18/11/2016

Σήμερα: Διώνυμο του Νεύτωνα
Παραγοντικά Πολυώνυμα

Ο τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$

Ειδικές Περιπτώσεις

$\boxed{n=2}$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} = \binom{2}{0} a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1} a^1 b^{2-1} + \binom{2}{2} a^2 b^{2-2}$$

$$= b^2 + 2ab + a^2$$

$\boxed{=3}$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ο τύπος χρησιμοποιείται κυρίως για 2 προβλήματα

- υπολογισμός/απλοποίηση αθροισμάτων
- αναπτύγματα δυναμοσειρών (Ανάλυση ΙΙ)

Άσκηση 1

α) Να βρεθεί ο συντελεστής του a^5 στο ανάπτυγμα της έκφρασης $(a+b)^8$

→

Ο γενικός όρος του αθροίσματος στο ανάπτυγμα της έκφρασης είναι της μορφής

$\binom{8}{k} = a^k b^{8-k}$, όπου $k=0,1,\dots,8$

Ο συντελεστής του a^5 προκύπτει για $k=5$ και είναι ίσος με

$\binom{8}{5} \cdot b^{8-5} = \binom{8}{5} b^3$

Προσοχή:
Ο συντελεστής του a^5 δεν επιτρέπεται να περιέχει a

β) Να βρεθεί ο συντελεστής του a^7 στο ανάπτυγμα της παράστασης $\left(a+\frac{1}{a^2}\right)^{10}$

Ο γενικός όρος του αθροίσματος είναι:

$$\binom{10}{k} a^k \left(\frac{1}{a^2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} a^{3k-20}$$

Ο συντελεστής του a^7 προκύπτει όταν

$$3k-20=7 \Leftrightarrow 3k=27 \Leftrightarrow \boxed{k=9}$$

Άρα, ο συντελεστής του a^7 είναι $\binom{10}{9}=10$

γ) Να βρεθεί ο συντελεστής του a^2 στο $\left(a+\frac{1}{a^2}\right)^{10}$

$\rightarrow$ 2

Γενικός όρος $\binom{10}{k} a^{3k-20}$

Ο συντελεστής του a^2 προκύπτει όταν

$$3k-20=2 \Leftrightarrow k=\frac{22}{3} \in \mathbb{Z}$$

επομένως ο συντελεστής του a^2 είναι 0: δηλαδή ισοδύναμα το ανάπτυγμα δεν περιέχει το a^2.

Άσκηση 2 (SOS)

Να απλοποιηθούν τα αθροίσματα

α) $S_1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n}$$

β) $S_2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$

$$S_2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\cdot 1^{n-k}=(2+1)^n=3^n$$

γ) $S_3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$$S_3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\cdot 1^{n-k}=\left(\frac{3}{4}+1\right)^n=\left(\frac{7}{4}\right)^n$$

δ) $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 3^k$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^k \cdot 1^{n-k} = (-3+1)^n = (-2)^n$$

ε) $S_5 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}$

$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \underbrace{\binom{n}{0}}_{\boxed{k=0}} - \underbrace{\binom{n}{1}}_{\boxed{k=1}} = 2^n - 1 - n$$

στ) $S_6 = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}$

$$S_6 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{2} - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 2^n - \frac{n(n-1)}{2} - n - 1 - 1$$

$\boxed{\text{Χρειαζόμαστε}}$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1} \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!}$$

ζ) $S_7 = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k}$

$$S_7 = 2^{n+2}$$

η) $S_8 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$

Θέτουμε $\boxed{k+1=\lambda}$

Για $k=0$ έχουμε $\lambda=1$

Για $k=n-1$ έχουμε $\lambda=n$

Άρα $S_8 = \sum_{\lambda=1}^{n} \binom{n}{\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} - \binom{n}{0} = 2^n - 1$

<u>Ασκηση 3</u> (SOS)

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα

α) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} n\binom{n}{k}$ $\left(= n\binom{n}{0} + n\binom{n}{1} + n\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} \right)$

$S_1 = n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n \cdot 2^n$

Το n δεν εξαρτάται από το k άρα μπορεί να γίνει παράγοντας όλου του αθροίσματος

β) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

Σημαντική Ιδιότητα: $\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$ $\quad a, b \geq 1$
Για $a=n$ και $b=k$, έχουμε: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \Leftrightarrow k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, $k \geq 1, n \geq 1$

$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$

$\rightarrow$

Θέτουμε $\boxed{k-1=\lambda}$

Για $k=1$ έχουμε $\lambda=0$

Για $k=n$ έχουμε $\lambda=n-1$

Άρα, $S_2 = n\cdot\sum_{\lambda=0}^{n-1}\binom{n-1}{\lambda} = n\cdot 2^{n-1}$

γ) $S_3=\sum_{k=0}^{n} (5k+6)\binom{n}{k}$

$$S_3 = 5\cdot\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + 6\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 5n\cdot 2^{n-1}+6\cdot 2^{n}$$

β') Να αποδειχθεί ότι $\binom{a}{b}=\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!} = \frac{a(a-1)!}{b(b-1)!\,(a-b)!} = \frac{a}{b}\cdot\frac{(a-1)!}{(b-1)!\,((a-1)-(b-1))!}$$

$$= \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

δ) $S_4=\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

$$S_4=\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k\cdot\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot n\binom{n-1}{k-1} = n\cdot\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1}$$

Θέτουμε $\boxed{k-1=\lambda}$

Για $k=1$ έχουμε $\lambda=0$

Για $k=n$ έχουμε $\lambda=n-1$

Άρα $S_4 = n\cdot\sum_{\lambda=0}^{n-1}(\lambda+1)\binom{n-1}{\lambda} = n\cdot\left(\sum_{\lambda=0}^{n-1}\lambda\binom{n-1}{\lambda}+\sum_{\lambda=0}^{n-1}\binom{n-1}{\lambda}\right)=$

$$= n\cdot\left[(n-1)\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\right]$$

ε) $S_5 = \sum_{k=0}^{n} (Ak^2 + Bk + C)\binom{n}{k}$, $A, B, C \in \mathbb{R}$

$$S_5 = A\cdot \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} + B\cdot \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + C\cdot \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} =$$

$$= A\cdot n\left((n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}\right) + B\cdot n\cdot 2^{n-1} + C\cdot 2^{n}$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα

α) $s_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Βασική Ιδιότητα:

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} \Leftrightarrow \frac{1}{a}\binom{a}{b} = \frac{1}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

Θέτουμε $\boxed{b = k+1}$ $\boxed{a = n+1}$

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Άρα $s_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$

Θέτουμε $\boxed{k+1=\lambda}$

Για $k=0$ έχουμε $\lambda=1$

Για $k=n$ έχουμε $\lambda=n+1$

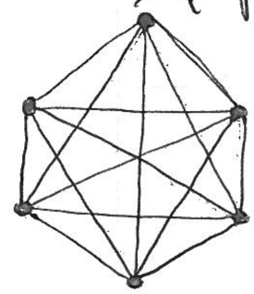
Άρα, $s_1 = \frac{1}{n+1}\sum_{\lambda=1}^{n+1}\binom{n+1}{\lambda} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - \binom{n+1}{0}\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$

β) $S_2=\sum_{k=0}^{n} \frac{7k-2}{k+1}\binom{n}{k}$

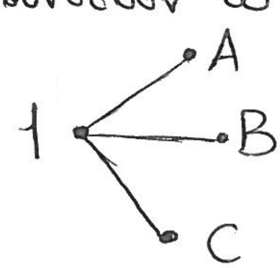
$$S_2=\sum_{k=0}^{n}\frac{7(k+1)-9}{(k+1)}\binom{n}{k}=7\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-9\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=$$
$$=7\cdot 2^n-9\cdot\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

Άσκηση 1.16 (1η σειρά ασκήσεων)

Κάθε γραμμή του επόμενου σχήματος χρωματίζεται κόκκινη ή πράσινη. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε χρωματισμό υπάρχει τουλάχιστον ένα κόκκινο ή ένα πράσινο τρίγωνο.



Επειδή το σημείο 1 συνδέεται με 5 άλλα σημεία, έπεται ότι 3 τουλάχιστον από τις γραμμές του έχουν το ίδιο χρώμα. (Αν δεν ισχύει αυτό, τότε το πολύ 2 γραμμές θα είχαν το ίδιο χρώμα, δηλαδή θα είχαμε το πολύ 2 κόκκινες + 2 πράσινες γραμμές < 5, το οποίο είναι άτοπο.) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι οι γραμμές αυτές είναι πράσινες και έστω ότι συνδέουν το 1 με τα σημεία A, B, C.



Αν η γραμμή AB είναι πράσινη, τότε έχουμε το πράσινο τρίγωνο 1AB.
Αλλιώς, η γραμμή AB είναι κόκκινη.
Αν η γραμμή AC είναι πράσινη, τότε έχουμε το πράσινο τρίγωνο 1A,C. Αλλιώς η γραμμή AC είναι κόκκινη.
Αν η γραμμή BC είναι πράσινη, τότε έχουμε το πράσινο τρίγωνο 1BC. Αλλιώς η γραμμή BC είναι κόκκινη.
Επομένως, τότε έχουμε το κόκκινο τρίγωνο ABC.