Λογική

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

ΑΛΗΘΗΣ : Α, 1, T, α
ΨΕΥΔΗΣ : Ψ, 0, F, ψ

p	$\neg p$
Α	Ψ
Ψ	Α

- $v(\varphi) = 1$ $\boxed{v \models \varphi}$ v ικανοποιεί ή επαληθεύει την φ
  v μοντέλο της φ

- $v(\varphi) = 1$ για κάθε $v \in \Sigma$ $\boxed{v \models \Sigma}$ v ικανοποιεί ή επαληθεύει το Σ
  v μοντέλο του Σ

- Αν υπάρχει v ώστε $v \models \Sigma$, τότε το Σ λέγεται ικανοποιήσιμο
- Αν ισχύει ότι $v \models \Sigma \Rightarrow \boxed{v \models \varphi}$ φ λογικό συμπέρασμα του Σ $\boxed{\Sigma \models \varphi}$

- Αν ισχύει η ισοδυναμία $v \models \varphi \Leftrightarrow v \models \psi$ φ, ψ λογικά ισοδύναμες $\boxed{\varphi \models\!\mid \psi}$
  (οι φ, ψ έχουν τον ίδιο πίνακα αληθείας)

Οι προτάσεις της γλώσσας P μπορεί να έχουν αρκετά πολύπλοκη μορφή
π.χ. $(\neg p \wedge (q \to r)) \wedge ((s \vee t) \wedge (\neg p \leftrightarrow (\neg p \to t))) \to$
$(t \to (r \wedge s) \vee (\neg u \wedge) (w \leftrightarrow x)))$

Είδαμε ότι με τη βοήθεια των λογικών ισοδυναμιών
$p \to q \models\!\mid \neg p \vee q$
$p \leftrightarrow q \models\!\mid (p \to q) \wedge (q \to p)$
μπορούμε για κάθε πρόταση φ να βρούμε μια πρόταση φ', η οποία είναι λογικά ισοδύναμη με τη φ και δεν περιέχει τους συνδέσμους $\to$, $\leftrightarrow$

Υπάρχει τρόπος να βρούμε την φ' απευθείας από τη φ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τις ισοδυναμίες αυτές

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΙΑΖΕΥΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

DISJUNCTIVE NORMAL FORM (DNF)

Έστω φ μια πρόταση, η οποία περιέχει τα άτομα $p_1, p_2, \ldots, p_k$ τότε η φ είναι λογικά ισοδύναμη με μια πρόταση φ' η οποία αποτελείται από διαζεύξεις συζεύξεων των $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ή των αρνήσεών τους.

Συγκεκριμένα, οι συζεύξεις της φ' είναι της μορφής

$$p_1^* \wedge p_2^* \wedge \ldots \wedge p_k^*$$

όπου $p_i^* = \begin{cases} p_i & \text{αν για την εκτίμηση } v \text{ που επαληθεύει την } \varphi \text{ ισχύει } v(p_i)=1 \\ \neg p_i & \text{αν για την εκτίμηση } v \text{ που επαληθεύει την } \varphi \text{ ισχύει } v(p_i)=0 \end{cases}$

για κάθε εκτίμηση v που επαληθεύει την φ

Αυτή η πρόταση που θα προκύψει λέγεται κανονική διαζευκτική μορφή της φ

Άσκηση 1

Να βρεθεί η κανονική διαζευκτική μορφή της πρότασης

$$\varphi = (p_1 \wedge p_2) \to p_3$$

Αρχικά θα κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας της φ.

	p_1	p_2	p_3	$p_1 \wedge p_2$	φ
①	Α	Α	Α	Α	Α
	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
②	Α	Ψ	Α	Ψ	Α

3	A	Ψ	Ψ	Ψ	A
4	Ψ	A	A	Ψ	A
5	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
6	Ψ	Ψ	A	Ψ	A
7	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A

Υπάρχουν 7 εκτιμήσεις v που ικανοποιούν την φ.
Για κάθε μια από αυτές θα δημιουργήσουμε μια σύζευξη των p_1, p_2, p_3 ή των αρνήσεών τους.

1. $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
2. $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$
3. $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$
4. $\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
5. $\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$
6. $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$
7. $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$

Άρα η κανονική διαζευκτική της φ είναι

$$\varphi \models\!\dashv (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$$
$$\vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΖΕΥΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

CONJUNCTIVE NORMAL FORM (CNF)

Έστω φ μια πρόταση, η οποία περιέχει τα άτομα $p_1, p_2, \ldots, p_k$ τότε η φ είναι λογικά ισοδύναμη με μια πρόταση φ' η οποία αποτελείται από συζεύξεις διαζεύξεων των $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ή των αρνήσεών τους.

Συγκεκριμένα, οι διαζεύξεις της φ' είναι της μορφής

$p_1^* \vee p_2^* \vee \ldots \vee p_k^*$

όπου $p_i^* = \begin{cases} p_i & \text{αν για την εκτίμηση } v \text{ που δεν επαληθεύει την } \varphi \text{ ισχύει } v(p_i)=0 \\ \neg p_i & \text{αν για την εκτίμηση } v \text{ που δεν επαληθεύει την } \varphi \text{ ισχύει } v(p_i)=1 \end{cases}$

για κάθε εκτίμηση v που δεν επαληθεύει την φ. Η πρόταση φ' λέγεται <u>κανονική συζευκτική μορφή της φ.</u>

β) Να βρεθεί η κανονική συζευκτική μορφή της πρότασης $\varphi = (p_1 \wedge p_2) \to p_3$

Υπάρχει μόνο 1 εκτίμηση v που δεν επαληθεύει τη φ. Για την εκτίμηση αυτή προκύπτει η διάζευξη: $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$

Άρα η κανονική συζευκτική μορφή της φ είναι $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$

<u>Άσκηση 2</u>

Να βρεθεί η κανονική συζευκτική και κανονική διαζευκτική μορφή της πρότασης $\varphi = (p_1 \vee (p_2 \to p_1)) \wedge p_3$

	p_1	p_2	p_3	$p_2 \to p_1$	$p_1 \vee (p_2 \to p_1)$	φ
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	1	0
3	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	0
5	0	1	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0
7	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	1	1	0

Υπάρχουν 3 εκτιμήσεις που επαληθεύουν την φ (και 5 που δεν την επαληθεύουν)

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΙΑΖΕΥΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ (DNF)

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΖΕΥΚΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ (CNF)

$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι. Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.

i) Το σύνολο P_0 (σύνολο των ατόμων) είναι ικανοποιήσιμο

ΑΛΗΘΗΣ. Διότι η εκτίμηση v με $v(p)=1$ για κάθε $p \in P_0$ είναι μοντέλο του P_0 (επαληθεύει το P_0)

ii) Το σύνολο P δεν είναι ικανοποιήσιμο.

ΑΛΗΘΗΣ. Διότι περιέχει αντιφάσεις (οι οποίες δεν επαληθεύονται ποτέ) π.χ $p \wedge \neg p$

iii) Το σύνολο P_0' που περιέχει τις αρνήσεις των ατόμων δεν είναι ικανοποιήσιμ

ΨΕΥΔΗΣ. Διότι η εκτίμηση v με $v(p)=0$ για κάθε $p \in P_0$ επαληθεύει το P_0'

iv) Αν τα σύνολα Σ_1, Σ_2 είναι ικανοποιήσιμα τότε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$

ΨΕΥΔΗΣ. π.χ. $\Sigma_1 = \{p\}$, $\Sigma_2 = \{\neg p\}$, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{p, \neg p\}$ — Σ_1, Σ_2 ικανοποιήσιμα, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ μη ικανοποιήσιμο

v) Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το σύνολο Σ' που περιέχει τις αρνήσεις των προτάσεων του Σ είναι ικανοποιήσιμο

ΨΕΥΔΗΣ. π.χ. $\Sigma = \{p \vee \neg p\}$ ικανοποιήσιμο

τότε $\Sigma' = \{\neg(p \vee \neg p)\}$ μη ικανοποιήσιμο

vi) Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το σύνολο Σ' που περιέχει τις αρνήσεις των προτάσεων του Σ είναι μη ικανοποιήσιμο.

ΨΕΥΔΗΣ. $\Sigma = \{\varphi\}$ ικανοποιήσιμο
$\Sigma' = \{\neg\varphi\}$ ικανοποιήσιμο

vii) Αν το Σ μη ικανοποιήσιμο, τότε Σ' (όπως πριν) είναι ικανοποιήσιμο.

ΨΕΥΔΗΣ. π.χ. $\Sigma = \{\varphi \vee \neg\varphi, \varphi \wedge \neg\varphi\}$ μη ικανοποιήσιμο
$\Sigma' = \{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)\}$ μη ικανοποιήσιμο

viii) Αν Σ μη ικανοποιήσιμο τότε Σ' μη ικανοποιήσιμο

ΨΕΥΔΗΣ π.χ. $\Sigma = \{\neg(\varphi \vee \neg\varphi)\}$ μη ικανοποιήσιμο
$\Sigma' = \{\varphi \vee \neg\varphi\}$ ικανοποιήσιμο

ix). Αν Σ ικανοποιήσιμο και $\Sigma \models \varphi$, τότε $\Sigma \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο

ΑΛΗΘΗΣ. Διότι αφού Σ ικανοποιήσιμο υπάρχει εκτίμηση v που επαληθεύει το Σ. Αφού η φ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ, η v επαληθεύει και την φ. Άρα η v επαληθεύει το σύνολο $\Sigma \cup \{\varphi\}$

x) Αν $\Sigma \models \varphi$ τότε $\Sigma \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο

ΨΕΥΔΗΣ. Διότι μπορεί το Σ να είναι αντιφατικό (μη ικανοποιήσιμο) και τότε $\Sigma \models \varphi$ για κάθε $\varphi \in P$. Όμως $\Sigma \cup \{\varphi\}$ επίσης μη ικανοποιήσιμο.

Άσκηση 4

Να αποδειχθούν οι ισότητες

i) $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi)\, v(\psi)$

ii) $v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) + v(\psi) - v(\varphi)\, v(\psi)$

Θα τις αποδείξουμε με τη βοήθεια πινάκων αληθείας

$v(\varphi)$	$v(\psi)$	$v(\varphi\wedge\psi)$	$v(\varphi)v(\psi)$	$v(\varphi\vee\psi)$	$v(\varphi)+v(\psi)-v(\varphi)v(\psi)$
1	1	1	1	1	$1+1-1=1$
1	0	0	0	1	$1+0-1\cdot 0=1$
0	1	0	0	1	$0+1-0\cdot 1=1$
0	0	0	0	0	$0+0-0=0$

Άσκηση 5

Να δοθεί ο παραγωγικός ορισμός των παρακάτω εννοιών:

i) $a(\varphi)$ ο αριθμός των θέσεων όπου εμφανίζεται άτομο στη φ

$a(\varphi): P \to \mathbb{N}$

→ Ορίζουμε

$a(p) = 1$ για κάθε άτομο p

→ Για κάθε $\varphi \in P$ ορίζουμε

$a(\neg\varphi) = a(\varphi)$

→ Για κάθε $\varphi, \psi \in P$ ορίζουμε

$a(\varphi \square \psi) = a(\varphi) + a(\psi)$

ii) $B(\varphi)$ ο αριθμός των θέσεων της φ όπου εμφανίζεται διμελής σύνδεσμος

Για κάθε άτομο $p \in P_0$ ορίζουμε $B(p) = 0$

Για κάθε $\varphi \in P$ ορίζουμε $B(\neg\varphi) = B(\varphi)$

Για κάθε $B(\varphi \square \psi) = B(\varphi) + B(\psi) + 1$

iii) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varphi \in P$ ισχύει ότι $a(\varphi) = B(\varphi) + 1$

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή

Για τα άτομα p έχουμε $a(p) = 1$ και $B(p) = 0$

Άρα $a(p) = B(p) + 1$

Έστω ότι η ισότητα ισχύει για την πρόταση φ.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για την $\neg\varphi$

1η γραφή
$$\left.\begin{aligned} a(\neg\varphi) &= a(\varphi) \\ B(\neg\varphi) &= B(\varphi) \\ a(\varphi) &= B(\varphi) + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a(\neg\varphi) = B(\neg\varphi) + 1$$

2η γραφή

$$a(\neg\varphi) = a(\varphi) = B(\varphi) + 1 = B(\neg\varphi) + 1$$

Έστω ότι η ισότητα ισχύει για τις προτάσεις φ, ψ

δηλ. $a(\varphi) = B(\varphi) + 1$

$a(\psi) = B(\psi) + 1$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για την πρόταση $\varphi \square \psi$

$$\left.\begin{aligned} a(\varphi \square \psi) &= a(\varphi) + a(\psi) \\ &= (\ (\varphi) + 1) + (B(\psi) + 1) \end{aligned}\right\} a(\varphi \square \psi) = B(\varphi \square \psi) + 1$$

Άρα η ισότητα ισχύει για κάθε πρόταση $\varphi \in P$

ΜΙΑ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f(0, x, y) = x + y$$

$$f(n+1, 0, y) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ y & n > 1 \end{cases}$$

$f(n+1, x+1, y) = f(n(f(n+1, x, y), y)$

Η f ορίζεται από τις παραπάνω ισότητες
Να βρεθούν οι τιμές:

$f(0,0,0) = 0$

$f(1,1,1) = 2$

$f(2,2,2) = 4$

$f(3,3,3) = 3^{3^{3^{3}}} = 3^{3^{27}}$

$f(4,4,4) =$?

Άσκηση 6

Να αποδειχθεί ότι για κάθε πρόταση $\varphi \in \ell$ ισχύει ότι

$$r(\varphi) \leq \gamma(\varphi)$$

όπου $r(\varphi)$ η τάξη της φ και

$\gamma(\varphi)$ ο αριθμός των θέσεων όπου εμφανίζεται σύνδεσμος στη φ

Υπενθυμίζεται ότι η τάξη $r(\varphi)$ μιας πρότασης ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

i) $r(\rho) = 0$, ρ άτομο

ii) $r(\neg\varphi) = r(\varphi) + 1$, $\varphi \in P$

iii) $r(\varphi \square \psi) = \max\{r(\varphi), r(\psi)\} + 1$

Θα ορίσουμε επαγωγικά και την $\gamma(\varphi)$

i) $\gamma(\rho)$ ρ άτομο

ii) $\gamma(\neg\varphi) = \gamma(\varphi) + 1$ $\varphi \in P$

iii) $\gamma(\varphi \square \psi) = \gamma(\varphi) + \gamma(\psi) + 1$ $\varphi, \psi \in P$

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά

i) $r(\rho) = 0 \leq 0 = \gamma(\varphi)$, ρ άτομο

ii) Έστω $r(\varphi) \leq \gamma(\varphi)$

$r(\neg\varphi) = r(\varphi) + 1 \leq \gamma(\varphi) + 1 = \gamma(\neg\varphi)$

iii) Έστω $r(\varphi) \leq \gamma(\varphi)$

$r(y) \leq \delta(y)$

$$r(\varphi \square y) = \max\{r(\varphi), r(y)\} + 1 \leq \max\{\delta(\varphi), \delta(y)\} + 1$$
$$\leq \max\{\delta(\varphi), \delta(y)\} + \min\{\delta(\varphi), \delta(y)\} + 1$$
$$\leq \delta(\varphi) + \delta(y) + 1$$
$$= \delta(\varphi \square y)$$