ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Το πρόβλημα της επιλογής κ αντικειμένων από n αντικείμενα

	Με σειρά	χωρίς σειρά
Με επανάληψη	Επαναληπτικές διατάξεις n^k	Επαναληπτικοί συνδυασμοί $\left[{n \atop k}\right] = \binom{n+k-1}{k}$
χωρίς επανάληψη	Διατάξεις $\frac{n!}{(n-k)!}$	Συνδυασμοί $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Βασικές αρχές απαρίθμησης

① Κανόνας αθροίσματος

Αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ διαμέριση του E

τότε $|E| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$

② Κανόνας γινομένου

Αν $E_1, E_2, \ldots, E_k \subseteq E$ τότε

$|E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k| = |E_1||E_2| \ldots |E_k|$

Άσκηση 1

Να βρεθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που κατασκευάζονται από τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 όταν

α) επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους.

Κάθε 4-ψήφιος αριθμός καθορίζεται μοναδικά αν γνωρίζω τα ψηφία του

$\frac{x}{1o}$ $\frac{y}{2o}$ $\frac{z}{3o}$ $\frac{4}{4o}$

Για το 1ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το 2ο ψηφίο υπάρχουν 8 επιλογές
Για το 3ο ψηφίο υπάρχουν 8 επιλογές
Για το 4ο ψηφίο υπάρχουν 8 επιλογές

Άρα από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$ επιλογές.
Δηλαδή 3584 αριθμοί

β) επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία του και οι αριθμοί είναι άρτιοι.

π.χ. 3320   4126

$\overline{1o}$ $\overline{2o}$ $\overline{3o}$ $\overline{4o}$

Για το 1ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το 2ο ψηφίο υπάρχουν 8 επιλογές.
Για το 3ο ψηφίο υπάρχουν 8 επιλογές
Για το 4ο ψηφίο υπάρχουν 4 επιλογές (0, 2, 4, 6)

Άρα από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4$ επιλογές δηλαδή
1792 αριθμοί

γ) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία του.

$\overline{1o}$ $\overline{2o}$ $\overline{3o}$ $\overline{4o}$

Για το 1ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το 2ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές
Για το 3ο ψηφίο υπάρχουν 6 επιλογές
Για το 4ο ψηφίο υπάρχουν 5 επιλογές

Αρα από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν 7·7·6·5 επιλογές δηλαδή 1470 αριθμοί.

δ) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία του και οι αριθμοί πρέπει να είναι περιττοί.

$$\underset{1o}{\underline{x}} \quad \underset{2o}{\underline{y}} \quad \underset{3o}{\underline{z}} \quad \underset{4o}{\underline{\omega}}$$

Για το 1ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το 2ο ψηφίο υπάρχουν 7 επιλογές
Για το 3ο ψηφίο υπάρχουν 6 επιλογές
Για το 4ο ψηφίο υπάρχουν ? επιλογές

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα την απάντηση διότι δεν γνωρίζουμε πόσα από τα ψηφία 1,3,5,7 έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί.

"Εμπειρικός κανόνας": Πάντα ξεκινάμε την απαρίθμηση από την πιο ειδική συνθήκη

$$\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z} \quad \underline{w}$$

Για το w υπάρχουν 4 επιλογές (1,3,5,7)
Για το x υπάρχουν 6 επιλογές (το 0 εξαιρείται)
Για το y υπάρχουν 6 επιλογές
Για το z υπάρχουν 5 επιλογές

Αρα από την αρχή του γινομένου υπάρχουν 4·6·6·5 αριθμοί.

ε) <u>δεν</u> επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία του και το άθροισμα του πρώτου και του τέταρτου ψηφίου του ισούται με 8

$\frac{x}{1o}$ $\frac{y}{2o}$ $\frac{z}{3o}$ $\frac{w}{4o}$

Για τα ψηφία x, w υπάρχουν οι εξής επιλογές
(1,7) (2,6) (3,5)
(7,1) (6,2) (5,3) δηλαδή 6 επιλογές
Για το y ψηφίο y υπάρχουν 6 επιλογές
Για το ψηφίο z υπάρχουν 5 επιλογές

Άρα από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ επιλογές

6τ) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία του και οι αριθμοί πρέπει να είναι άρτιοι

$\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$ $\underline{w}$

Για το w υπάρχουν 4 επιλογές (0,2,4,6)
Για το x υπάρχουν ? επιλογές

Πάλι δεν μπορούμε να απαντήσουμε άμεσα, διότι δεν γνωρίζουμε αν έχουμε χρησιμοποιήσει ή όχι το 0 στο w.

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:
α) Το w ισούται με 0
Για το w έχουμε 1 επιλογή
Για το x έχουμε 7 επιλογές
Για το y έχουμε 6 επιλογές
Για το έχουμε 5 επιλογές

Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ επιλογές.

β) Το ω δεν ισούται με 0

Για το ω υπάρχουν 3 επιλογές

Για το x υπάρχουν 6 επιλογές

Για το y υπάρχουν 6 επιλογές

Για το z υπάρχουν 5 επιλογές

Άρα από τον κανόνα του γινομένου έχουμε $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$ επιλογές

Άρα συνολικά και για τις δύο περιπτώσεις υπάρχουν $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$ επιλογές

Άσκηση 2

Σε ένα όμιλο συμμετέχουν 5 Έλληνες, 4 Ιταλοί, 6 Άγγλοι, 5 Γερμανοί και 7 Ρώσοι (συνολικά 27 μέλη)

Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί μια 7μελής επιτροπή όταν

α) δεν έχουμε περιορισμούς στην επιλογή μελών

$\binom{27}{7}$ τρόποι / επιλογές

β) πρέπει στην επιτροπή να συμμετέχουν ακριβώς 3 Έλληνες

Για τους 3 Έλληνες έχουμε $\binom{5}{3}$ επιλογές

Για τα υπόλοιπα 4 μέλη έχουμε $\binom{22}{4}$ επιλογές

Άρα από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $\binom{5}{3}\binom{22}{4}$ τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.

γ) πρέπει η επιτροπή να αποτελείται από 2 Έλληνες, 2 Ρώσους, 2 Άγγλους και 1 Ιταλό

Για τους 2 Έλληνες έχουμε $\binom{5}{2}$ επιλογές

Για τους 2 Ρώσους έχουμε $\binom{7}{2}$ επιλογές

Για τους 2 Άγγλους έχουμε $\binom{6}{8}$ επιλογές

Για τον 1 Ιταλό έχουμε $\binom{4}{1}$ επιλογές

Άρα από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $\binom{5}{2}\binom{7}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{1}$ τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.

δ) η επιτροπή έχει πρόεδρο
Για τον Πρόεδρο έχουμε $\binom{27}{1}$ επιλογές
Για τα υπόλοιπα έξι μέλη έχουμε $\binom{26}{6}$ επιλογές

Άρα από τον κανόνα του γινομένου έχουμε $\binom{27}{1}\binom{26}{6}$ τρόπους σχηματισμού της επιτροπής

ε) η επιτροπή έχει πρόεδρο και είναι Ιταλός
Για τον Ιταλό πρόεδρο υπάρχουν $\binom{4}{1}$ επιλογές.
Για τα υπόλοιπα 6 μέλη υπάρχουν $\binom{26}{6}$ επιλογές.

Άρα από τον κανόνα του γινομένου έχουμε $\binom{4}{1}\binom{26}{6}$ διαφορετικές επιτροπές

στ) η επιτροπή πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 1 Ιταλό

ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ $\binom{4}{1}\binom{26}{6}$

Είναι λάθος διότι μετράμε ως διαφορετικές τις ίδιες επιτροπές.

ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΟ ΠΑΡΟΜΟΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ:
Σε ένα όμιλο συμμετέχουν 3 Έλληνες E_1, E_2, E_3 και 2 Ιταλοί I_1, I_2. Να βρεθεί ο αριθμός των επιτροπών με 2 μέλη στις οποίες περιέχεται τουλάχιστον ένας Ιταλός.

ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ	ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ
I_1E_1 I_2E_1 I_1I_2 I_1E_2 I_2E_2 I_1E_3 I_2E_3 7 επιτροπές	$\binom{2}{1}\binom{4}{1} = 2\cdot 4 = 8$ 8 επιτροπές

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό (χωρίς να κάνουμε το συνηθισμένο λάθος) υπάρχουν 2 βασικοί τρόποι:

1ος τρόπος: Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς τον αριθμό των Ιταλών που περιέχονται στην επιτροπή.

α) Συμμετέχει 1 ακριβώς Ιταλός
Όπως πριν (β) υπάρχουν $\binom{4}{1}\binom{23}{6}$ τρόποι σχηματισμού

β) Συμμετέχουν 2 ακριβώς Ιταλοί
Όπως πριν υπάρχουν $\binom{4}{2}\binom{23}{5}$ τρόποι σχηματισμού

γ) Συμμετέχουν 3 ακριβώς Ιταλοί
Όπως πριν υπάρχουν $\binom{4}{3}\binom{23}{4}$ τρόποι σχηματισμού

δ) Συμμετέχουν 4 ακριβώς Ιταλοί
Όπως πριν υπάρχουν $\binom{4}{4}\binom{23}{3}$ τρόποι σχηματισμού

Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{4}{1}\binom{23}{6} + \binom{4}{2}\binom{23}{5} + \binom{4}{4}\binom{23}{3}$

\# (αριθμός)

2ος τρόπος: Ισχύει η ισότητα 7-μελών επιτροπών = # 7-μελών επιτροπών με Ιταλούς + # 7-μελών επιτροπών χωρίς Ιταλούς

7-μελών επιτροπών $= \binom{27}{7}$

7-μελών επιτροπών χωρίς Ιταλούς $= \binom{23}{7}$

Άρα το ζητούμενο ισούται με $\binom{27}{7} - \binom{23}{7}$

Συνδυαστικές αποδείξεις

Άσκηση 3

α) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των υποσυνόλων X ενός συνόλου E όπου $|E| = n$ και $|X| = k$ ισούται με $\binom{n}{k}$

Κάθε υπόσυνολο X του E προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα στοιχεία του.
Υπάρχουν n επιλογές για τα στοιχεία του, από τις οποίες επιλέγουμε k
Κάθε μια από αυτές τις επιλογές καθορίζει ένα σύνολο X
Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ επιλογές. Άρα υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τέτοια σύνολα X

β) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με k (ακριβώς) άσσους ισούται με $\binom{n}{k}$

π.χ. $n=5$ $\{1,2\}$ 11000 $\{2,3\}$ 01100 $\{3,4\}$ 00110 $\{4,5\}$ 00011
$k=2$ $\{1,3\}$ 10100 $\{2,4\}$ 01010 $\{3,5\}$ 00101
$\{1,4\}$ 10010 $\{2,5\}$ 01001
$\{1,5\}$ 10001

$\binom{5}{2} = 10$

Κάθε δυαδική λέξη μήκους n με k άσσους καθορίζεται μονοσήμαντα αν γνωρίζουμε τις θέσεις των k άσσων της.

Κάθε επιλογή κ θέσεων για τον άσσου ορίζει μια από τις παραπάνω λέξεις.
Άρα όσες επιλογές έχω για τις κ θέσεις των άσσων τόσες είναι και οι ζητούμενες λέξεις.

Για να διαλέξω κ θέσεις από n θέσεις υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι.
Άρα υπάρχουν $\binom{n}{k}$ δυαδικές λέξεις μήκους n με κ άσσους.

γ) Να δειχθεί συνδυαστικά ότι $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με λ άσσους ισούται με $\binom{n}{\lambda}$

Άρα $\binom{n}{k}$ είναι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με κ άσσους.
$\binom{n}{n-k}$ είναι ο αριθμός των δυαδικών λέξεων μήκους n με n-κ άσσους.

Σε κάθε δυαδική λέξη μήκους n με κ άσσους αντιστοιχεί μια και μοναδική λέξη μήκους n με n-κ άσσους, η οποία προκύπτει αλλάζοντας κάθε ψηφίο της από 0 σε 1 και από 1 σε 0

Άρα $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2ος τρόπος

$\binom{n}{k}$ ο αριθμός των υποσυνόλων X του E όπου $|E|=n$ και $|X|=k$

$\binom{n}{n-k}$ ο αριθμός των υποσυνόλων Y του E όπου $|E|=n$ και $|Y|=n-k$

Σε κάθε υποσύνολο X του E με κ στοιχεία αντιστοιχεί ένα μοναδικό υποσύνολο Y του E με n-κ αν πάρουμε το συμπλήρωμα του X (δηλαδή θέτουμε $Y = E \setminus X$) και αντίστροφα.

Επομένως υπάρχουν τόσα υποσύνολα X με $|X| = k$ όσα και υποσύνολα Y με $|Y| = n-k$.

Άρα $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Άσκηση 4

Να αποδειχθεί συνδυαστικά η ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$[n] = \{1, 2, 3 \ldots n\}$

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τον αριθμό των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία. Όπως είδαμε προηγουμένως, αυτός ο αριθμός ισούται με $\binom{n}{k}$. Μπορούμε να βρούμε αυτόν τον αριθμό και με ένα άλλο τρόπο.
Αν διαλέξουμε ένα στοιχείο από το σύνολο $[n]$ π.χ το 1
Τότε υπάρχουν 2 περιπτώσεις για το 1 σε σχέση με αυτά τα υποσύνολα.

α) Το 1 ανήκει σ'αυτά τα υποσύνολα
Για τα υπόλοιπα $k-1$ στοιχεία του υποσυνόλου έχω $\binom{n-1}{k-1}$ επιλογές.

β) Το 1 δεν ανήκει σ'αυτά τα υποσύνολα
Για τα k στοιχεία του υποσυνόλου $\binom{n-1}{k}$

Άρα ο συνολικός αριθμός των υποσυνόλων του $[n]$ με k στοιχεία ισούται με $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$