϕ, όπως προκύπτει από τον διπλανό πίνακα. Για κάθε μία από αυτές θα δημιουργήσουμε μία σύζευξη των p_1, p_2, p_3 ή των αρνήσεών τους.

① $p_1 \land p_2 \land p_3$
② $p_1 \land \neg p_2 \land p_3$
③ $p_1 \land \neg p_2 \land \neg p_3$
④ $\neg p_1 \land p_2 \land p_3$
⑤ $\neg p_1 \land p_2 \land \neg p_3$
⑥ $\neg p_1 \land \neg p_2 \land p_3$
⑦ $\neg p_1 \land \neg p_2 \land \neg p_3$

Άρα, η κανονική διαζευκτική μορφή της ϕ είναι

$$\phi \models\!\dashv (p_1 \land p_2 \land p_3) \lor (p_1 \land \neg p_2 \land p_3) \lor (p_1 \land \neg p_2 \land \neg p_3) \lor (\neg p_1 \land p_2 \land p_3) \lor (\neg p_1 \land p_2 \land \neg p_3) \lor (\neg p_1 \land \neg p_2 \land p_3) \lor (\neg p_1 \land \neg p_2 \land \neg p_3)$$

- ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΖΕΥΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

CONJUCTIVE NORMAL FORM (CNF)

Έστω ϕ μία πρόταση, η οποία περιέχει τα άτομα $p_1, p_2, \dots, p_k$, τότε η ϕ είναι λογικά ισοδύναμη με μία πρόταση ϕ', η οποία αποτελείται από συζεύξεις διαζεύξεων των $p_1, p_2, \dots, p_k$ ή των

αρνήσεών τους.
Συγκεκριμένα, οι διαζεύξεις της φ' είναι της μορφής
$p_1^* \vee p_2^* \vee \ldots \vee p_k^*$

όπου $p_i^* = \begin{cases} p_i \text{ αν για την εκτίμηση } v \text{ που δεν επαληθεύει την } \varphi \text{ ισχύει } v(p_i)=0 \\ \neg p_i \text{ αν για την εκτίμηση } v \text{ που δεν επαληθεύει την } \varphi \text{ ισχύει } v(p_i)=1 \end{cases}$

για κάθε εκτίμηση v που δεν επαληθεύει την φ.
Η πρόταση φ' λέγεται κανονική συζευκτική μορφή της φ.

<u>Άσκηση 2</u>

Να βρεθεί η κανονική συζευκτική μορφή της πρότασης
$\varphi = (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$

Από τον πίνακα αληθείας της άσκησης (1), προκύπτει ότι υπάρχει μόνο 1 εκτίμηση v που <u>δεν</u> αληθεύει την φ.
Για την εκτίμηση αυτή προκύπτει ~~ότι~~ η διάζευξη: $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$
Άρα, η κανονική συζευκτική μορφή της φ είναι $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$.

<u>Άσκηση 3</u>

Να βρεθεί η κανονική συζευκτική και κανονική διαζευκτική μορφή της πρότασης
$\varphi = (p_1 \vee (p_2 \rightarrow p_1)) \wedge p_3$

$\Longrightarrow$

p_1	p_2	p_3	$p_2 \to p_1$	$p_1 \vee (p_2 \to p_1)$	ϕ
① 1	1	1	1	1	1
② 1	1	0	1	1	0
③ 1	0	1	1	1	1
④ 1	0	0	1	1	0
⑤ 0	1	1	0	0	0
⑥ 0	1	0	0	0	0
⑦ 0	0	1	1	1	1
⑧ 0	0	0	1	1	0

Υπάρχουν 3 εκτιμήσεις που επαληθεύουν την ϕ και 5 που δεν την επαληθεύουν.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΙΑΖΕΥΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ (DNF)

① ③ ⑦

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΖΕΥΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ (CNF)

② ④ ⑤ ⑥ ⑧

$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3$

Άσκηση 4

Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι. Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.

i) Το σύνολο P_0 είναι ικανοποιήσιμο. (P_0 = σύνολο ατόμων)
ΑΛΗΘΗΣ. Διότι η εκτίμηση v με $v(p)=1$ για κάθε $p \in P_0$ είναι μοντέλο του P_0 (επαληθεύει το P_0).

ii) Το σύνολο P δεν είναι ικανοποιήσιμο.

ΑΛΗΘΗΣ. Διότι περιέχει αντιφάσεις (δηλαδή π.χ. έχει την p και την $\neg p$, $p \wedge \neg p$), οι οποίες δεν επαληθεύονται ποτέ.

iii) Το σύνολο P_0' που περιέχει τις αρνήσεις των ατόμων δεν είναι ικανοποιήσιμο.
ΨΕΥΔΗΣ. Διότι η εκτίμηση v με $v(p)=0$ για κάθε $p \in P_0$ επαληθεύει το P_0'.

iv) Αν τα σύνολα Σ_1, Σ_2 είναι ικανοποιήσιμα τότε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ είναι ικανοποιήσιμο.
ΨΕΥΔΗΣ. π.χ. $\Sigma_1 = \{p\}$, $\Sigma_2 = \{\neg p\}$, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{p, \neg p\}$
Σ_1, Σ_2 ικανοποιήσιμο
$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ μη ικανοποιήσιμο

v) Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το σύνολο Σ' που περιέχει τις αρνήσεις των προτάσεων του Σ είναι ικανοποιήσιμο.
ΨΕΥΔΗΣ. π.χ. $\Sigma = \{p \vee \neg p\}$ ικανοποιήσιμο τότε $\Sigma' = \{\neg(p \vee \neg p)\}$ μη ικανοποιήσιμο.

vi) Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το σύνολο Σ' που περιέχει τις αρνήσεις των προτάσεων του Σ είναι <u>μη</u> ικανοποιήσιμο.
ΨΕΥΔΗΣ. $\Sigma = \{p\}$ ικανοποιήσιμο
$\Sigma' = \{\neg p\}$ ικανοποιήσιμο

vii) Αν Σ μη ικανοποιήσιμο, τότε Σ' (όπως πριν) είναι ικανοποιήσιμο.
ΨΕΥΔΗΣ. π.χ. $\Sigma = \{p \vee \neg p, q \wedge \neg q\}$ μη ικανοποιήσιμο
$\Sigma' = \{\neg(p \vee \neg p), \neg(q \wedge \neg q)\}$ μη ικανοποιήσιμο

viii) Αν Σ μη ικανοποιήσιμο, τότε Σ' μη ικανοποιήσιμο.
ΨΕΥΔΗΣ. $\Sigma = \{\neg(p \vee \neg p)\}$ μη ικανοποιήσιμο
$\Sigma' = \{p \vee \neg p\}$ ικανοποιήσιμο.

ix) Αν Σ ικανοποιήσιμο και $\Sigma \models \phi$, τότε $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.
ΑΛΗΘΗΣ. Διότι αφού Σ ικανοποιήσιμο υπάρχει εκτίμηση v που επαληθεύει το Σ.
Αφού, η φ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ, η v επαληθεύει και την φ.
Άρα, η v επαληθεύει το σύνολο $\Sigma \cup \{\phi\}$

x) Αν $\Sigma \models \phi$, τότε $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.
ΨΕΥΔΗΣ. Διότι μπορεί το Σ να είναι αντιφατικό (μη ικανοποιήσιμο) και τότε $\Sigma \models \phi$ για κάθε $\phi \in P$. Όμως $\Sigma \cup \{\phi\}$ επίσης μη ικανοποιήσιμο.

Άσκηση 5

Να αποδειχθούν οι ισότητες
i) $v(\phi \wedge y) = v(\phi) \cdot v(y)$
ii) $v(\phi \vee y) = v(\phi) + v(y) - v(\phi) \cdot v(y)$

Θα τις αποδείξουμε με τη βοήθεια πινάκων αληθείας

$v(\phi)$	$v(y)$	$v(\phi \wedge y)$	$v(\phi)v(y)$	$v(\phi \vee y)$	$v(\phi)+v(y)-v(\phi)\cdot v(y)$
1	1	1	1	1	$1+1-1\cdot1=1$
1	0	0	0	1	$1+0-1\cdot0=1$
0	1	0	0	1	$0+1-0\cdot1=1$
0	0	0	0	0	$0+0-0\cdot0=0$

Άσκηση 6

Να δοθεί ο επαγωγικός ορισμός των παρακάτω εννοιών:
i) $a(\phi)$ ο αριθμός των θέσεων όπου εμφανίζεται άτομο στη

ϕ.

- Ορίζουμε
  $a(p)=1$ για κάθε άτομο p. $a(\phi): P \to \mathbb{N}$
- Για κάθε $\phi \in P$ ορίζουμε
  $a(\neg\phi) = a(\phi)$
- Για κάθε $\phi, y \in P$ ορίζουμε
  $a(\phi \square y) = a(\phi) + a(y)$

ii) $b(\phi)$ ο αριθμός των θέσεων της ϕ όπου εμφανίζεται διμελής σύνδεσμος.

- Για κάθε άτομο $p \in P_0$ ορίζουμε
  $b(p)=0$
- Για κάθε $\phi \in P$ ορίζουμε
  $b(\neg\phi) = b(\phi)$
- Για κάθε $\phi, y \in P$ ορίζουμε
  $b(\phi \square y) = b(\phi) + b(y) + 1$

iii) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\phi \in P$ ισχύει ότι
$$a(\phi) = b(\phi) + 1$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή.
Για τα άτομα p έχουμε
$a(p)=1$ και $b(p)=0$
Άρα $a(p) = b(p)+1$
Έστω ότι ισχύει για την πρόταση ϕ.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για την $\neg\phi$.

α)
$$\left.\begin{array}{l} a(\neg\phi) = a(\phi) \\ b(\neg\phi) = b(\phi) \\ a(\phi) = b(\phi)+1 \end{array}\right\} a(\neg\phi) = b(\neg\phi)+1$$

(β')
$$a(\neg\phi)=a(\phi)=b(\phi)+1=(b\neg\phi)+1$$

Έστω ότι η ισότητα ισχύει για τις προτάσεις ϕ, ψ.
δηλαδή $a(\phi)=b(\phi)+1$

$a(\psi)=b(\psi)+1$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για την πρόταση $\phi\square\psi$.

$$\left.\begin{aligned} a(\phi\square\psi) &= a(\phi)+a(\psi)= \\ &=(b(\phi)+1)+(b(\psi)+1) \\ b(\phi\square\psi) &= b(\phi)+b(\psi)+1 \end{aligned}\right\} a(\phi\square\psi)=b(\phi\square\psi)+1$$

Άρα, η ισότητα ισχύει για κάθε πρόταση $\phi\in P$.

<u>ΜΙΑ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ</u>

$$f(0,x,y)=x+y$$

$$f(n+1,0,y)=\begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ y & n>1 \end{cases}$$

$$f(n+1,x+1,y)=f(n,f(n+1,x,y),y)$$

Η f ορίζεται από τις παραπάνω ισότητες
Να βρεθούν οι τιμές:

$f(0,0,0)=0$

$f(1,1,1)=2$

$f(2,2,2)=4$

$f(3,3,3)=3^{3^{3^3}}\simeq 3{,}66\times10^{22}$

$f(4,4,4)=?$

<u>Άσκηση 7</u>

Να αποδειχθεί ότι για κάθε πρόταση $\phi\in P$ ισχύει ότι
$r(\phi)\leq b(\phi)$

όπου $r(\phi)$ η τάξη της ϕ και
$\mu(\phi)$ ο αριθμός των θέσεων όπου εμφανίζεται σύνδεσμος στην ϕ.

Υπενθυμίζεται ότι η τάξη $r(\phi)$ μιας πρότασης ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

i) $r(p)=0$, p άτομο
ii) $r(\neg\phi)=r(\phi)+1$, $\phi\in P$
iii) $r(\phi\square y)=\max\{r(\phi), r(y)\}+1$

Θα ορίσουμε επαγωγικά και την $\mu(\phi)$
i) $\mu(p)=0$, p άτομο
ii) $\mu(\neg\phi)=\mu(\phi)+1$ $\phi\in P$
iii) $\mu(\phi\square y)=\mu(\phi)+\mu(y)+1$, $\phi, y\in P$

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά.

i) $r(p)=0\leq 0=\mu(p)$, p άτομο
ii) Έστω $r(\phi)\leq\mu(\phi)$
$r(\neg\phi)=r(\phi)+1\leq\mu(\phi)+1=\mu(\neg\phi)$
iii) Έστω $r(\phi)\leq\mu(\phi)$
$r(y)\leq\mu(y)$

$$r(\phi\square y)=\max\{r(\phi), r(y)\}+1\leq\max\{\mu(\phi),\mu(y)\}+1\leq$$

$$\leq\max\{\mu(\phi),\mu(y)\}+\min\{\mu(\phi),\mu(y)\}+1\leq$$

$$\leq\mu(\phi)+\mu(y)+1=\mu(\phi\square y)$$