Ασκήσεις στην συνδυαστική

Άσκηση 1. *Να υπολογισθεί το πλήθος των 4-ψήφιων αριθμών που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία* $\{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$ *όταν*

i) *τα ψηφία τους μπορούν να επαναλαμβάνονται*

Κάθε 4-ψήφιος αριθμός καθορίζεται μοναδικά να επιλέξουμε τα 4 ψηφία του.

$$\underset{x}{\underline{\quad}}\ \underset{y}{\underline{\quad}}\ \underset{z}{\underline{\quad}}\ \underset{w}{\underline{\quad}} \qquad \{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

Για το x *υπάρχουν* 6 *επιλογές (το* 0 *εξαιρείται).*

Για το y *υπάρχουν* 7 *επιλογές.*

Για το z *υπάρχουν* 7 *επιλογές.*

Για το w *υπάρχουν* 7 *επιλογές.*

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2058$ *τρόποι επιλογής των* $xyzw$.

Υπενθύμιση: Πολλαπλασιαστική αρχή

Αν υπάρχουν k *τρόποι να διαλέξουμε ένα στοιχείο* x *του συνόλου* A
και υπάρχουν λ *τρόποι να διαλέξουμε ένα στοιχείο* y *του συνόλου* B
τότε υπάρχουν $k \cdot \lambda$ *τρόποι να διαλέξουμε ένα ζεύγος* $(x, y) \in A \times B$.

Για παράδειγμα, αν $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ *και* $B = \{y_1, y_2\}$ *τότε*

$A \times B = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}$

και

$|A \times B| = 6 = 3 \cdot 2 = |A| \cdot |B|$

Γενικότερα, $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|$

ii) *τα ψηφία τους πρέπει να είναι διαφορετικά*

$$\underset{x}{\underline{\quad}}\ \underset{y}{\underline{\quad}}\ \underset{z}{\underline{\quad}}\ \underset{w}{\underline{\quad}} \qquad \{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

Για το x *υπάρχουν* 6 *επιλογές (το* 0 *εξαιρείται)*

Για το y *υπάρχουν* 6 *επιλογές (εξαιρείται το* x*)*

Για το z *υπάρχουν* 5 *επιλογές (εξαιρούνται τα* x, y*)*

Για το w *υπάρχουν* 4 *επιλογές (εξαιρούνται τα* x, y, z*)*

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ *τρόποι επιλογής των* $xyzw$.

iii) *δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και οι αριθμοί πρέπει να είναι περιττοί*

$$\underset{x}{\_\_}\ \underset{y}{\_\_}\ \underset{z}{\_\_}\ \underset{w}{\_\_} \qquad \{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

Ένας αριθμός είναι περιττός όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι περιττός.

***1η προσπάθεια**:*

Για το x υπάρχουν 6 επιλογές (το 0 εξαιρείται)

Για το y υπάρχουν 6 επιλογές (εξαιρείται το x)

Για το z υπάρχουν 5 επιλογές (εξαιρούνται τα x, y)

Για το w υπάρχουν ? επιλογές

Δεν μπορούμε να απαντήσουμε για το w διότι δεν γνωρίζουμε πόσα περιττά ψηφία έχουμε χρησιμοποιήσει για τα x, y, z.

Εμπειρικός κανόνας: Ξεκινάμε από την πιο εξειδικευμένη συνθήκη.

***2η προσπάθεια**:*

Για το w υπάρχουν 4 επιλογές (ένα από τα 1, 3, 7, 9)

Για το x υπάρχουν 5 επιλογές (εξαιρούνται τα 0, w)

Για το y υπάρχουν 5 επιλογές (εξαιρούνται τα x, w)

Για το z υπάρχουν 4 επιλογές (εξαιρούνται τα x, y, w)

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 400$ αριθμοί.

iv*) δεν επιτρέπονται επαναλήψεις και το άθροισμα του τρίτου και τέταρτου ψηφίου ισούται με* 9*.*

$$\underset{x}{\_}\ \underset{y}{\_}\ \underset{z}{\_}\ \underset{w}{\_} \qquad \{0, 1, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

Θα αρχίσουμε να καθορίζουμε τους 4-ψήφιους αριθμούς από το ζευγάρι zw και έπειτα θα καθορίσουμε τα υπόλοιπα δύο ψηφία x και y.

Για το ζευγάρι (z, w) *έχουμε τις παρακάτω επιλογές.*

$$(0, 9), (1, 8), (3, 6), (6, 3), (8, 1), (9, 0)$$

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός των επιλογών για το x εξαρτάται από το εάν έχουμε επιλέξει ή όχι το ψηφίο 0 *για το ζεύγος* (z, w)*.*

Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- *Το ζεύγος* (z, w) *περιέχει το* 0*.*
  Για το ζευγάρι (z, w) *υπάρχουν* 2 *επιλογές (τα ζεύγη* $(0, 9)$, $(9, 0)$*)*
  Για το x υπάρχουν 5 *επιλογές (εξαιρούνται τα* 9, 0*)*
  Για το y υπάρχουν 4 *επιλογές (εξαιρούνται τα* 9, 0, *x)*
  Άρα, στην περίπτωση αυτή, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ *αριθμοί.*
- *Το ζεύγος* (z, w) *δεν περιέχει το* 0*.*
  Για το ζευγάρι (z, w) *υπάρχουν* 4 *επιλογές (τα ζεύγη* $(1, 8)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $8, 1)$*)*
  Για το x υπάρχουν 4 *επιλογές (εξαιρούνται τα* 0*, z, w)*
  Για το y υπάρχουν 4 *επιλογές (εξαιρούνται τα x, z, w)*
  Άρα, στην περίπτωση αυτή, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ *αριθμοί.*

Άρα, συνολικά για όλες τις περιπτώσεις υπάρχουν $40 + 64 = 104$ *αριθμοί.*

Άσκηση 2. *Σε ένα τουρνουά συμμετέχουν 34 αθλητές από διάφορες χώρες: 6 Έλληνες, 7 Γερμανοί, 6 Ιταλοί, 5 Άγγλοι, 10 Κινέζοι.*

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια 7-μελή ομάδα όταν

i) *δεν υπάρχουν περιορισμοί.*

$$\binom{34}{7}$$

Υπενθύμιση: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ii) *η ομάδα αποτελείται από 2 Έλληνες, 2 Κινέζους και 3 Γερμανούς.*

Για τους δύο Έλληνες έχουμε $\binom{6}{2}$ *επιλογές (από τους 6 επιλέγουμε 2)*

Για τους δύο Κινέζους έχουμε $\binom{10}{2}$ *επιλογές*

Για τους τρεις Γερμανούς έχουμε $\binom{7}{3}$ *επιλογές.*

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $\binom{6}{2}\binom{10}{2}\binom{7}{3}$ *τρόπους δημιουργίας της ομάδας.*

iii) *η ομάδα έχει αρχηγό (δηλαδή ένα από τα μέλη της θεωρείται ως αρχηγός).*

1ος τρόπος:

Αρχικά επιλέγουμε ποιοι θα συμμετέχουν στην ομάδα:

Υπάρχουν $\binom{34}{7}$ *επιλογές.*

Στην συνέχεια επιλέγουμε 1 άτομο από τους 7 για αρχηγό:

Υπάρχουν $\binom{7}{1} = 7$ *επιλογές για τον αρχηγό.*

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{34}{7}\binom{7}{1}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

2ος τρόπος:

Αρχικά επιλέγουμε τον αρχηγό:

Υπάρχουν $\binom{34}{1}$ *επιλογές.*

Στην συνέχεια επιλέγουμε τα υπόλοιπα 6 μέλη:

Υπάρχουν $\binom{33}{6}$ *επιλογές.*

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{34}{1}\binom{33}{6}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

Παρατήρηση: *Οι αριθμοί που υπολογίσαμε με τους δύο τρόπους είναι ίσοι:*

$$\binom{34}{7}\binom{7}{1} = \binom{34}{1}\binom{34-1}{7-1} = \binom{34}{1}\binom{33}{6}.$$

Υπενθύμιση: $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$

iv) *στην ομάδα δεν πρέπει να συμμετέχουν Ιταλοί.*

$$\binom{34-6}{7} = \binom{28}{7}$$

v) *στην ομάδα πρέπει να συμμετέχει τουλάχιστον ένας Ιταλός.*

ΣΥΝΗΘΙΣΜΕΝΗ ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έχουμε $\binom{6}{1}$ τρόπους να διαλέξουμε ένα Ιταλό.

Έχουμε $\binom{33}{6}$ τρόπους να επιλέγουμε τα υπόλοιπα 6 μέλη.

Άρα, από την αρχή του γινομένου, έχουμε $\binom{6}{1}\binom{33}{6}$ τρόπους σχηματισμού της ομάδας.

Η λύση αυτή δεν είναι σωστή διότι κάποιες ομάδες τις μετράμε πάνω από μια φορά. (Ενώ είναι ίδιες τις μετράμε ως διαφορετικές.)

Για να το δούμε αυτό αναλυτικά υποθέστε ότι έχουμε στην διάθεσή μας 3 Έλληνες: E_1, E_2, E_3 και 2 Ιταλούς: I_1, I_2 και ότι θέλουμε να φτιάξουμε μια ομάδα 2 άτομα η οποία περιέχει τουλάχιστον ένα Ιταλό.

Η λανθασμένη μέθοδος υπολογίζει ότι υπάρχουν $\binom{2}{1}\binom{3+1}{1} = 2 \cdot 4 = 8$ ομάδες.

Στην πραγματικότητα υπάρχουν 7 ομάδες: $I_1 - E_1$, $I_1 - E_2$, $I_1 - E_3$, $I_1 - I_2$, $I_2 - E_1$, $I_2 - E_2$, $I_2 - E_3$. Η ομάδα $I_1 - I_2$ μετριέται δύο φορές με τον λανθασμένο τρόπο.

***1ος τρόπος**:*

Οι επταμελείς ομάδες (χωρίς περιορισμούς) διαμερίζονται σε αυτές που περιέχουν τουλάχιστον ένα Ιταλό και σε αυτές που δεν περιέχουν κανένα Ιταλό.

Άρα, ο αριθμός των ομάδων που περιέχουν τουλάχιστον έναν Ιταλό = αριθμός των ομάδων χωρίς περιορισμό − αριθμός ομάδων που δεν περιέχουν κανένα κανένα Ιταλό $= \binom{34}{7} - \binom{28}{7}$.

***2ος τρόπος**:*

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τον αριθμό των Ιταλών που συμμετέχουν στην ομάδα:

- *Ακριβώς 1 Ιταλός:* $\binom{6}{1}\binom{28}{6}$
- *Ακριβώς 2 Ιταλοί:* $\binom{6}{2}\binom{28}{5}$
- *Ακριβώς 3 Ιταλοί:* $\binom{6}{3}\binom{28}{4}$
- *Ακριβώς 4 Ιταλοί:* $\binom{6}{4}\binom{28}{3}$
- *Ακριβώς 5 Ιταλοί:* $\binom{6}{5}\binom{28}{2}$
- *Ακριβώς 6 Ιταλοί:* $\binom{6}{6}\binom{28}{1}$

Άρα, συνολικά για όλες τις περιπτώσεις υπάρχουν
$$\binom{6}{1}\binom{28}{6}+\binom{6}{2}\binom{28}{5}+\binom{6}{3}\binom{28}{4}+\binom{6}{4}\binom{28}{3}+\binom{6}{5}\binom{28}{2}+\binom{6}{6}\binom{28}{1} = \sum_{i=1}^{6}\binom{6}{k}\binom{28}{7-k}$$
τρόποι σχηματισμού της ομάδας.

***Παρατήρηση**: Ισχύει ότι* $\displaystyle\sum_{k=0}^{c}\binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$

vi) *η ομάδα περιέχει το πολύ ένα Ιταλό.*

Διακρινούμε δύο περιπτώσεις:

- *Η ομάδα περιέχει ακριβώς 1 Ιταλό.*
  Υπάρχουν $\binom{6}{1}\binom{28}{6}$
- *Η ομάδα δεν περιέχει κανένα Ιταλό.*
  Υπάρχουν $\binom{6}{0}\binom{28}{7}$.

Άρα, συνολικά για όλες τις περιπτώσεις υπάρχουν $\binom{6}{1}\binom{28}{6} + \binom{6}{0}\binom{28}{7}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

vii) *η ομάδα έχει αρχηγό και είναι Ιταλός.*

Για τον Ιταλό αρχηγό υπάρχουν $\binom{6}{1} = 6$ *επιλογές.*

Για τα υπόλοιπα 6 *μέλη υπάρχουν* $\binom{33}{6}$ *επιλογές.*

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $6 \cdot \binom{33}{6}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

viii) *η ομάδα έχει αρχηγό και υπαρχηγό.*

Για τον αρχηγό υπάρχουν $\binom{34}{1} = 34$ *επιλογές.*

Για τον υπαρχηγό υπάρχουν $\binom{33}{1} = 33$ *επιλογές.*

Για τα υπόλοιπα 5 *μέλη υπάρχουν* $\binom{32}{5}$ *επιλογές.*

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $34 \cdot 33 \cdot \binom{32}{5}$ *τρόποι σχηματισμού της ομάδας.*

Άσκηση 3.

i) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 διαφορετικές μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά. (Κάθε κουτί έχει απεριόριστη χωρητικότητα.)*

Για κάθε μία από τις 10 μπάλες έχουμε 4 διαφορετικές επιλογές τοποθέτησης. Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\underbrace{4 \cdot 4 \cdots 4}_{10 \text{ φορές}} = 4^{10}$ *τρόποι τοποθέτησης.*

ii) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 όμοιες μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά.*

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4 *είναι ο αριθμός από μπάλες που τοποθετούνται σε κάθε κουτί.*

Υπενθύμιση: Ο αριθμός των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

ισούται με $\binom{n+m-1}{m} = \left[{n \atop m}\right]$.

(Επιλέγουμε m *φορές με επανάληψη από* n *διαφορετικά αντικείμενα. Τα* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *μετράνε πόσες φορές επιλέξαμε το κάθε αντικείμενο.)*

Άρα, υπάρχουν $\left[{4 \atop 10}\right] = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$ *τρόποι τοποθέτησης.*

(Εδώ επιλέγουμε 10 φορές με επανάληψη τα 4 διαφορετικά κουτιά.)

iii) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 όμοιες μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κανένα κουτί να μην μείνει άδειο.*

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4 *είναι ο αριθμός από μπάλες που τοποθετούνται σε κάθε κουτί, με τον περιορισμό ότι* $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 1$.

Αν τεθεί

$$y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3 - 1, y_4 = x_4 - 1$$

τότε $y_1, y_2, y_3, y_4 \geqslant 0$ *και*

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 10 - 4 = 6$$

οπότε κάθε ακέραια λύση της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ *με* $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 1$ *αντιστοιχεί σε μία και μοναδική μη αρνητική ακέραια λύση της εξίσωσης* $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$, *και αντιστρόφως.*

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με $\left[{4 \atop 6}\right] = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}$.

iv) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 20 όμοιες μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε στο πρώτο κουτί να τοποθετηθεί τουλάχιστον 1 μπάλα, στο δεύτερο κουτί τουλάχιστον 2 μπάλες, στο τρίτο τουλάχιστον 3 μπάλες και στο τέταρτο τουλάχιστον 4 μπαλες.*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

όπου $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \geqslant 3$, $x_4 \geqslant 4$.

Αν τεθεί $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 3$, $y_4 = x_4 - 4$, *τότε ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης*

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20 - 10 = 10$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{4 \atop 10}\right] = \binom{13}{10}$.

v) *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 7 όμοιες μπάλες σε 10 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κανένα κουτί να μην περιέχει πάνω από μια μπάλα.*

Προφανώς αφού τα κουτιά είναι περισσότερα από τις μπάλες κάποια κουτιά θα μείνουν άδεια. Επειδή σε κάθε κουτί μπορεί να μπει ακριβώς μια μπάλα έπεται ότι σε κάθε τοποθέτηση θα υπάρχουν ακριβώς $10 - 7 = 3$ *άδεια κουτιά και τα οποία είναι μοναδικά για κάθε τοποθέτηση.*

Επομένως ο αριθμός των τοποθετήσεων ισούται με τον αριθμό των τρόπων να διαλέξουμε 3 άδεια κουτιά δηλαδή είναι ίσος με $\binom{10}{3}$.

Άσκηση 4. *Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν (σε σειρά) 4 κόκκινες, 5 πράσινες και 9 μαύρες μπάλες όταν*

i) *δεν υπάρχουν περιορισμοί*

$$\frac{(4+5+9)!}{4!5!9!} = \frac{18!}{4!5!9!} = 6126120.$$

ii) *οι μπάλες με το ίδιο χρώμα είναι διαδοχικές*

Υπάρχουν 3 χρώματα και επιλέγουμε τη σειρά εμφάνισης των χρωμάτων.

Άρα, υπάρχουν $3! = 6$ *διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης.*

iii) *δεν επιτρέπονται δύο κόκκινες μπάλες να είναι διαδοχικές.*

Αρχικά τοποθετούμε σε μια σειρά τις $9+5=14$ *πράσινες και μαύρες μπάλες. Υπάρχουν* $\frac{14!}{5!9!}$ *τρόποι τοποθέτησης των πράσινων και μαύρων μπαλών.*

Σε κάθε τοποθέτηση πρέπει να προσθέσουμε τις 4 *κόκκινες μπάλες. Μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι σε κάθε τοποθέτηση οι* 4 *κόκκινες μπάλες διαχωρίζουν τις υπόλοιπες* 14 *πράσινες και μαύρες μπάλες σε* 5 *ομάδες.*

$$\underset{x_1}{\underline{\quad}}\ \mathbf{K}\ \underset{x_2}{\underline{\quad}}\ \mathbf{K}\ \underset{x_3}{\underline{\quad}}\ \mathbf{K}\ \underset{x_4}{\underline{\quad}}\ \mathbf{K}\ \underset{x_5}{\underline{\quad}}$$

Το πλήθος των μπαλών που ανήκουν σε κάθε ομάδα μπορεί να κωδικοποιηθεί από μια (διατεταγμένη) 5-άδα x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *όπου*

x_1 *είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται πριν την 1η κόκκινη μπάλα.*

x_2 *είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται ανάμεσα στην 1η και 2η κόκκινη μπάλα.*

x_3 *είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται ανάμεσα στην 2η και 3η κόκκινη μπάλα.*

x_4 *είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται ανάμεσα στην 3η και 4η κόκκινη μπάλα.*

x_5 *είναι ο αριθμός των πράσινων και μαύρων μπαλών που βρίσκονται μετά την κόκκινη μπάλα.*

Με άλλα λόγια τα μεγέθη των ομάδων που δημιουργεί μια τοποθέτηση αντιστοιχούν σε μια μη αρνητική ακέραια λύση της εξίσωσης

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14$$

Προκειμένου οι κόκκινες μπάλες να μην είναι διαδοχικές πρέπει επιπλέον να ισχύει $x_2, x_3, x_4 \geqslant 1$.

Αν τεθεί $y_2=x_2-1$, $y_3=x_3-1$, $y_4=x_4-1$ *τότε ο αριθμός των τρόπων εισαγωγής των κόκκινων μπαλών σε μια τοποθέτηση ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης*

$$x_1+y_2+y_3+y_4+x_5=14-3=11$$

επομένως ισούται με $\left[{5 \atop 11}\right] = \binom{5+11-1}{11} = \binom{15}{11}$.

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν

$$\binom{15}{11}\frac{14}{5!9!} = \frac{15!}{11!4!}\cdot\frac{14!}{5!9!} = \frac{15!14!}{4!5!9!11!} = 2732730$$

τρόποι τοποθέτησης των μπαλών.

Άσκηση 5. *Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους 8 ανδρόγυνα μπορούν να σχηματίσουν ένα κυκλικό χορό (όπου μας ενδιαφέρει ποιος βρίσκεται αριστερά και δεξιά από κάθε πρόσωπο) όταν*

i) *δεν υπάρχουν περιορισμοί.*

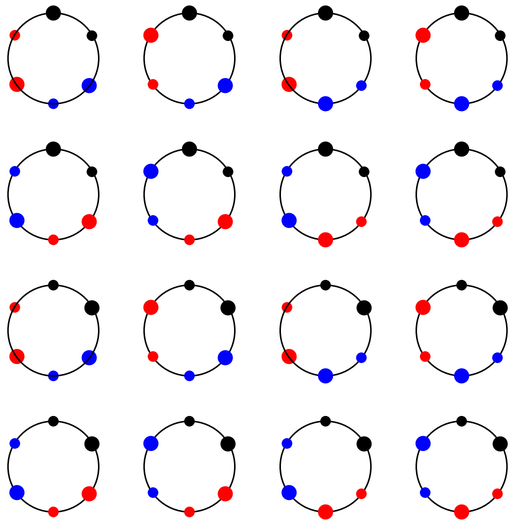
$(16-1)! = 15!$ *Υπενθύμιση: Αριθμός κυκλικών μεταθέσεων n αντικειμένων* $(n-1)!$

ii) *οι σύζυγοι χορεύουν πλάι - πλάι.*

Αρχικά επιλέγουμε την σειρά με την οποία θα μπουν (ως ομάδα) τα 8 ανδρόγυνα στον κύκλο. Υπάρχουν $(8-1)! = 7!$ *τρόποι.*

Για κάθε ανδρόγυνο υπάρχουν 2 τρόποι να μπουν στον χορό, άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $7! \cdot 2^8$ *τρόποι σχηματισμού του χορού.*

Επιβεβαίωση τρόπου σκέψης: Για 3 ανδρόγυνα: ● • ● • ● • *υπάρχουν* $2! \cdot 2^3 = 16$ *τρόποι σχηματισμού του κυκλικού χορού:*



iii) *οι σύζυγοι δεν χορεύουν πλάι - πλάι.*

Δύσκολη άσκηση!

Άσκηση 6.

(i) *Να δειχθεί ότι ο αριθμός των k-άδων ακεραίων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ με*

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$$

ισούται με $\binom{n}{k}$.

Λύση. Κάθε συνδυασμός k αριθμών από το σύνολο $[n]$ αντιστοιχεί σε μια ακριβώς ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_k$ με $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$ και αντιστρόφως. Επομένως, ο αριθμός όλων των ακολουθιών ισούται με $\binom{n}{k}$. □

(ii) *Να δειχθεί ότι ο αριθμός των k-άδων ακεραίων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ με*

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k \leqslant n$$

ισούται με $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}$.

Λύση. Κάθε επαναληπτικός συνδυασμός k αριθμών από το σύνολο $[n]$ αντιστοιχεί σε μια ακριβώς ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_k$ με $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 < \cdots \leqslant a_k \leqslant n$ και αντιστρόφως. Επομένως, ο αριθμός όλων των ακολουθιών ισούται με $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}$. □

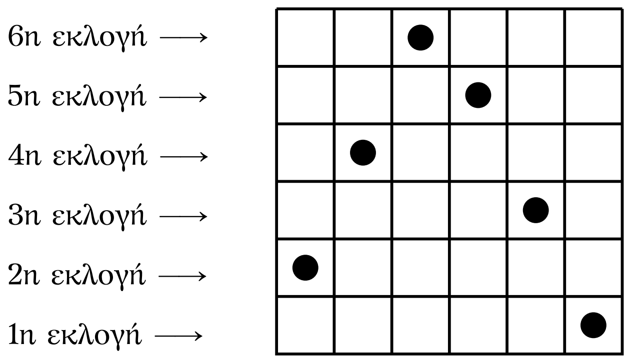
Άσκηση 7. *Να βρεθεί η τιμή της μεταβλητής m μετά την εκτέλεση του επόμενου τμήματος κώδικα.*

```
m = 0;
for(i=1; i<=10; i++){
        for(j=1; j<=i; j++){
                for(k=1; k<=j; k++){
                        m++;
                }
        }
}
```

Λύση. Η εντολή m++ εκτελείται για τα i, j, k για τα οποία ισχύουν οι ανισότητες $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant i \leqslant 10$. Κάθε τριάδα (i, j, k) με αυτές τις ιδιότητες αντιστοιχεί σε ένα επαναληπτικό συνδυασμό των 10 στοιχείων ανά 3 (γιατί;). Επομένως, η εντολή m++ εκτελείται $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{10}{3} = \binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$ φορές, δηλαδή η m θα έχει την τιμή $\binom{12}{3} = 220$. □

Άσκηση 8. *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 6 πιόνια στα τετράγωνα μιας 6×6 σκακιέρας ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα πιόνια στην ίδια γραμμή ή στήλη.*

Λύση. **(1ος τρόπος)**



Το πρώτο πιόνι τοποθετείται στην πρώτη γραμμή με 6 διαφορετικούς τρόπους. Για το δεύτερο πιόνι υπάρχουν 5 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρείται το τετράγωνο της δεύτερης γραμμής στην στήλη του οποίου έχουμε βάλει στην πρώτη γραμμή το πρώτο πιόνι). Για το τρίτο πιόνι υπάρχουν 4 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρούνται τα τετράγωνα της τρίτης γραμμής στις στήλες των οποίων έχουμε ήδη βάλει τα δυο προηγούμενα πιόνια). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο (βλέπε προηγούμενο σχήμα) για το τέταρτο πιόνι υπάρχουν 3 τρόποι, για το πέμπτο 2 τρόποι και για το έκτο ένας μόνο τρόπος τοποθέτησής του.

Έτσι σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή για να τοποθετήσουμε και τα 6 πιόνια στην σκακιέρα θα υπάρχουν

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720 \text{ τρόποι.}$$

(2ος τρόπος) Για το πρώτο πιόνι υπάρχουν 36 τετράγωνα για να τοποθετηθεί. Για το δεύτερο πιόνι υπάρχουν 36-11=25 τετράγωνα για να τοποθετηθεί (αφαιρούνται από τις επιλογές τα 5 τετράγωνα της γραμμής που βρίσκεται το πρώτο πιόνι, τα 5 τετράγωνα της στήλης του πρώτου πιονιού και το 1 τετράγωνο που καταλαμβάνει το πρώτο πιόνι). Για το τρίτο πιόνι υπάρχουν 25-9=16 επιλογές (αφαιρούνται από τις επιλογές τα 4 - και όχι 5 - τετράγωνα της γραμμής που βρίσκεται το δεύτερο πιόνι - αφού ήδη ένα από αυτά τα τετράγωνα έχει αφαιρεθεί προηγουμένως - τα 4 τετράγωνα της γραμμής που βρίσκεται το τρίτο πιόνι και το 1 τετράγωνο που καταλαμβάνει το δεύτερο πιόνι). Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, υπάρχουν 9 τρόποι για το τέταρτο πιόνι, 4 τρόποι για το πέμπτο και 1 τρόπος για το έκτο.

Έτσι σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν

$$36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = (6!)^2$$

τρόποι επιλογής των τετραγώνων τοποθέτησης των έξι πιονιών.

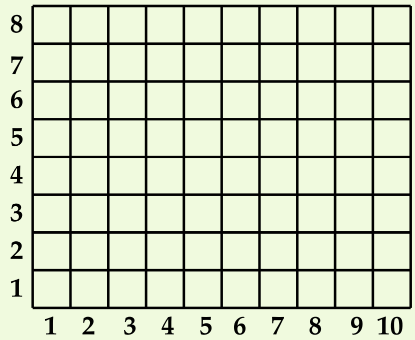
Κατά την εφαρμογή του τρόπου αυτού όμως, κάθε αποτέλεσμα επαναλαμβάνεται πολλές φορές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οποιαδήποτε έξι συγκεκριμένα τετράγωνα καλύπτονται, μπορούν να καλυφθούν με διαφορετική σειρά τοποθέτησης των πιονιών. Δεδομένου ότι η διαδοχική τοποθέτηση των 6 πιονιών γίνεται προφανώς με 6! τρόπους πρέπει να διαιρέσουμε το $(6!)^2$ που ήδη υπολογίσαμε με 6!.

Επομένως, τελικά υπάρχουν

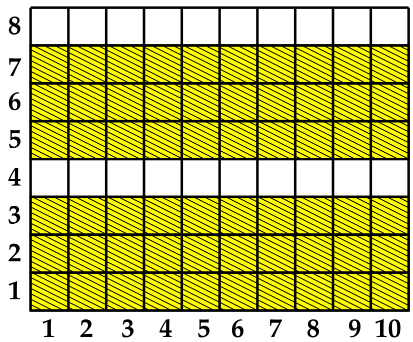
$$\frac{(6!)^2}{6!} = 6!$$

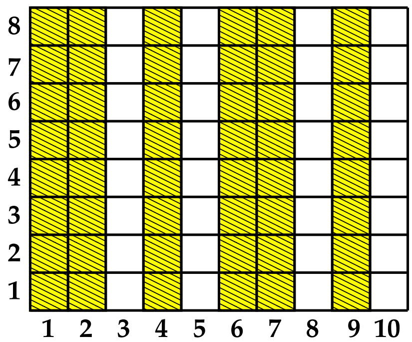
διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης. □

Άσκηση 9. *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 6 πιόνια στα τετράγωνα μιας 8×10 σκακιέρας ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα πιόνια στην ίδια γραμμή ή στήλη.*

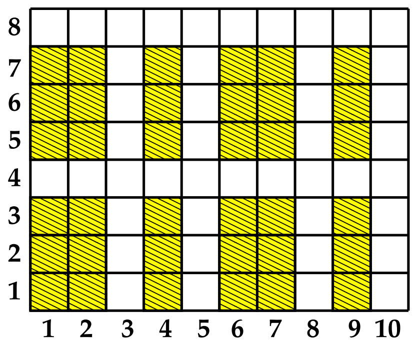


Λύση. Οι 6 γραμμές στις οποίες θα βρίσκονται τα 6 πιόνια μπορούν να επιλεγούν με $\binom{8}{6}$ τρόπους. Αντίστοιχα, οι 6 στήλες στις οποίες θα βρίσκονται τα 6 πιόνια μπορούν να επιλεγούν με $\binom{10}{6}$ τρόπους.





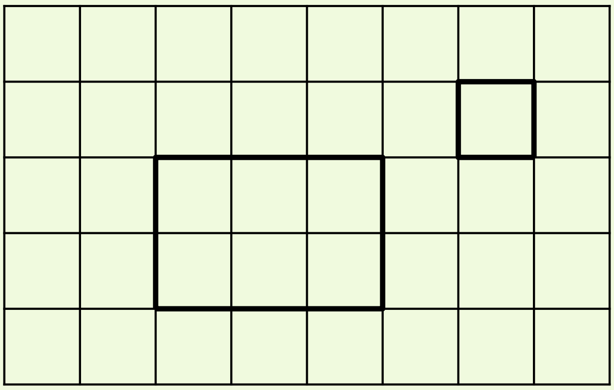
Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν $\binom{8}{6}\binom{10}{6}$ τρόποι για να επιλέξουμε τις 6 γραμμές και τις 6 στήλες. Η τομή αυτών των 6 γραμμών και 6 στηλών σχηματίζει μια σκακιέρα 6×6 με 36 τετράγωνα.



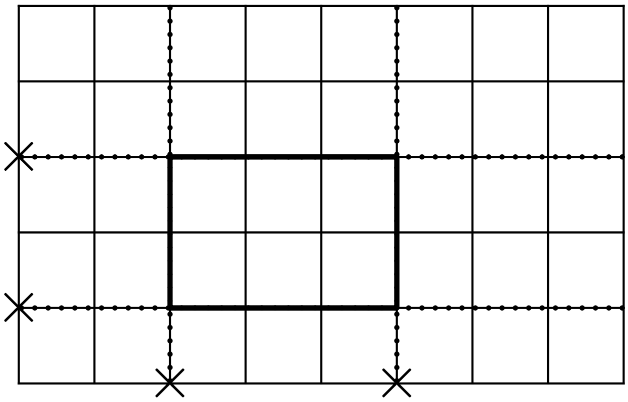
Ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των 6 πιονιών σ' αυτή τη σκακιέρα ισούται με $6!$.

Άρα, τελικά, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{8}{6}\binom{10}{6}6!$ τρόποι τοποθέτησης των 6 πιονιών. □

Άσκηση 10. *Να βρεθεί ο αριθμός των ορθογωνίων με κορυφές τα σημεία και πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα μιας $n \times m$ σκακιέρας.*



Λύση. Κάθε ορθογώνιο προσδιορίζεται μονοσήμαντα επιλέγοντας 2 σημεία στην κάτω πλευρά της σκακιέρας και 2 σημεία στην αριστερή πλευρά της σκακιέρας.



Υπάρχουν $\binom{m+1}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 σημεία στη κάτω πλευρά.
Υπάρχουν $\binom{n+1}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 σημεία στην αριστερή πλευρά.
Από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$ επιλογές. □

Άσκηση 11. *Να δοθεί μια συνδυαστική απόδειξη της ταυτότητας* $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

Λύση. Έστω n ανδρόγυνα από τα οποία θέλουμε να επιλέξουμε 2 άτομα.

Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων επιλογής των 2 ατόμων ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών $2n$ στοιχείων ανά 2, δηλαδή είναι ίσος με $\binom{2n}{2}$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τον ίδιο αριθμό διακρίνοντας δύο περιπτώσεις ως προς το φύλο των ατόμων που επιλέγονται.

(i) Τα 2 άτομα είναι του ιδίου φύλου. Τότε υπάρχουν 2 επιλογές για το φύλο και έπειτα $\binom{n}{2}$ επιλογές για τα δύο άτομα του ιδίου φύλου. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $2\binom{n}{2}$ τρόποι επιλογής τους.

(ii) Τα 2 άτομα είναι διαφορετικού φύλου. Τότε υπάρχουν $\binom{n}{1} = n$ τρόποι να επιλέξουμε μια γυναίκα και $\binom{n}{1} = n$ τρόποι να επιλέξουμε έναν άνδρα. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν n^2 τρόποι επιλογής τους.

Άρα, συνολικά, υπάρχουν $2\binom{n}{2} + n^2$ τρόποι επιλογής των 2 ατόμων.

Επειδή, τόσο με τον πρώτο όσο και με τον δεύτερο τρόπο μετράμε τους ίδιους τρόπους επιλογής, έπεται ότι $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$. □

Άσκηση 12. *Με πόσους τρόπους μπορεί από 12 ανδρόγυνα να επιλεγεί μια εξαμελής επιτροπή:*

(i) *Χωρίς περιορισμό.*

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών των 24 ατόμων ανά 6, δηλαδή

$$\binom{24}{6} = 134596.$$

(ii) *Η επιτροπή δεν μπορεί να περιέχει κάποιο ανδρόγυνο.*

Από κάθε ανδρόγυνο μπορεί να συμμετέχει το πολύ ένα άτομο.

Αρχικά επιλέγουμε ποια ανδρόγυνα θα εκπροσωπηθούν στην επιτροπή. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με $\binom{12}{6}$ *τρόπους.*

Για κάθε ένα από τα 6 ανδρόγυνα που επιλέχθηκαν υπάρχουν 2 επιλογές για το ποιος από τους δύο θα είναι στην επιτροπή.

Άρα, συνολικά, υπάρχουν $\binom{12}{6} \cdot 2^6 = 59136$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

(iii) *Η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο, αντιπρόεδρο, γραμματέα και τρία μέλη.*

Για το σχηματισμό της επιτροπής λαμβάνουμε υπόψη τους διακριτούς ρόλους του προέδρου, αντιπροέδρου, γραμματέα και απλού μέλους.

(1ος τρόπος)

Για την εκλογή του προέδρου υπάρχουν 24 επιλογές.

Για την εκλογή του αντιπροέδρου υπάρχουν 23 επιλογές.

Για την εκλογή του γραμματέα υπάρχουν 22 επιλογές.

Για τα τρία (απλά) μέλη υπάρχουν $\binom{21}{3}$ *επιλογές.*

Άρα, συνολικά, υπάρχουν $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \binom{21}{3} = 16151520$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

(2ος τρόπος)

Αρχικά επιλέγουμε τα άτομα που θα συμμετέχουν στην επιτροπή και στη συνέχεια τους αναθέτουμε ρόλους.

Για την εκλογή των 6 μελών υπάρχουν $\binom{24}{6}$ *επιλογές.*

Για την εκλογή του προέδρου υπάρχουν 6 επιλογές.

Για την εκλογή του αντιπροέδρου υπάρχουν 5 επιλογές.

Για την εκλογή του γραμματέα υπάρχουν 4 επιλογές.

Άρα, συνολικά, υπάρχουν $\binom{24}{6} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 16151520$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

(iv) *Η επιτροπή αποτελείται από πρόεδρο και γραμματέα οι οποίοι είναι άνδρες, από δύο αντιπρόεδρους οι οποίες είναι γυναίκες και από δύο μέλη διαφορετικού φύλου.*

(1ος τρόπος)

Για την εκλογή του άνδρα προέδρου υπάρχουν 12 *επιλογές.*

Για την εκλογή του άνδρα γραμματέα υπάρχουν 11 *επιλογές.*

Για την εκλογή των δύο γυναικών αντιπροέδρων υπάρχουν $\binom{12}{2}$ *επιλογές.*

Για τα δύο μέλη διαφορετικού φύλλου έχουμε $10 \cdot 10$ *επιλογές.*

Άρα, συνολικά, υπάρχουν $12 \cdot 11 \cdot \binom{12}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 871200$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

(2ος τρόπος)

Πρώτα επιλέγουμε τα άτομα που θα συμμετέχουν και έπειτα τους αναθέτουμε ρόλους. Η επιτροπή θα αποτελείται από 3 *άνδρες και* 3 *γυναίκες.*

Για τους 3 *άνδρες υπάρχουν* $\binom{12}{3}$ *επιλογές.*

Για την εκλογή του άνδρα προέδρου υπάρχουν 3 *επιλογές.*

Για την εκλογή του άνδρα γραμματέα υπάρχουν 2 *επιλογές.*

Για τις 3 *γυναίκες υπάρχουν* $\binom{12}{3}$ *επιλογές.*

Για την εκλογή των δύο γυναικών αντιπροέδρων υπάρχουν $\binom{3}{2}$ *επιλογές.*

Άρα, συνολικά, υπάρχουν $\binom{12}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{3}{2} = 871200$ *τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.*

Άσκηση 13. *Σε μια αίθουσα βρίσκονται n άτομα τα οποία κάθονται σε n διακεκριμένες θέσεις. Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να αλλάξουν θέσεις τα n άτομα έτσι ώστε κανείς να μην κάθεται στην αρχική του θέση.*

Λύση. Οι τρόποι που μπορούν να καθίσουν τα n άτομα στις θέσεις τους χωρίς περιορισμό είναι $n!$.

Έστω $\mathcal{A}_i$ το σύνολο όλων των τρόπων να καθίσουν τα n άτομα έτσι ώστε το i-στό άτομο να κάθεται στην αρχική του θέση (και οι υπόλοιποι να μην έχουν κανένα περιορισμό).

Ζητείται να βρεθεί ο πληθάριθμος

$$|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{A}_{n-1}} \cap \overline{\mathcal{A}_n}|.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in [n]$ ισχύει ότι

$$|\mathcal{A}_i| = (n-1)!$$

διότι το i-στό άτομο έχει μόνο ένα τρόπο να καθίσει και για τα υπόλοιπα $n-1$ άτομα υπάρχουν $(n-1)!$ τρόποι να καθίσουν.

Επίσης, για κάθε ζεύγος άτομων i, j ισχύει ότι

$$|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| = (n-2)!$$

διότι τα άτομα i, j έχουν ένα τρόπο να καθίσουν, και για τα υπόλοιπα $n-2$ άτομα υπάρχουν $(n-2)!$ τρόποι να καθίσουν.

Αντίστοιχα, για κάθε τριάδα ατόμων i, j, k ισχύει ότι

$$|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k| = (n-3)!$$

κ.ο.κ. Για κάθε m-άδα ατόμων $i_1, i_2, \dots, i_m$ με $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n$ ισχύει ότι

$$|\mathcal{A}_{i_1} \cap \mathcal{A}_{i_2} \cap \cdots \cap \mathcal{A}_{i_m}| = (n-m)!$$

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{A}_{n-1}} \cap \overline{\mathcal{A}_n}| \\
&= |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n \\
&= |\mathcal{E}| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\mathcal{A}_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\mathcal{A}_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k| - \cdots \\
&\qquad + (-1)^m \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n} |\mathcal{A}_{i_1} \cap \mathcal{A}_{i_2} \cap \cdots \cap \mathcal{A}_{i_m}| + \cdots + (-1)^n |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n|.
\end{aligned}$$

Επειδή το πλήθος των ζευγών ισούται με τους συνδυασμούς $\binom{n}{2}$, το πλήθος των τριάδων ισούται με τους συνδυασμούς $\binom{n}{3}$, και γενικά, το πλήθος των m-αδων είναι ίσο με τους συνδυασμούς $\binom{n}{m}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{A}_{n-1}} \cap \overline{\mathcal{A}_n}| \\
&= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^m \binom{n}{m}(n-m)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)!.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 14. *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν, μεταξύ των μελών ενός ομίλου που αποτελείται από 20 μέλη, δύο επιτροπές, η μια εκ των οποίων να αποτελείται από πρόεδρο, αντιπρόεδρο, ταμία και γραμματέα, ενώ η άλλη από 3 μέλη.*

(i) *Όταν οι δύο επιτροπές μπορούν να έχουν κοινά μέλη.*

Για την επιτροπή που έχει πρόεδρο έχουμε τις εξής επιλογές:

Για την εκλογή του προέδρου υπάρχουν 20 επιλογές.

Για την εκλογή του αντιπροέδρου υπάρχουν 19 επιλογές.

Για την εκλογή του ταμία υπάρχουν 18 επιλογές.

Για την εκλογή του γραμματέα υπάρχουν 17 επιλογές.

Άρα, για την σύνθεση αυτής της επιτροπής υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ *τρόποι.*

Για την επιτροπή με τα τρία μέλη υπάρχουν $\binom{20}{3}$ *τρόποι επιλογής.*

Άρα, συνολικά, για τις δύο επιτροπές υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \binom{20}{3}$ *τρόποι σχηματισμού.*

(ii) *Όταν οι δύο επιτροπές δεν έχουν κοινά μέλη.*

Στην περίπτωση όπου οι δύο επιτροπές δεν έχουν κοινά μέλη, για τον σχηματισμό της επιτροπής που έχει πρόεδρο υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ *τρόποι. Ενώ, για το σχηματισμό της επιτροπής με τα 3 μέλη υπάρχουν* $\binom{16}{3}$ *επιλογές.*

Άρα, συνολικά, για τις δύο επιτροπές υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \binom{16}{3}$ *τρόποι σχηματισμού.*

(iii) *Όταν ο πρόεδρος είναι το μοναδικό κοινό μέλος των δύο επιτροπών.*

Στην περίπτωση όπου οι δύο επιτροπές έχουν ως κοινό μέλος τον πρόεδρο, για τον σχηματισμό της επιτροπής που έχει πρόεδρο υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ *τρόποι. Ενώ, για το σχηματισμό της επιτροπής με τα 3 μέλη υπάρχουν* $\binom{16}{2}$ *επιλογές (αφού το τρίτο μέλος της είναι ο πρόεδρος της άλλης επιτροπής).*

Άρα, συνολικά, για τις δύο επιτροπές υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \binom{16}{2}$ *τρόποι σχηματισμού.*

Άσκηση 15. *Έστω a_n το πλήθος των λέξεων μήκους n που κατασκευάζονται από τα ψηφία $\{0, 1, 2, 3\}$ και οι οποίες περιέχουν άρτιο αριθμό εμφανίσεων του 0. Να δειχθεί ότι $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$.*

Λύση. Οι λέξεις μήκους n που κατασκευάζονται από τα ψηφία $\{0, 1, 2, 3\}$ είναι 4^n.

Από αυτές, ονομάζουμε *έγκυρες* τις λέξεις που έχουν άρτιο αριθμό εμφανίσεων 0. Επομένως, ο αριθμός των έγκυρων λέξεων μήκους n ισούται με a_n και ο αριθμός των μή έγκυρων λέξεων μήκους n ισούται με $4^n - a_n$.

Έστω μια έγκυρη λέξη μήκους $n + 1$. Η λέξη αρχίζει είτε με 0, είτε με $1, 2, 3$.

Στην πρώτη περίπτωση, τα υπόλοιπα n στοιχεία της λέξης αποτελούν μια μη έγκυρη λέξη μήκους n, άρα υπάρχουν $1 \cdot (4^n - a_n)$ έγκυρες λέξεις μήκους $n + 1$ που αρχίζουν με 0.

Στις υπόλοιπες περιπτώσεις, τα υπόλοιπα n στοιχεία της λέξης αποτελούν μια έγκυρη λέξη μήκους n, άρα υπάρχουν $3 \cdot a_n$ έγκυρες λέξεις μήκους $n + 1$ που αρχίζουν με 1, ή 2, ή 3.

Άρα, από τον κανόνα του αθροίσματος ισχύει ότι

$$a_{n+1} = 1 \cdot (4^n - a_n) + 3 \cdot a_n = 2a_n + 4^n. \qquad \square$$

Άσκηση 16. *Να βρεθεί το πλήθος των διαιρετών του* 1000.

Λύση. Ισχύει ότι $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$.

Άρα, κάθε διαιρέτης του 1000 θα έχει την μορφή $2^k \cdot 5^\lambda$ όπου $0 \leqslant k, \lambda \leqslant 3$.

Για το k υπάρχουν 4 επιλογές.

Για το λ υπάρχουν 4 επιλογές.

Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $4 \cdot 4 = 16$ διαιρέτες του 1000.

(Διαιρέτες του 1000: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 50, 40, 100, 125, 200, 250, 500, 1000). $\square$