ΜΑΘ/ΚΑ ΤΩΝ Η/Υ

Φροντιστήριο 2ο

17/10/15

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ - ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

▸ Βασικές Αρχές Απαρίθμησης

(1) Αρχή του Αθροίσματος

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_k$ μία ___ διαμέριση του E. Τότε

$$|E| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

(2) Αρχή του γινομένου

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots A_k \times| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_k|.$$

▸ Επιλογή κ αντικειμένου απο n αντικείμενα.

	Με σειρά	Χωρίς σειρά
Με επανάληψη	Επαναληπτικές Διατάξεις n^k	Επαναληπτικοί Συνδυασμοί $\binom{n+k-1}{k} = \left[{n \atop k} \right]$
Χωρίς επανάληψη	Απλές Διατάξεις $\frac{n!}{(n-k)!}$	Συνδυασμοί $\binom{n}{k}$

▸ Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

Ο αριθμός των μή αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$. ισούται με

$$\left[{n \atop k} \right] = \binom{n+k-1}{k}$$

Ασκηση 1 sos

Να βρεθεί το πλήθος των 4 ψήφιων αριθμών που κατασκευάζονται απο τα ψηφία $\{0,1,2,5,6,7,8,9\}$ όταν

α) επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους.

Κάθε αριθμός καθορίζεται μοναδικά αν επιλέξουμε τα ψηφία των 4 θέσεων

$\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}\ \overline{w}$

Για το $x \to 7$ επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το $y \to 8$
Για το $z \to 8$
Για το $w \to 8$

Άρα απο τον κανόνα του γινομένου, υπάρχουν συνολικά $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3584$ επιλογές. Δηλαδή 3584 αριθμοί

β) Δεν επιτρέπονται οι επαναλήψεις στα ψηφία τους

$\underset{x}{5}\ \underset{y}{0}\ \underset{z}{\_}\ \underset{w}{\_}$

Για το $x \to 7$ επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το $y \to 7$
Για το $z \to 6$
Για το $w \to 5$

Άρα απο την πολ/σιακή αρχή, συνολικά υπάρχουν $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$. Δηλαδή 1470 αριθμοί.

γ) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και οι αριθμοί πρέπει να είναι περιττοί. πχ 1025, 6809

$\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}\ \overline{w}$

Για το $x \to 7$ επιλογές (εξαιρείται το 0)
Για το $y \to 7$
Για το $z \to 6$
Για το $w \to ?$

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα την απάντηση διότι δεν γνωρίζουμε πόσα από τα ψηφία 1, 5, 7, 9 έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί.

$\boxed{\text{!Εμπειρικός Κανόνας}}$: Πάντα ξεκινάμε την αρίθμηση από την ειδική συνθήκη.

$\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}\ \overline{w}$

Για το $w \to 4$ επιλογές (ένα από τα 1, 5, 7, 9)

Για το $x \to 6$ (εξαιρείται το 0 και ένα από τα περιττά).

Για το $y \to 6$

Για το $z \to 5$

Άρα από τον κανόνα του γινομένου συνολικά υπάρχουν $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 = 720$ αριθμοί.

δ) τα ψηφία τους είναι διαφορετικά και οι αριθμοί πρέπει να είναι άρτιοι.

$\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}\ \overline{w}$

Για το $w \to 4$ επιλογές (0, 2, 6, 8)

Για το $x \to$?

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την απάντηση άμεσα διότι δεν γνωρίζουμε αν έχει χρησιμοποιηθεί στο w το ψηφίο 0 ή όχι.

Για να απαντήσουμε θα διακρίνουμε περιπτώσεις

(α) $w = 0$

$\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}\ \overline{w}$

Για το $w \to 1$

Για το $x \to 7$

Για το $y \to 6$

Για το $z \to 5$

Άρα συνολικά έχουμε $1\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 210$ αριθμούς

(β) $w \neq 0$

Για το $w \longrightarrow 3$ επιλογές

Για το $x \longrightarrow 6$

Για το $y \longrightarrow 6$

Για το $z \longrightarrow 5$

Άρα συνολικά έχουμε $3\cdot 6\cdot 6\cdot 5 = 540$ αριθμούς.

Επομένως τελικά υπάρχουν $210+540 = 750$ αριθμοί.

ε) όταν επιτρέπονται επαναλήψεις στα ψηφία τους και το άθροισμα των δύο πρώτων ψηφίων ισούται με 10.

$\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}\ \overline{w}$

Για τα ψηφία x, y υπάρχουν οι εξής επιλογές:

$(1,9)$, $(2,8)$, $(5,5)$, $(9,1)$, $(8,2)$

άρα έχουμε 5 επιλογές.

Για το $z \longrightarrow 8$

Για το $w \longrightarrow 8$

Άρα απο την πολ/στική αρχή υπάρχουν συνολικά.

$5\cdot 8\cdot 8 = 320$ αριθμοί.

στ) Όταν τα ψηφία τους είναι διαφορετικά και περιέχεται το ψηφίο 9 υποχρεωτικά.

$\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}\ \overline{w}$

{Α' τρόπος} Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις:

i) $x=9$ Τότε όπως προηγουμένως έχουμε $1\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 210$ αριθμούς

ii) $y=9$ Τότε όπως έχουμε δει $1\cdot 6\cdot 6\cdot 5 = 180$ αριθμούς

iii) $z=9$ Αναλόγως $1\cdot 6\cdot 6\cdot 5 = 180$ αριθμούς

iv) $w=9$ Ομοίως $1\cdot 6\cdot 6\cdot 5 = 180$ αριθμούς

Άρα συνολικά $210+3\cdot 180 = 750$ αριθμούς.

{Β' τρόπος}

Η ζητούμενη απάντηση ισούται με τη διαφορά του πλήθους όλων των αριθμών με διαφορετικά ψηφία μείον το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που δεν περιέχουν το 9 και έχουν διαφορετικά ψηφία.

4-ψήφιοι με διαφορετικά ψηφία.

εμφανίζεται το 9	δεν εμφανίζεται το 9.

πλήθος 4-ψήφιων με διαφορετικά ψηφία. $7\cdot7\cdot6\cdot5=1470$

πλήθος 4-ψήφιων με διαφορετικά ψηφία που δεν έχουν 9

$6\cdot6\cdot5\cdot4=720$.

Άρα το ζητούμενο είναι ίσο με $1470-720=750$

Άσκηση 2.

Σε ένα αγωνιστικό όμιλο συμμετέχουν 6 Έλληνες, 6 Άγγλοι, 5 Ιταλοί, 4 Γερμανοί και 4 Ρώσοι αθλητές. Με πόσους μπορεί να σχηματισθεί με επταμελής ομάδα όταν: $6+6+5+4+4=25$

α) Δεν έχουμε περιορισμούς στην επιλογή τους

Απάντηση: $\binom{25}{7}$ τρόποι επιλογής

$= 480.700$

β) Δεν επιτρέπεται να συμμετέχουν έλληνες στην ομάδα.

$25-6=19$ $\quad \binom{19}{7}=\frac{19!}{7!\,(19-7)!}=\frac{19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{7!}$

γ) Πρέπει στην ομάδα να συμμετέχουν ακριβώς 3 Έλληνες.

Για τους 3 Έλληνες έχουμε $\binom{6}{3}$ επιλογές

Για τα υπόλοιπα 4 μέλη έχουμε $\binom{19}{4}$ επιλογές

Άρα απο την αρχή του γινομένου υπάρχουν $\binom{6}{3}\cdot\binom{19}{4}$ τρόποι σχηματισμού της ομάδας.

δ) Η ομάδα αποτελείται από 2 Έλληνες, 2 Άγγλους, 2 Ιταλούς και 1 Ρώσο

Για τους 2 Έλληνες έχουμε $\binom{6}{2}$ επιλογές
Για τους 2 Άγγλους έχουμε $\binom{6}{2}$ επιλογές
Για τους 2 Ιταλούς έχουμε $\binom{5}{2}$ —"—
Για τον 1 Ρώσο έχουμε $\binom{4}{1}$ —"—

Άρα από τον κανόνα του γινομένου συνολικά έχουμε
$\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}$ τρόπους.

ε) Η ομάδα έχει αρχηγό.

(Α' τρόπος)

Αρχικά επιλέγουμε τον αρχηγό της ομάδας.
Υπάρχουν $\binom{25}{1}$ τρόποι επιλογής
Στη συνέχεια θα επιλέξουμε τα υπόλοιπα 6 μέλη
Υπάρχουν $\binom{24}{6}$ τρόποι επιλογής
Άρα συνολικά υπάρχουν $\binom{25}{1}\cdot\binom{24}{6}$ τρόποι

(Β' τρόπος)

Αρχικά επιλέγουμε τα 7 μέλη της ομάδας
Υπάρχουν $\binom{25}{7}$ τρόποι
Στη συνέχεια θα επιλέξουμε τον αρχηγό των 7
Υπάρχουν $\binom{7}{1}$ τρόποι επιλογής.
Άρα από την αρχή του γινομένου συνολικά έχουμε.
$\binom{25}{7}\cdot\binom{7}{1}$ τρόπους.

$$\boxed{\binom{n}{k}\binom{k}{\lambda}=\binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{k-\lambda}}$$

στ) Η ομάδα έχει αρχηγό και είναι Ιταλός.

Για τον αρχηγό Ιταλό έχουμε $\binom{5}{1}$ επιλογές
Για τα υπόλοιπα 6 μέλη έχουμε $\binom{24}{6}$ —''—

Άρα απο τον κανόνα του γινομένου έχουμε $\binom{5}{1}\cdot\binom{24}{6}$ τρόπους σχηματισμού της ομάδας.

ΠΡΟΣΟΧΗ!! SOS
γ) Η ομάδα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 1 Γερμανό

!!! ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ : $\binom{4}{1}\cdot\binom{24}{6}$

ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΟ ΠΑΡΟΜΟΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Σε ένα όμιλο συμμετέχουν 3 Έλληνες E_1, E_2, E_3 και 2 Ιταλοί I_1, I_2. Να βρεθεί ο αριθμός των ομάδων με 2 μέλη στις οποίες περιέχεται τουλάχιστον 1 Ιταλός.

ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: I_1I_2, I_1E_1, I_1E_2, I_1E_3
I_2E_1, I_2E_2, I_2E_3

7 ομάδες

ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\binom{2}{1}\binom{4}{1} = 2\cdot 4 = 8$ ομάδες

ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ :
{Α' τρόπος}
Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το πλήθος των Γερμανών που συμμετέχουν στην ομάδα.
(i) Συμμετέχει ακριβώς 1 Γερμανός
Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν $\binom{4}{1}\binom{21}{6}$ τρόποι
← Για τον 1 Γερμανό
Για τα υπόλοιπα μέλη.

(ii) Συμμετέχουν ακριβώς 2 Γερμανοί
Αναλόγως έχουμε $\binom{4}{2}\binom{21}{5}$ τρόπους

(iii) Συμμετέχουν ακριβώς 3 Γερμανοί
Αναλόγως έχουμε $\binom{4}{3}\binom{21}{4}$ τρόπους.

(iv) Συμμετέχουν ακριβώς 4 Γερμανοί
Αναλόγως $\binom{4}{4}\binom{21}{3}$ τρόποι.

Τελικά έχουμε: $\binom{4}{1}\binom{21}{6}+\binom{4}{2}\binom{21}{5}+\binom{4}{3}\binom{21}{4}+\binom{4}{4}\binom{21}{3}$
τρόπους σχηματισμού της ομάδας

{Β' τρόπος}

$\binom{25}{7}-\binom{21}{7}$

← Όλες οι δυνατές ομάδες

← Όλες οι ομάδες χωρίς Γερμανούς

Άσκηση 3

a) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων αποθήκευσης 7 διαφορετικών αντικειμένων σε 3 διαφορετικά κουτιά.

Απάντηση:

Για το 1ο αντικείμενο έχω 3 επιλογές τοποθέτησης
Για το 2ο " " 3 " "
" " 3ο " " 3 " "
" " 4ο " " 3 " "
" " 5ο " " 3 " "
" " 6ο " " 3 " "
" " 7ο " " 3 " "

Άρα συνολικά έχουμε 3^7 τρόπους αποθήκευσης
$\Phi'(3,7)$

β) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων αποθήκευσης 7 όμοιων αντικειμένων σε 3 διαφορετικά κουτιά.

Κάθε τοποθέτηση των 7 όμοιων αντικειμένων στα 3 διαφορετικά κουτιά, αντιστοιχεί σε μία μη αρνητική ακέραια λύση της εξίσωσης $x_1+x_2+x_3=7$.
Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με $\left[{3 \atop 7}\right]=\binom{3+7-1}{7}=\binom{9}{7}$

γ) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 7 όμοιων αντικειμένων σε 3 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κανένα κουτί να μην μείνει άδειο.

Κάθε τοποθέτηση των 7 όμοιων αντικειμένων στα 3 κουτιά έτσι ώστε κανένα κουτί να μην μείνει άδειο αντιστοιχεί σε μία θετική ακέραια λύση της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \quad \text{όπου } x_1, x_2, x_3 \geq 1$$

Αν τεθεί $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3 - 1$ τότε κάθε λύση της $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ αντιστοιχεί σε μία μη αρνητική λύση της εξίσωσης $(y_1+1)+(y_2+1)+(y_3+1)=7 \Leftrightarrow y_1+y_2+y_3=4$.
όπου $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$.

Άρα το ζητούμενο ισούται με $\left[\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right] = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4}$

δ) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 7 όμοιων αντικειμένων σε 10 διαφορετικά κουτιά έτσι ώστε κανένα κουτί να μην περιέχει πάνω από 1 αντικείμενο.

Αρκεί να επιλέξουμε ποιά κουτιά θα μείνουν άδεια.
Εδώ θα μείνουν $10-7=3$ κουτιά άδεια.
Υπάρχουν $\binom{10}{3}$ να επιλέξουμε τα 3 άδεια κουτιά άρα $\binom{10}{3}$ για να τοποθετήσουμε τα 7 αντικείμενα.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

Άσκηση 4

α) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων διάταξης των γραμμάτων της λέξης ΕΦΑΡΜΟΓΗ

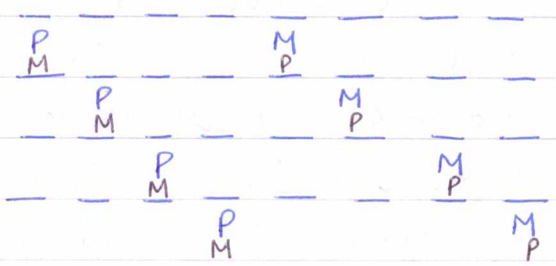
Απάντηση: Υπάρχουν 8 διαφορετικά γράμματα.
Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τις μεταθέσεις των 8 γραμμάτων δηλαδή είναι ίσος με 8!

β) Το ίδιο ερώτημα με την προϋπόθεση ότι τα γράμματα Ρ, Μ πρέπει να είναι γειτονικά.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τα γράμματα Ρ, Μ ως ένα νέο "γράμμα". Υπάρχουν 2 τρόποι για να γίνει αυτό: ΡΜ, ΜΡ.
Τότε μπορούμε να διατάξουμε τα γράμματα:
Ε, Φ, Α, Ο, Γ, Η, "ΡΜ"/"ΜΡ" που είναι σε πλήθος 7, άρα υπάρχουν 7! τρόποι διάταξης. Συνολικά 2·7! τρόποι για τους 2 τρόπους σχηματισμού του "ΡΜ"/"ΜΡ"

γ) Το ίδιο ερώτημα με το (α) με την προσθήκη ότι τα γράμματα Ρ, Μ περιέχουν ακριβώς 3 άλλα γράμματα μεταξύ τους.

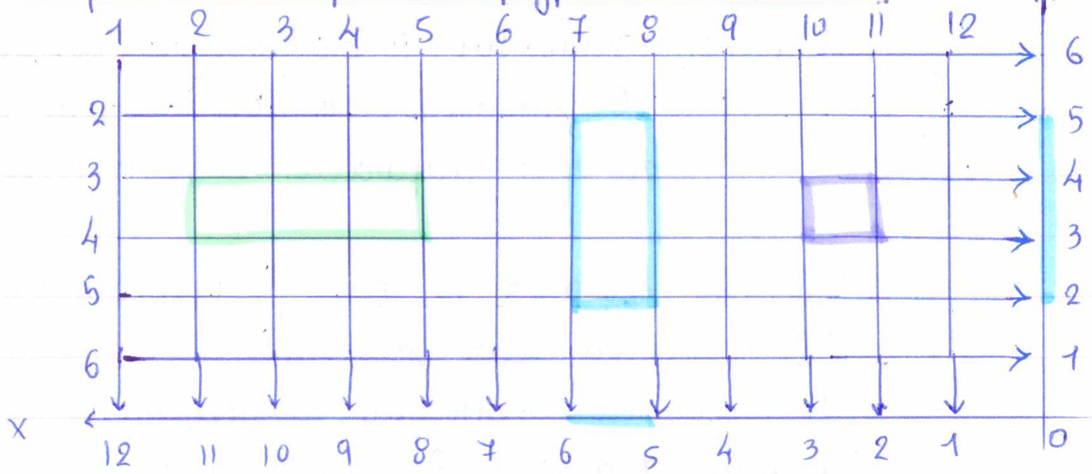
Απάντηση:



Υπάρχουν 8 τρόποι τοποθέτησης των Ρ, Μ. Για τα υπόλοιπα 6 γράμματα έχουμε 6! τρόπους.
Άρα συνολικά έχουμε 8·6! τρόπους.

Άσκηση 5

Να βρεθεί ο αριθμός των ορθογωνίων με πλευρές τις πλευρές του επόμενου πλέγματος.



Κάθε ορθογώνιο καθορίζεται μοναδικά από τις προβολές στους άξονες x, y. Κάθε προβολή καθορίζεται από τα άκρα της.

Στον άξονα y έχουμε $\binom{6}{2}$ προβολές. Στον x $\binom{12}{2}$

Άρα συνολικά $\binom{6}{2}\cdot\binom{12}{2}$ ορθογώνια.

Άσκηση 6

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων επιλογής δύο διαφορετικών αριθμών από το σύνολο $\{1,2,3,\dots,100\}=[100]$ ώστε το άθροισμά τους να είναι άρτιος.

Απάντηση: Είτε θα επιλέξουμε 2 άρτιους, είτε 2 περιττούς

- Υπάρχουν 50 άρτιοι άρα $\binom{50}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε 2 άρτιους
- Υπάρχουν 50 περιττοί άρα $\binom{50}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε 2 περιττούς

Άρα συνολικά $\binom{50}{2}+\binom{50}{2}$ τρόποι επιλογής.