Μαθηματικά των Υπολογιστών

Προτασιακός Λογισμός

2021-2022

Πίνακες αληθείας

φ	y	$\varphi \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

φ	y	$\varphi \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

φ	y	$\varphi \to y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

φ	y	$\varphi \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

Άσκηση 1 (Τιμές αληθείας)

Δοθέντος ότι η πρόταση $p \to q$ είναι ψευδής, να βρεθεί η τιμή αληθείας των προτάσεων $(p \to q) \to r$, $p \vee (q \to r)$ και $q \wedge (p \vee r)$.

Λύση.

Επειδή $v(p \to q) = 0$ ισχύει ότι $v(p) = 1$ και $v(q) = 0$.
Άρα,
$v((p \to q) \to r) = 1$ (αφού $v(p \to q) = 0$).
$v(p \vee (q \to r)) = 1$ (αφού $v(p) = 1$).
$v(q \wedge (p \vee r)) = 0$ (αφού $v(q) = 0$). □

Άσκηση 2 (Ψευδείς προτάσεις)

Να βρεθούν εκτιμήσεις για τις οποίες οι παρακάτω προτάσεις είναι ψευδείς:

i) $\varphi_1 = (x \vee y \vee z) \to ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$.

ii) $\varphi_2 = ((p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)) \to \neg q$.

Λύση

i) Για να είναι η πρόταση φ_1 ψευδής πρέπει $v((x \vee y \vee z)) = 1$ και $v(((x \vee y) \wedge (x \vee z)) = 0$.
Αν $v(x) = 1$, τότε $v((x \vee y \vee z)) = v(((x \vee y) \wedge (x \vee z))) = 1$. Άρα, $v(x) = 0$.
Επομένως, πρέπει ακριβώς ένα από τα y και z να είναι ψευδές (και το άλλο αληθές).
Άρα, έχουμε δύο εκτιμήσεις για τις οποίες $v(\varphi_1) = 0$:

$v(x) = v(y) = 0$ και $v(z) = 1$.

$v(x) = v(z) = 0$ και $v(y) = 1$.

Λύση (συνέχεια)

ii) Για να είναι η πρόταση φ_2 ψευδής πρέπει
$v((p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)) = 1$ και $v(\neg q) = 0$.
Άρα, $v(q) = 1$.
Επομένως, $v(\neg q \to \neg p) = 1$ (αφού $v(\neg q) = 0$).
οπότε και $v((p \to (q \wedge r)) \to (\neg q \to \neg p)) = 1$ (αφού $v(\neg q \to \neg p) = 1$).
Συνεπώς, έχουμε τέσσερεις εκτιμήσεις για τις οποίες $v(\varphi_2) = 0$:

$$v(q) = v(p) = v(r) = 1$$
$$v(q) = v(p) = 1,\ v(r) = 0$$
$$v(q) = v(r) = 1,\ v(p) = 0$$
$$v(q) = 1,\ v(p) = v(r) = 0.$$

Άσκηση 3 (**Αναδρομικοί τύποι για την εκτίμηση**)

Να δειχθεί ότι για κάθε εκτίμηση v ισχύουν τα παρακάτω:

α) $v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \cdot v(\psi)$.

β) $v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) + v(\psi) - v(\varphi) \cdot v(\psi)$.

γ) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$.

δ) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi)$.

ε) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 - |v(\varphi) - v(\psi)|$.

δ) $v(\varphi \to \psi) = 1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi)$.

Επειδή κάθε πρόταση είναι ή αληθής ή ψευδής διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές αληθείας των φ και ψ:

$v(\varphi) = v(\psi) = 1$.
(1ο μέλος) $v(\varphi \to \psi) = 1$.
(2ο μέλος) $1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi) = 1 - 1 + 1 \cdot 1 = 1$.

$v(\varphi) = 1$ και $v(\psi) = 0$.
(1ο μέλος) $v(\varphi \to \psi) = 0$.
(2ο μέλος) $1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi) = 1 - 1 + 1 \cdot 0 = 0$.

$v(\varphi) = 0$ και $v(\psi) = 1$.
(1ο μέλος) $v(\varphi \to \psi) = 1$.
(2ο μέλος) $1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi) = 1 - 0 + 0 \cdot 1 = 1$.

$v(\varphi) = v(\psi) = 0$.
(1ο μέλος) $v(\varphi \to \psi) = 1$.
(2ο μέλος) $1 - v(\varphi) + v(\varphi) \cdot v(\psi) = 1 - 0 + 0 \cdot 0 = 1$.

Άρα, η ισότητα ισχύει σε κάθε περίπτωση.

Βασικοί ορισμοί

Αν $v(\varphi) = 1$, λέμε ότι η v **ικανοποιεί** ή **επαληθεύει τη** φ ή ότι η v **είναι μοντέλο της** φ και γράφουμε $\boldsymbol{v \models \varphi}$. (Γράφουμε $\boldsymbol{v \not\models \varphi}$ όταν $v(\varphi) = 0$.)

Αν τώρα $\Sigma \subseteq P$ και $v \models \varphi$, για κάθε $\varphi \in \Sigma$, τότε λέμε ότι η v **ικανοποιεί** ή **επαληθεύει το $\boldsymbol{\Sigma}$** ή ότι η v **είναι μοντέλο του $\boldsymbol{\Sigma}$** και γράφουμε $\boldsymbol{v \models \Sigma}$.
Το $\Sigma \subseteq P$ λέγεται **ικανοποιήσιμο** όταν υπάρχει (τουλάχιστον μια) εκτίμηση v τέτοια ώστε $v \models \Sigma$, (δηλαδή, αν έχει τουλάχιστον ένα μοντέλο). Αν το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο (δηλαδή όταν δεν υπάρχει εκτίμηση v τέτοια ώστε $v \models \Sigma$) τότε ονομάζεται **μη ικανοποιήσιμο** ή **αντιφατικό**.

Μια πρόταση φ λέγεται **ταυτολογία** αν $v \models \varphi$ για κάθε v και τότε γράφουμε $\boldsymbol{\models \varphi}$. Η φ λέγεται **αντίφαση** ή **αντιλογία** αν $v \not\models \varphi$ για κάθε v.

Βασικοί ορισμοί

Έστω $\varphi \in P$, $\Sigma \subseteq P$. Η φ λέγεται **λογικό συμπέρασμα του** Σ, αν κάθε μοντέλο του Σ είναι και μοντέλο της φ, (δηλαδή για κάθε εκτίμηση v, αν $v \models \Sigma$ τότε $v \models \varphi$). Γράφουμε τότε $\boldsymbol{\Sigma \models \varphi}$. (Αν $\Sigma = \{y\}$, γράφουμε $\boldsymbol{y \models \varphi}$ αντί $\{y\} \models \varphi$.)
Ισοδύναμα, η φ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ ανν το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.
Από τον ορισμό προκύπτει ότι **η** φ **δεν είναι λογικό συμπέρασμα του** Σ ανν υπάρχει μοντέλο του Σ το οποίο δεν είναι μοντέλο της φ. Στην περίπτωση όπου το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο, έπεται ότι $\Sigma \models \varphi$ για κάθε $\varphi \in P$.

Οι φ, y λέγονται **(λογικά) ισοδύναμες**, αν και μόνο αν $\varphi \models y$ και $y \models \varphi$ (δηλαδή οι φ και y έχουν τα ίδια μοντέλα). Γράφουμε τότε $\boldsymbol{\varphi \models\mid y}$.

Άσκηση 4

Να εξετασθεί αν η πρόταση

$$\varphi = ((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)$$

είναι ταυτολογία ή όχι.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του πίνακα αληθείας. Η πρόταση αυτή περιέχει 3 διαφορετικά άτομα: Τα p, q, r. Άρα, ο πίνακας αληθείας της θα έχει $2^3 = 8$ γραμμές.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \to (q \to r)$	$p \to r$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι η φ δεν είναι ταυτολογία, διότι υπάρχει εκτίμηση v για την οποία $v(\varphi) = 0$: Η εκτίμηση v με $v(p) = 1$ και $v(q) = v(r) = 0$.

Βασικές λογικές ισοδυναμίες

$\left\{\begin{array}{c}(\varphi \to y) \mathrel{\models\!\dashv} (\neg\varphi \lor y) \\ (\varphi \leftrightarrow y) \mathrel{\models\!\dashv} (\varphi \to y) \land (y \to \varphi)\end{array}\right\}$	(Άρα οι σύνδεσμοι $\to, \leftrightarrow$ δεν είναι απαραίτητοι.)
$\left\{\begin{array}{c}\neg(\varphi \land y) \mathrel{\models\!\dashv} \neg\varphi \lor \neg y \\ \neg(\varphi \lor y) \mathrel{\models\!\dashv} \neg\varphi \land \neg y \\ \neg(\neg\varphi) \mathrel{\models\!\dashv} \varphi\end{array}\right\}$	Κανόνες του De Morgan.
$\left\{\begin{array}{c}\varphi \land (y \land \sigma) \mathrel{\models\!\dashv} (\varphi \land y) \land \sigma \\ \varphi \lor (y \lor \sigma) \mathrel{\models\!\dashv} (\varphi \lor y) \lor \sigma\end{array}\right\}$	Προσεταιριστικότητα των $\land, \lor$.
$\left\{\begin{array}{c}\varphi \land y \mathrel{\models\!\dashv} y \land \varphi \\ \varphi \lor y \mathrel{\models\!\dashv} y \lor \varphi\end{array}\right\}$	Αντιμεταθετικότητα των $\land, \lor$.
$\left\{\begin{array}{c}\varphi \lor (y \land \sigma) \mathrel{\models\!\dashv} (\varphi \lor y) \land (\varphi \lor \sigma) \\ \varphi \land (y \lor \sigma) \mathrel{\models\!\dashv} (\varphi \land y) \lor (\varphi \land \sigma)\end{array}\right\}$	Επιμεριστικότητα των $\land, \lor$ ως προς τους $\lor, \land$ αντίστοιχα.
$\left\{\begin{array}{l}\text{Αν } \varphi \models y, \text{ τότε } \varphi \land y \mathrel{\models\!\dashv} \varphi \\ \text{Αν } \varphi \models y, \text{ τότε } \varphi \lor y \mathrel{\models\!\dashv} y\end{array}\right\}$	Κανόνες απορρόφησης.

Άσκηση 5 (Λογικά συμπεράσματα)

Δίδονται οι προτάσεις $\varphi_1 = p \wedge q$ και $\varphi_2 = p \vee q$. Να εξετασθεί αν η πρόταση φ_2 είναι λογικό συμπέρασμα της πρότασης φ_1 και το αντίστροφο.

Λύση.

Η φ_1 έχει μοναδικό μοντέλο την εκτίμηση v με $v(p) = v(q) = 1$. Η εκτίμηση αυτή επαληθεύει την φ_2, οπότε η φ_2 είναι λογικό συμπέρασμα της φ_1.

Το αντίστροφο δεν ισχύει διότι η εκτίμηση v με $v(p) = 1$ και $v(q) = 0$ είναι μοντέλο της φ_2 (αφού $v(\varphi_2) = 1$) όμως δεν είναι μοντέλο της φ_1 (αφού $v(\varphi_1) = 0$).

Παρατήρηση: Μπορούσαμε να δώσουμε την απάντηση ελέγχοντας αν οι προτάσεις $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ και $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ είναι ταυτολογίες ή όχι, αντίστοιχα. $\square$

Άσκηση 6 (Μοντέλα συνόλων προτάσεων)

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, όλα τα μοντέλα του συνόλου Σ_i*, όπου*

i) $\Sigma_1 = \{p_1 \to p_2, p_1 \wedge (p_1 \to p_2), p_2 \vee (p_1 \wedge p_2)\}$.

ii) $\Sigma_2 = \{p_1 \vee p_2, p_1 \wedge \neg p_3, p_2 \to (p_1 \vee p_3)\}$.

iii) $\Sigma_3 = \{p_1 \wedge \neg p_2, p_2 \vee p_3, p_3 \wedge p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, \neg p_5 \vee p_6\}$.

Στη συνέχεια, να εξετασθεί αν κάποια από τις προτάσεις $p_1 \to p_6$ *και* $p_1 \to p_3$ *είναι λογικό συμπέρασμα του συνόλου* Σ_3.

Λύση

Στις προτάσεις του Σ_1 εμφανίζονται 2 διαφορετικά άτομα: τα p_1, p_2.
Ο πίνακας αληθείας των προτάσεων του Σ_1 είναι ο εξής:

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$	$p_1 \wedge (p_1 \to p_2)$	$p_2 \vee (p_1 \wedge p_2)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Από τον πίνακα αληθείας των προτάσεων έπεται ότι το Σ_1 έχει ακριβώς ένα μοντέλο: την εκτίμηση v με $v(p_1) = v(p_2) = 1$.

Λύση (συνέχεια)

Ο πίνακας αληθείας των προτάσεων του Σ_2 είναι ο εξής:

p_1	p_2	p_3	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \wedge \neg p_3$	$p_2 \to (p_1 \vee p_3)$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1

Άρα, το Σ_2 έχει δύο μοντέλα:
1ο μοντέλο: $v(p_1) = v(p_2) = 1$ και $v(p_3) = 0$.
2ο μοντέλο: $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = v(p_3) = 0$.

Λύση (συνέχεια)

Επειδή στις προτάσεις του Σ_3 εμφανίζονται 6 διαφορετικά άτομα (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) η μέθοδος του πίνακα αληθείας απαιτεί $2^6 = 64$ γραμμές.
Γι αυτό θα χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο τρόπο για να βρούμε τα μοντέλα του Σ_3.
Έστω v ένα μοντέλο του Σ_3, τότε $v(\varphi) = 1$ για κάθε $\varphi \in \Sigma_3$.
Για να μειώσουμε τον αριθμό των περιπτώσεων που πρέπει να εξετάσουμε, αρχίζουμε από τις συζευκτικές προτάσεις.
$v(p_1 \wedge \neg p_2) = 1 \Leftrightarrow v(p_1) = 1$ και $v(\neg p_2) = 1 \Leftrightarrow v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
$v(p_3 \wedge p_4) = 1 \Leftrightarrow v(p_3) = 1$ και $v(p_4) = 1$.
$v(p_2 \vee p_3) = 1$, το οποίο ισχύει αφού $v(p_3) = 1$.
$v(\neg p_4 \vee \neg p_5) = 1 \Leftrightarrow v(\neg p_5) = 1$ αφού $v(p_4) = 1$. Άρα, $v(p_5) = 0$.
$v(\neg p_5 \vee p_6) = 1$, το οποίο ισχύει αφού $v(p_5) = 0$. Για το p_6 υπάρχουν 2 επιλογές $v(p_6) = 1$ ή $v(p_6) = 0$.
Άρα, τελικά, για το Σ_3 υπάρχουν 2 ακριβώς μοντέλα:
1ο μοντέλο: $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_6) = 1$ και $v(p_2) = v(p_5) = 0$.
2ο μοντέλο: $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = 1$ και $v(p_2) = v(p_5) = v(p_6) = 0$.

Λύση (συνέχεια)

Η πρόταση $p_1 \to p_6$ δεν είναι λογικό συμπέρασμα του συνόλου Σ_3 διότι υπάρχει μοντέλο του Σ_3, το οποίο δεν είναι μοντέλο της πρότασης $p_1 \to p_6$. (Το 2ο μοντέλο του Σ_3.)
Η πρόταση $p_1 \to p_3$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ_3, διότι κάθε μοντέλο του Σ_3 είναι και μοντέλο της πρότασης $p_1 \to p_3$.

Άσκηση 7 (Προβλήματα ικανοποιησιμότητας)

Να εξετασθεί ποιά από τα παρακάτω σύνολα προτάσεων είναι ικανοποιήσιμα:

α) *Το* $\{p_1, p_1 \to p_2, \neg p_2\}$.

> *Δεν είναι ικανοποιήσιμο, διότι αν υπάρχει εκτίμηση* v *που επαληθεύει το σύνολο πρέπει* $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, *οπότε τότε* $v(p_1 \to p_2) = 0$.

β) *Το* $\{p_n \to p_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

> *Είναι ικανοποιήσιμο. Ένα μοντέλο του είναι η εκτίμηση* v *με* $v(p_i) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

γ) Το $\{p \wedge q, r \to \neg q, r \vee \neg p, p \vee q \vee r\}$.

Αν υπάρχει εκτίμηση v που επαληθεύει το σύνολο πρέπει $v(p \wedge q) = 1$, δηλαδή πρέπει $v(p) = v(q) = 1$.
Επομένως, αφού πρέπει $v(r \to \neg q) = 1$ έπεται ότι $v(r) = 0$.
Τότε, όμως, έχουμε ότι $v(r \vee \neg p) = 0$. Άρα, το σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο.

δ) Το $\{p \to q, q \to r, r \to s, s \to \neg p, \neg p \to t, t \to w, w \to p\}$.

ε) Το $\{p \wedge r, \neg p \vee q, q \to s, s \to w, \neg w \to (p \vee r), p \vee s\}$.

Άσκηση 8 (Μη ικανοποιήσιμο σύνολο)

Έστω

$$\Sigma = \{\neg(q \to (p \vee r)), (q \to p) \wedge q\}.$$

i) Να βρεθούν όλα τα μοντέλα του συνόλου Σ.

ii) Να εξετασθεί αν η πρόταση $p \to r$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ.

Λύση

i) Για κάθε μοντέλο v του Σ πρέπει να ισχύει
$v(\neg(q \to (p \vee r))) = v((q \to p) \wedge q) = 1$.
Επομένως,
$v(\neg(q \to (p \vee r))) = 1 \Leftrightarrow v(q \to (p \vee r)) = 0 \Leftrightarrow v(q) = 1$ και
$v(p \vee r) = 0$.
Άρα, πρέπει $v(q) = 1$ και $v(p) = v(r) = 0$.
Για την εκτίμηση αυτή έχουμε $v((q \to p) \wedge q) = 0$.
Άρα, το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο, δηλαδή δεν έχει κανένα μοντέλο.

Λύση (συνέχεια)

ii) Επειδή το Σ είναι μη ικανοποιήσιμο, έπεται ότι η πρόταση $p \to r$ είναι λογικό συμπέρασμα του Σ.

Άσκηση 9 (Ιδιότητες λογικού συμπεράσματος)

α) Να δειχθεί ότι αν $\Sigma \models \varphi$ *ή/και* $\Sigma \models \psi$, *τότε ισχύει ότι* $\Sigma \models \varphi \vee \psi$.

Έστω ότι η $\varphi \vee \psi$ *δεν είναι λογικό συμπέρασμα του* Σ. *Τότε υπάρχει ένα μοντέλο v του* Σ *το οποίο δεν επαληθεύει την πρόταση* $\varphi \vee \psi$, *δηλαδή* $v(\varphi \vee \psi) = 0 \Rightarrow v(\varphi) = v(\psi) = 0$.
Άρα, ούτε η φ *είναι λογικό συμπέρασμα του* Σ, *ούτε η* ψ *είναι λογικό συμπέρασμα του* Σ, *το οποίο είναι άτοπο.*
Άρα, η $\varphi \vee \psi$ *είναι λογικό συμπέρασμα του* Σ.

β) Να δειχθεί ότι δεν ισχύει ότι $\Sigma \models \varphi \vee \psi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$ ή/και $\Sigma \models \psi$.

Θα δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα που δείχνει ότι δεν ισχύει αυτή η συνεπαγωγή.
Θα βρούμε ένα σύνολο προτάσεων Σ και δύο προτάσεις φ, ψ που έχουν τις εξής ιδιότητες:
Κάθε μοντέλο του Σ να επαληθεύει την $\varphi \vee \psi$.
Υπάρχει ένα μοντέλο του Σ που δεν επαληθεύει την φ.
Υπάρχει ένα (άλλο) του Σ που δεν επαληθεύει την ψ.

p	q	Σ	φ	ψ
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	-	-
0	0	0	-	-

Αν επιλέξουμε $\Sigma = \{p \vee q, p \vee \neg q\}$
$\varphi = p \wedge q$, $\psi = \neg(p \rightarrow q)$
τότε ισχύει ότι $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, ενώ δεν ισχύει καμία από τις προτάσεις $\Sigma \models \varphi$ και $\Sigma \models \psi$.

Άσκηση 10

Να εξετασθεί ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. (Να αιτιολογηθούν οι απαντήσεις.)

1. *Το σύνολο P είναι ικανοποιήσιμο.*
2. *Το σύνολο P_0 είναι ικανοποιήσιμο.*
3. *Το σύνολο P_0' που περιέχει τις αρνήσεις των ατόμων δεν είναι ικανοποιήσιμο.*
4. *Αν Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε περιέχει μόνο ταυτολογίες.*
5. *Αν Σ_1, Σ_2 είναι ικανοποιήσιμα, τότε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ είναι ικανοποιήσιμο.*
6. *Αν Σ_1, Σ_2 είναι ικανοποιήσιμα, τότε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.*
7. *Αν Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε το σύνολο Σ' που περιέχει τις αρνήσεις όλων των προτάσεων του Σ είναι επίσης ικανοποιήσιμο.*
8. *Αν Σ είναι ικανοποιήσιμο και $\Sigma \models \varphi$, τότε το σύνολο $\Sigma \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.*

Λύση

1. Ψευδής. Το P περιέχει και αντιλογίες.
2. Αληθής. Η εκτίμηση v με $v(p) = 1$ για κάθε $p \in P_0$ είναι μοντέλο του P_0.
3. Ψευδής. Η εκτίμηση v με $v(p) = 0$ για κάθε $p \in P_0$ είναι μοντέλο του P_0'.
4. Ψευδής. Το $\Sigma = \{p\}$ είναι ικανοποιήσιμο, αλλά η πρόταση p δεν είναι ταυτολογία.
5. Ψευδής. Για παράδειγμα, αν $\Sigma_1 = \{p\}$, $\Sigma_2 = \{\neg p\}$, τότε Σ_1, Σ_2 ικανοποιήσιμα, αλλά $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ μη ικανοποιήσιμο.
6. Ψευδής. Για παράδειγμα, αν $\Sigma_1 = \{p\}$, $\Sigma_2 = \{q\}$, τότε Σ_1, Σ_2 ικανοποιήσιμα και $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{p, q\}$ είναι επίσης ικανοποιήσιμο.
7. Ψευδής. Για παράδειγμα, αν $\Sigma = \{p \vee \neg p\}$, τότε Σ είναι ικανοποιήσιμο, αλλά $\Sigma' = \{\neg(p \vee \neg p)\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.
8. Αληθής. Αφού Σ ικανοποιήσιμο υπάρχει v με $v \models \Sigma$. Επίσης, αφού φ λογικό συμπέρασμα του Σ για κάθε εκτίμηση $v \models \Sigma$ ισχύει ότι $v \models \varphi$. Άρα $v \models \Sigma \cup \{\varphi\}$. Άρα, $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

Κανονικές μορφές

Κανονική διαζευκτική μορφή (DNF)

Έστω φ μια πρόταση η οποία δεν είναι αντιλογία και περιέχει τις προτασιακές μεταβλητές $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ισχύει ότι:

$$\varphi \models\!\!\mid \bigvee_{v\in[\varphi]}(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^v),$$

όπου $[\varphi] = \{\text{εκτίμηση } v : v(\varphi) = 1\}$ και $p_i^v = \begin{cases} p_i, & \text{αν } v(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & \text{αν } v(p_i) = 0. \end{cases}$

Πρακτικά, οποιαδήποτε πρόταση φ μπορεί να γραφτεί ως διαζεύξεις συζεύξεων ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

* Στον πίνακα αληθείας της φ κοιτάζουμε μόνο τις γραμμές με $v(\varphi) = 1$. Για κάθε τέτοια γραμμή δημιουργούμε μια σύζευξη από n μεταβλητές (p_i, αν στην i-οστή θέση της γραμμής έχουμε 1 και $\neg p_i$ αν έχουμε 0).
* Συνδέουμε τις συζεύξεις αυτές με διαζεύξεις.

Αν μια πρόταση έχει γραφεί ως διαζεύξεις συζεύξεων, ονομάζεται **κανονική διαζευκτική μορφή (disjunctive normal form** - DNF)

Κανονική συζευκτική μορφή (CNF)

Αντίστοιχα με την κανονική διαζευκτική μορφή, μπορούμε επίσης να γράφουμε οποιαδήποτε πρόταση φ (η οποία δεν είναι ταυτολογία) ως συζεύξεις διαζεύξεων:

* Κοιτάζουμε στον πίνακα αληθείας της φ μόνο τις γραμμές με $v(\varphi) = 0$. Για κάθε τέτοια γραμμή δημιουργούμε μια διάζευξη από n μεταβλητές ($\neg p_i$ αν στη i-οστή θέση της γραμμής έχουμε 1 και p_i αν έχουμε 0).
* Συνδέουμε τις διαζεύξεις αυτές με συζεύξεις.

Αν μια πρόταση έχει γραφεί ως συζεύξεις διαζεύξεων, ονομάζεται **κανονική συζευκτική μορφή** (**conjuctive normal form** - **CNF**).

DNF :

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$.

CNF :

$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)$.

Άσκηση 11 (Μορφές DNF και CNF)

Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

$\phi \to \psi$

$\models\!\mid \neg\phi \lor \psi$ *(Είναι σε μορφή CNF και DNF.)*

$((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$

$\models\!\mid \neg\phi \lor \psi$

$(\neg\phi \lor (\phi \to \zeta)) \land (\neg\zeta \lor (\phi \to \psi))$

$\models\!\mid (\neg\phi \lor \zeta) \land (\neg\zeta \lor \neg\phi \lor \psi)$ *(CNF)*
$\models\!\mid (\neg\phi \land \neg\zeta) \lor (\zeta \land \neg\phi) \lor (\zeta \land \psi)$ *(Μετά από πράξεις.) (DNF)*

$(\neg\phi) \lor (\phi \land \psi)$

$\models\!\mid \neg\phi \lor \psi$ *(Μετά από πράξεις.)*

Άσκηση 12 (Μορφές DNF και CNF)

Μετατρέψτε την παρακάτω πρόταση σε DNF και CNF μορφή:

$$\varphi_1 = \neg(p_1 \rightarrow p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3),$$

DNF: Υπενθύμιση: $a \rightarrow b \models\!\!\!\!\!\!\!= \neg a \vee b$. Άρα,
$\varphi_1 \models\!\!\!\!\!\!\!= \neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$
Υπενθύμιση: $\neg(a \vee b) \models\!\!\!\!\!\!\!= \neg a \wedge \neg b$ και $\neg\neg a \models\!\!\!\!\!\!\!= a$. Άρα,
$\varphi_1 \models\!\!\!\!\!\!\!= (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$ (DNF)

(1ος τρόπος:) Θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$a \vee (b \wedge c) \models\!\!\!\!\!\!\!= (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &\models\!\!\!\!\!\!\!= ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee \neg p_1) \wedge ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \\
&\models\!\!\!\!\!\!\!= ((\neg p_1 \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)) \wedge ((p_3 \vee p_1) \wedge (p_3 \vee \neg p_2)) \\
&\models\!\!\!\!\!\!\!= (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_3 \vee p_1) \wedge (p_3 \vee \neg p_2)(CNF)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος αυτή δεν είναι αποδοτική όταν η DNF περιέχει από πολλές διαζεύξεις.

(2ος τρόπος:) Από την DNF μορφή μπορούμε να βρούμε τα μοντέλα της φ_1. Η φ_1 έχει τα παρακάτω μοντέλα:

$$v(p_1) = 1,\ v(p_2) = 0,\ v(p_3) = 0$$
$$v(p_1) = 1,\ v(p_2) = 0,\ v(p_3) = 1$$
$$v(p_1) = 0,\ v(p_2) = 0,\ v(p_3) = 1$$
$$v(p_1) = 0,\ v(p_2) = 1,\ v(p_3) = 1$$

Στην CNF μας ενδιαφέρουν οι εκτιμήσεις που δεν επαληθεύουν την φ_1. Άρα, για τις υπόλοιπες $8 - 4 = 4$ εκτιμήσεις η φ_1 δεν επαληθεύεται. Οι εκτιμήσεις αυτές είναι οι επόμενες:

$$v(p_1) = 1,\ v(p_2) = 1,\ v(p_3) = 0$$
$$v(p_1) = 1,\ v(p_2) = 1,\ v(p_3) = 1$$
$$v(p_1) = 0,\ v(p_2) = 0,\ v(p_3) = 0$$
$$v(p_1) = 0,\ v(p_2) = 1,\ v(p_3) = 0$$

Επομένως, η φ_1 έχει την παρακάτω CNF μορφή:

$$\varphi_1 \models\!\!\!\mid (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$$

Άσκηση 13 (Κατασκευή πρότασης με συγκεκριμένα μοντέλα)

Να βρεθεί μια πρόταση φ που περιέχει τα άτομα p, q, r και είναι αληθής όταν ακριβώς ένα από τα p, q, r είναι αληθές.

Λύση

Η πρόταση φ θα έχει τον επόμενο πίνακα αληθείας:

p	q	r	φ
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

p	q	r	φ
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
			0

Χρησιμοποιώντας την μορφή DNF, μια τέτοια πρόταση είναι η εξής:
$\varphi = (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

Άσκηση 14

Οι κάτοικοι ενός χωριού χωρίζονται σε δύο ομάδες.
Όσοι ανήκουν στην πρώτη λένε πάντα αλήθεια, ενώ όσοι ανήκουν στη δεύτερη λένε πάντα ψέματα.
Ένας τουρίστας φτάνει σε μια διχαλωτή διασταύρωση του χωριού, της οποίας μόνο ο ένας κλάδος οδηγεί στην πρωτεύουσα.
Επειδή δεν υπάρχουν σχετικές πινακίδες, απευθύνεται σε ένα κάτοικο που συναντά.
Ζητείται να ευρεθεί η ερώτηση που πρέπει να κάνει, ώστε να ακολουθήσει τον κλάδο που οδηγεί στην πρωτεύουσα.

Λύση

Θεωρούμε τις προτάσεις:
p: Λέω την αλήθεια.
q: Ο αριστερός κλάδος οδηγεί στην πρωτεύουσα.

Μας ενδιαφέρει να εξακριβώσουμε αν η πρόταση q είναι αληθής ή όχι.
Η τιμή αληθείας της πρότασης p δεν μας ενδιαφέρει.
Η **βασική ιδέα** της λύσης είναι να κατασκευάσουμε μια πρόταση φ τέτοια ώστε: *Αν ρωτήσουμε οποιοδήποτε κάτοικο του χωριού αν η* φ *είναι αληθής ή όχι, τότε η* απάντηση που θα μας δώσει *να ταυτίζεται με την πραγματική τιμή αληθείας της πρότασης* q.
Αν συμβολίσουμε με $\mathrm{ans}(\varphi)$ την απάντηση στην ερώτηση αν η φ είναι αληθής, τότε υπάρχουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

p	q	φ	$\mathrm{ans}(\varphi)$
A		A	A
A		Ψ	Ψ
Ψ		A	Ψ
Ψ		Ψ	A

Λύση (συνέχεια)

Συμπληρώνουμε τις τιμές αληθείας του q αντιγράφοντας τις απαντήσεις $ans(\varphi)$.

p	q	φ	$\mathrm{ans}(\varphi)$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ
Ψ	A	Ψ	A

Επομένως, η ζητούμενη πρόταση φ έχει πίνακα αληθείας

p	q	φ
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A
Ψ	A	Ψ

Λύση (συνέχεια)

Άρα, η ζητούμενη πρόταση φ είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $p \leftrightarrow q$.
Επομένως, θα ρωτήσουμε οποιονδήποτε κάτοικο αν η πρόταση ""Λες αλήθεια αν και μόνο αν ο αριστερός κλάδος οδηγεί στην πρωτεύουσα"" είναι αληθής ή όχι.
Αν η απάντηση του είναι αληθής, τότε και η q είναι αληθής.
Διαφορετικά, η q θα είναι ψευδής.

Άσκηση 15 (Εξισώσεις με προτάσεις)

Να βρεθεί μια πρόταση φ *ώστε η πρόταση* ψ *να είναι ταυτολογία, όταν* $\psi = ((\varphi \wedge q) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \varphi)$

Άσκηση 16 (Σύνδεσμος Sheffer)

Να αποδειχθεί ότι ο σύνδεσμος $|$ *(που ονομάζεται* **σύνδεσμος του Sheffer***) με πίνακα αληθείας*

φ	y	$\varphi \vert y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

είναι επαρκής για να εκφράσει οποιοδήποτε λογικό σύνδεσμο.

Λύση

Αφού το σύνολο $\{\neg, \vee, \wedge\}$ είναι επαρκές, αρκεί να εκφραστούν οι τρεις αυτοί σύνδεσμοι συναρτήσει του $|$. Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία $p|q \models\!\!\!| \neg(p \wedge q)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \neg p &\models\!\!\!| \neg(p \wedge p) \models\!\!\!| p|p \\ p \vee q &\models\!\!\!| \neg(\neg p \wedge \neg q) \models\!\!\!| (\neg p)|(\neg q) \models\!\!\!| (p|p)|(q|q) \\ p \wedge q &\models\!\!\!| \neg\neg(p \wedge q) \models\!\!\!| \neg(p|q) \models\!\!\!| (p|q)|(p|q) \end{aligned}$$

Άρα το μονοσύνολο $\{|\}$ είναι επαρκές.

Άσκηση 17 (Επαρκή σύνολα συνδέσμων)

Να δειχθεί ότι ο σύνδεσμος $\vee$ *μπορεί να εκφραστεί μόνο με τη βοήθεια του συνδέσμου* $\rightarrow$.
Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$ *είναι επαρκές.*

Αρχή της απόφασης

Αρχή της απόφασης

Από τις προτάσεις $\varphi \vee p$ και $\psi \vee \neg p$ προκύπτει ως λογικό συμπέρασμα η πρόταση $\varphi \vee \psi$.

Παρατήρηση

Έστω $\Sigma \subseteq P$. Η πρόταση ϕ είναι λογικό συμπέρασμα του συνόλου Σ αν και μόνο αν το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.

Άσκηση 18

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $\Sigma \vdash_r \varphi$, *όπου* $\varphi = p_2 \wedge \neg p_3$ *και*

$$\Sigma = \{p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1), \neg p_1 \vee \neg p_3, p_1 \rightarrow p_2, p_4 \vee \neg(p_2 \wedge p_5), p_6\},$$

ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1:

Η $p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1)$ γράφεται σε CNF:
$(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4)$.

Η $\neg p_1 \vee \neg p_3$ είναι τετριμμένη (είναι ήδη σε CNF).

Η $p_1 \rightarrow p_2$ γράφεται σε CNF $\neg p_1 \vee p_2$.

Η $p_4 \vee \neg(p_2 \wedge p_5)$ γράφεται σε CNF $p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5$.

Η p_6 είναι τετριμμένη (είναι ήδη σε CNF).

Άρα, $\Sigma' =$
$\{(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4), \neg p_1 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2, p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, p_6\}$.

Βήμα 2:
Η άρνηση της αποδεικτέας είναι η $\neg(p_2 \wedge \neg p_3)$, η οποία σε CNF γράφεται ως $\neg p_2 \vee p_3$.

Βήμα 3:
Διασπώντας την $(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4)$ (η οποία είναι η μόνη που χρειάζεται τέτοια διάσπαση) σε τρεις προτάσεις (τα "μέρη" της: $\neg p_1 \vee p_4$, $\neg p_4 \vee p_1$, $p_1 \vee p_4$), δημιουργούμε το σύνολο $\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$:

$$\begin{aligned}\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}'' = \{&\neg p_1 \vee p_4, \neg p_4 \vee p_1, p_1 \vee p_4, \neg p_1 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2,\\ &p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, p_6, \underbrace{\neg p_2 \vee p_3}_{\{\neg\varphi\}''}\}.\end{aligned}$$

Βήμα 4:

Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την αρχή της απόφασης, μέχρι να πάρουμε την κενή πρόταση:

1. $\neg p_2 \vee p_3$
2. $\neg p_1 \vee p_4$
3. $\neg p_4 \vee p_1$
4. $p_1 \vee p_4$
5. $\neg p_1 \vee \neg p_3$
6. $\neg p_1 \vee p_2$
7. $p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5$
8. p_6 Από το $\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$
9. $p_1 \vee p_1$, (δηλαδή p_1) (Από 3, 4 και αρχή απόφασης)
10. p_2 (Από 6, 9 και αρχή απόφασης)
11. $\neg p_1 \vee \neg p_2$ (Από 1, 5 και αρχή απόφασης)
12. $\neg p_1$ (Από 10, 11 και αρχή απόφασης)
13. αντίφαση (Από 9, 12 και αρχή απόφασης).

Άσκηση 19

-Αν έχω TV και δεν είμαι απασχολημένος, θα δω το έργο.
-Αν έχω video και είμαι απασχολημένος, θα γράψω το έργο.
-Αν γράψω το έργο, θα το δω.
-Έχω TV.
-Έχω video.
Να δειχθεί ότι θα δω οπωσδήποτε το έργο.

p :	Θα δω το έργο.
q :	Έχω TV.
r :	Είμαι απασχολημένος.
s :	Θα γράψω το έργο.
t :	Έχω video.

$$\Sigma = \{q \wedge \neg r \to p, \quad t \wedge r \to s, \quad s \to p, \quad q, \quad t\}.$$

Βήμα 1: $\Sigma' = \{\neg q \vee r \vee p, \quad \neg t \vee \neg r \vee s, \quad \neg s \vee p, \quad q, \quad t\}.$

Βήμα 2: Η άρνηση της αποδεικτέας είναι η $\neg p$ (η οποία είναι ήδη σε CNF).

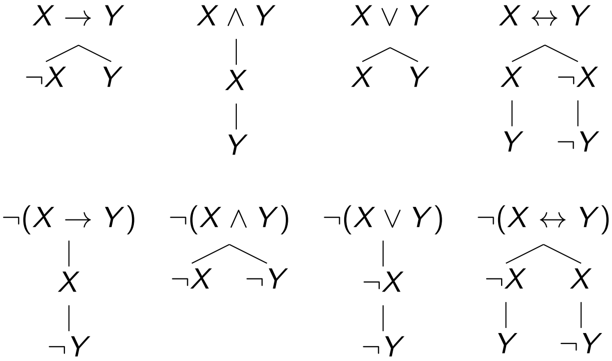
Βήμα 3: Δεδομένου ότι $\Sigma'' = \Sigma'$, έχουμε ότι

$$\Sigma'' \cup \{\neg\phi\}'' = \{p \vee \neg q \vee r, \quad s \vee \neg t \vee \neg r, \quad p \vee \neg s, \quad q, \quad t, \quad \neg p\}.$$

Βήμα 4: Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την αρχή της απόφασης, μέχρι να πάρουμε την κενή πρόταση:

$$\begin{array}{rll}
1. & p \vee \neg q \vee r & \multirow{6}{*}{} \\
2. & \neg p & \\
3. & q & \\
4. & s \vee \neg t \vee \neg r & \\
5. & p \vee \neg s & \\
6. & t &
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}}\right\} \text{Από το } \Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$$

$$\begin{array}{rll}
7. & \neg q \vee r & \text{(Από 1, 2 και αρχή απόφασης)} \\
8. & r & \text{(Από 3, 7 και αρχή απόφασης)} \\
9. & p \vee \neg t \vee \neg r & \text{(Από 4, 5 και αρχή απόφασης)} \\
10. & \neg t \vee \neg r & \text{(Από 2, 9 και αρχή απόφασης)} \\
11. & \neg r & \text{(Από 6, 10 και αρχή απόφασης)} \\
12. & \text{αντίφαση} & \text{(Από 8, 11 και αρχή απόφασης).}
\end{array}$$



$X \to Y$
$\neg X$ Y
$X \wedge Y$
X
Y
$X \vee Y$
X Y
$X \leftrightarrow Y$
X $\neg X$
Y $\neg Y$
$\neg(X \to Y)$
X
$\neg Y$
$\neg(X \wedge Y)$
$\neg X$ $\neg Y$
$\neg(X \vee Y)$
$\neg X$
$\neg Y$
$\neg(X \leftrightarrow Y)$
$\neg X$ X
Y $\neg Y$

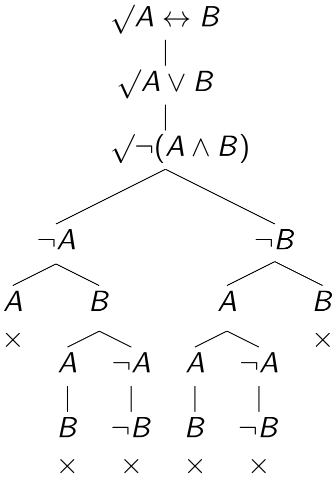
Οι κανόνες αυτοί προφανώς εκφράζουν τις ισοδυναμίες:

$$
\begin{aligned}
X \to Y &\quad \models\!\!\!\models\quad (\neg X) \vee Y \\
X \wedge Y &\quad \models\!\!\!\models\quad X \wedge Y \\
X \vee Y &\quad \models\!\!\!\models\quad X \vee Y \\
X \leftrightarrow Y &\quad \models\!\!\!\models\quad (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \\
\neg(X \to Y) &\quad \models\!\!\!\models\quad X \wedge \neg Y \\
\neg(X \wedge Y) &\quad \models\!\!\!\models\quad \neg X \vee \neg Y \\
\neg(X \vee Y) &\quad \models\!\!\!\models\quad \neg X \wedge \neg Y \\
\neg(X \leftrightarrow Y) &\quad \models\!\!\!\models\quad (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y),
\end{aligned}
$$

με διακλάδωση για το $\vee$ και με διαδοχική παράθεση (το ένα κάτω από το άλλο) για το $\wedge$.

Άσκηση 20

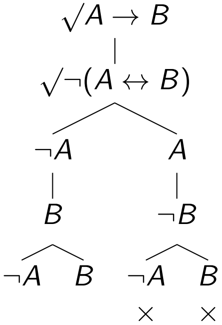
Να εξετασθεί αν ισχύει ότι $\{A \leftrightarrow B, \quad A \vee B\} \models A \wedge B$.



Όλες οι διαδρομές είναι κλειστές, άρα ισχύει.

Άσκηση 21

Να εξετασθεί αν ισχύει ότι $A \to B \models A \leftrightarrow B$.



Οι δύο πρώτες διαδρομές δεν είναι κλειστές, άρα δεν ισχύει.
Παρατήρηση. Παρατηρούμε εδώ ότι οι διαδρομές που δεν κλείνουν περιέχουν τα $\neg A$, B. Άρα τα $\neg A$, B (δηλαδή $A : 0$, $B : 1$) δίνουν ένα αντιπαράδειγμα. Πράγματι, αν $A : 0$, $B : 1$, τότε ισχύει $A \to B : 1$ ενώ $A \leftrightarrow B : 0$.

Άσκηση 22

Να εξετασθεί αν ισχύει ότι $A \vee B \to C \models A \vee C$.

$$
\begin{array}{c}
\surd A \vee B \to C \\
| \\
\surd \neg(A \vee C) \\
| \\
\neg A \\
| \\
\neg C \\
\begin{array}{cc}
\surd \neg(A \vee B) & C \\
| & \times \\
\neg A & \\
| & \\
\neg B &
\end{array}
\end{array}
$$

Η πρώτη διαδρομή δεν είναι κλειστή, άρα δεν ισχύει.

Παρατήρηση. Στη διαδρομή που δεν κλείνει εμφανίζονται τα $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ τα οποία δίνουν ένα αντιπαράδειγμα. Πράγματι, για A, B, $C : 0$, έχουμε $A \vee B \to C : 1$, ενώ $A \vee C : 0$.

Άσκηση 23

Σκοπεύουμε να καλέσουμε για φαγητό κάποιους φίλους μας όμως λόγω προσωπικών θεμάτων πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τους παρακάτω περιορισμούς:

i) *Αν έρθει ο a δεν μπορούν να έρθουν μαζί οι b και c.*

ii) *Αν δεν έρθει ο b δεν θα έρθει και η c*

iii) *Πρέπει να έρθει τουλάχιστον ένας από τους b και c*

Να εκφραστεί το πρόβλημα του γεύματος ως πρόβλημα ικανοποιησιμότητας.

Άσκηση 24

Επτά κωμικοί A, B, C, D, E, F, G πρόκειται να δώσουν παραστάσεις μιας βραδιάς, σε δύο από πέντε ξενοδοχεία μιας πόλης, κατά τη διάρκεια ενός τριήμερου φεστιβάλ. Σε κάθε παράσταση μπορεί να συμμετέχει μόνο ένας κωμικός. Κάθε ένας από αυτούς είναι διαθέσιμος, λόγω άλλων υποχρεώσεων, μόνο δύο από τις μέρες αυτές ως εξής:

1) *Ο A μπορεί να πάει στο Aladdin και στο Caesars τις μέρες 1 και 2.*
2) *Ο B μπορεί να πάει στο Bellagio και στο Excalibur τις μέρες 1 και 2.*
3) *Ο C μπορεί να πάει στο Desert και στο Excalibur τις μέρες 2 και 3.*
4) *Ο D μπορεί να πάει στο Aladdin και στο Desert τις μέρες 1 και 3.*
5) *Ο E μπορεί να πάει στο Caesars και στο Excalibur τις μέρες 1 και 3.*
6) *Ο F μπορεί να πάει στο Bellagio και στο Desert τις μέρες 2 και 3.*
7) *Ο G μπορεί να πάει στο Bellagio και στο Caesars τις μέρες 1 και 2.*

Ζητείται να ευρεθεί αν είναι δυνατή η πραγματοποίηση των παραστάσεων αυτών.

Λύση

Θεωρούμε τις 7 προτάσεις:

a: Ο A πηγαίνει στο Aladdin την ημέρα 1 και στο Caesars την ημέρα 2.
b: Ο B πηγαίνει στο Bellagio την ημέρα 1 και στο Excalibur την ημέρα 2.
c: Ο C πηγαίνει στο Desert την ημέρα 2 και στο Excalibur την ημέρα 3.
d: Ο D πηγαίνει στο Aladdin την ημέρα 1 και στο Desert την ημέρα 3.
e: Ο E πηγαίνει στο Caesars την ημέρα 1 και στο Excalibur την ημέρα 3.
f: Ο F πηγαίνει στο Bellagio την ημέρα 2 και στο Desert την ημέρα 3.
g: Ο G πηγαίνει στο Bellagio την ημέρα 1 και στο Caesars την ημέρα 2.

Η άρνηση κάθε μιας από τις προτάσεις αυτές αντιστοιχεί στο ότι οι μέρες προγραμματίζονται ανάποδα, για παράδειγμα,

$\neg a$: Ο A πηγαίνει στο Aladdin την ημέρα 2 και στο Caesars την ημέρα 1.

Έτσι, συγκεντρωτικά για κάθε κωμικό έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Λύση (συνέχεια)

Κωμικός	Πρόταση	1η μέρα	2η μέρα	3η μέρα
A	a	Aladdin	Caesars	-
A	$\neg a$	Caesars	Aladdin	-
B	b	Bellagio	Excalibur	-
B	$\neg b$	Excalibur	Bellagio	-
C	c	-	Desert	Excalibur
C	$\neg c$	-	Excalibur	Desert
D	d	Aladdin	-	Desert
D	$\neg d$	Desert	-	Aladdin
E	e	Caesars	-	Excalibur
E	$\neg e$	Excalibur	-	Caesars
F	f	-	Bellagio	Desert
F	$\neg f$	-	Desert	Bellagio
G	g	Bellagio	Caesars	-
G	$\neg g$	Caesars	Bellagio	-

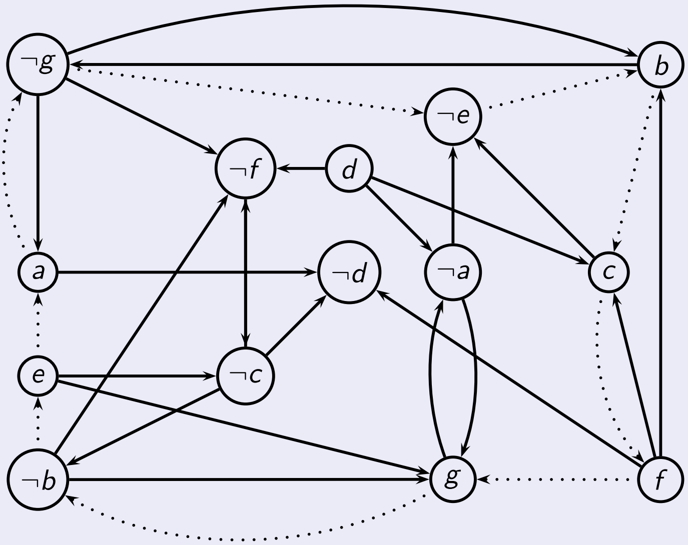
Λύση (συνέχεια)

Τώρα μπορούμε να γράψουμε τους περιορισμούς που εξασφαλίζουν ότι κανένα ζευγάρι κωμικών δε θα βρεθεί στο ίδιο ξενοδοχείο την ίδια μέρα.

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}rcl}
a \to \neg d & \text{και} & d \to \neg a & \neg b \to g & \text{και} & \neg g \to b \\
a \to \neg g & \text{και} & g \to \neg a & c \to f & \text{και} & \neg f \to \neg c \\
\neg a \to \neg e & \text{και} & e \to a & c \to \neg e & \text{και} & e \to \neg c \\
\neg a \to g & \text{και} & \neg g \to a & \neg c \to \neg d & \text{και} & d \to c \\
b \to \neg g & \text{και} & g \to \neg b & \neg c \to \neg f & \text{και} & f \to c \\
b \to c & \text{και} & \neg c \to \neg b & d \to \neg f & \text{και} & f \to \neg d \\
\neg b \to e & \text{και} & \neg e \to b & e \to g & \text{και} & \neg g \to \neg e \\
\neg b \to \neg f & \text{και} & f \to b & f \to g & \text{και} & \neg g \to \neg f
\end{array}
$$

Λύση (συνέχεια)

Οι συνεπαγωγές αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν στο παρακάτω γράφημα τόξων:



Λύση (συνέχεια)

Δυστυχώς υπάρχουν φαύλοι κύκλοι. Για παράδειγμα υπάρχουν οι κύκλοι

$$e \to a \to \neg g \to \neg e \to b \to c \to f \to g \to \neg b \to e$$

και

$$e \to a \to \neg g \to \neg e \to b \to \neg g \to \neg f \to \neg c \to \neg b \to e$$

Αυτοί οι κύκλοι μας λένε ότι τα e και $\neg e$ πρέπει να έχουν την ίδια τιμή, άρα δεν υπάρχει τρόπος να προγραμματίσουμε όλες τις παραστάσεις. Οι διοργανωτές του φεστιβάλ πρέπει να επαναδιαπραγματευτούν τις συμφωνίες τους με τουλάχιστον ένα από τους έξι κωμικούς A, B, C, E, F, G (η διαθεσιμότητα του D δεν εμφανίζεται στους παραπάνω κύκλους) για να καταρτισθεί ένα ορθό πρόγραμμα.