!! $\frac{A}{\Sigma}$ πεπερασμένο !

! Κανονες De Morgan !
προσεταιριστικοτητα
απορροφησης

[Θεώρημα της συμπαγειας]
$\Downarrow$

$\boxed{11|11|15}$

- Αν $v(\varphi)=1$ γραφουμε $\boxed{v \models \varphi}$ και λεμε οτι η
 v ικανοποιει την φ
 η v ειναι μοντελο της φ

- Αν $v(\varphi)=1$, για καθε $\varphi \in \Sigma$ γραφουμε $\boxed{v \models \Sigma}$

 η v ικανοποιει το Σ
 η v ειναι μοντελο του Σ

- Αν υπαρχει v ωστε $v \models \Sigma$, τοτε το Σ λεγεται ικανοποιησιμο
 αλλιως (αν δεν υπαρχει καμια v) λεγεται μη ικανοποιησιμο.

- Αν για καθε v ισχυει οτι $v \models \varphi$, τοτε η φ λεγεται ταυτολογια

- Αν ισχυει οτι $v \models \Sigma \Rightarrow v \models \varphi$ τοτε η φ λεγεται λογικο συμπερασμα του Σ και γραφουμε $\Sigma \models \varphi$.

• Αν ισχυει η ισοδυναμια $v \models \varphi \Leftrightarrow v \models \psi$, τοτε οι προτασεις φ, ψ ονομαζονται <u>λογικα ισοδυναμες</u> και γραφουμε $\varphi \models\mid \psi$

$\boxed{\text{Ασκηση 1}}$

Να εξετασθει αν η προταση $\varphi = ((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)$ ειναι ταυτολογια η οχι

Θα χρησιμοποιησουμε την μεθοδο των πινακων αληθειας.

Επειδη στην φ εχουμε εμφανισεις 3 διαφορετικων ατομων (p, q, r) ο πινακας αληθειας της φ θα αποτελειται απο $2^3 = 8$ γραμμες.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \to (q \to r)$	$p \to r$	φ
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α

εκτιμησεις

v

Απο τον πινακα αληθειας προκυπτει οτι η φ δεν ειναι ταυτολογια, διοτι υπαρχει μια εκτιμηση v η οποια δεν την ικανοποιει

Ειναι η εκτιμηση για την οποια,
p : Α $v(p) = 1$
q : Ψ $v(q) = 0$
r : Ψ $v(r) = 0$

Ασκηση 2

Να βρεθουν ολα τα μοντελα των παρακατω συνολων προτασεων.

α) $\Sigma_1 = \{ \overset{\varphi_1}{p_1 \to p_2}, \overset{\varphi_2}{p_1 \land (p_1 \to p_2)}, \overset{\varphi_3}{p_2 \lor (p_1 \land p_2)} \}$

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$	$p_1 \land (p_1 \to p_2)$	$p_2 \lor (p_1 \land p_2)$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ

Συμπέρασμα: Απο τον πινακα αληθειας των προτασεων $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ επεται οτι το Σ εχει ακριβως ενα μοντελο, την εκτιμηση v με $v(p_1) = (v(p_2)) = 1$
(διοτι ειναι η μοναδικη εκτιμηση για την οποια συναληθευουν οι $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$)

β) $\Sigma_2 = \{ \overset{\varphi_1}{p_1 \land \neg p_2}, \overset{\varphi_2}{p_2 \lor p_3}, \overset{\varphi_3}{p_3 \land p_4}, \overset{\varphi_4}{\neg p_4 \lor \neg p_5}, \overset{\varphi_5}{\neg p_5 \lor p_6}$

Επειδή στο Σ_2 εμφανιζονται 6 διαφορετικά άτομα ($p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$) η μεθοδος του πινακα αληθειας απαιτει $2^6 = 64$ γραμμες.
Γι'αυτο θα χρησιμοποιησουμε έναν άλλο τροπο για να βρουμε τα μοντελα του Σ_2

Έστω v ένα μοντέλο του Σ_2, τοτε $v(\varphi) = 1$ για καθε $\varphi \in \Sigma_2$

$v(\varphi_1) = 1 \Leftrightarrow v(p_1 \land \neg p_2) = 1 \Leftrightarrow v(p_1) = 1$ και $v(\neg p_2) = 1 \Leftrightarrow$

$\boxed{v(p_1) = 1 \; ; \; v(p_2) = 0}$

τα "και" μας δινουν την πληροφορια

$v(\varphi_3)=1 \Leftrightarrow v(p_3 \land p_4)=1 \Leftrightarrow v(p_3)=1$ και $v(p_4)=1 \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} v(p_3)=1 \\ v(p_4)=1 \end{matrix}}$

$v(\varphi_2)=1 \Leftrightarrow v(p_2 \lor p_3)=1$, το οποιο ισχυει αφου $v(p_3)=1$

$v(\varphi_4)=1 \Leftrightarrow v(\neg p_4 \lor \neg p_5)=1 \underset{v(p_4)=1}{\Longrightarrow} v(\neg p_5)=1$

$\Leftrightarrow \boxed{v(p_5)=0}$

$v(\varphi_5)=1 \Leftrightarrow v(\neg p_5 \lor p_6)=1 \Leftrightarrow$ το οποιο ισχυει αφου $v(\neg p_5)=1$

Άρα, για το p_6 υπαρχουν 2 επιλογές

$$v(p_6)=1$$
$$v(p_6)=0$$

Άρα, τελικά, εχουμε οτι για Σ_2 υπαρχουν δυο μοντέλα ακριβως :

1ο) $v(p_1)=v(p_3)=v(p_4)=v(p_6)=1 \quad v(p_2)=v(p_5)=0$

2ο) $v(p_1)=v(p_3)=v(p_4)=1 \quad v(p_2)=v(p_5)=v(p_6)=0$

Άσκηση 3

Να εξετασθεί ποιες απο τις παρακατω προτασεις είναι λογικο συμπερασμα του συνολου Σ_2, της προηγουμενης ασκησης (Άσκηση 2)

α) $p_1 \rightarrow p_6$

β) $p_1 \rightarrow p_3$

α) Η προταση $p_1 \rightarrow p_6$ δεν ειναι λογικο συμπερασμα του Σ_2 διοτι υπαρχει μοντελο του Σ_2, το οποιο δεν ειναι μοντελο αυτης της προτασης $p_1 \rightarrow p_6$ (Το δευτερο μοντελο του Σ_2)

β) Η προταση $p_1 \rightarrow p_3$ ειναι λογικο συμπερασμα του Σ_2, διοτι καθε μοντελο του Σ_2 ειναι και μοντελο της προτασης $p_1 \rightarrow p_3$

$$\Sigma_2 \models p_1 \rightarrow p_3$$

$\boxed{\text{Ασκηση 4}}$

Να αποδειχθεί οτι οι προτάσεις $p \rightarrow q$ και $\neg p \vee q$ είναι λογικά ισοδύναμες, δηλαδή $p \rightarrow q \;\models\!\!\mid\; \neg p \vee q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Οι προτασεις $p \rightarrow q$ και $\neg p \vee q$ εχουν τον ιδιο πίνακα αληθειας αρα ειναι <u>λογικά ισοδυναμες.</u>

Καθε μοντελο της μιας θα ειναι και μοντελο της αλλης.
(Δηλ μπορουμε να αντικαταστησουμε την μια απο την άλλη)

Ομοιως, μπορει να δειχθει οτι ισχυει

$p \leftrightarrow q \;\; \models\!\!\!\!\mid \;\; (p \to q) \wedge (q \to p)$

$\models\!\!\!\!\mid \;\; (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

Απο τις λογικες ισοδυναμιες

$p \to q \;\; \models\!\!\!\!\mid \;\; \neg p \vee q$

$p \leftrightarrow q \quad (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

προκυπτει το "αναπαντεχο" συμπερασμα ~~της ισοδυναμιας~~ οτι οι συνδεσμοι της συνεπαγωγης $\to$ και της ισοδυναμιας $\leftrightarrow$ μπορουν να παραλειφθουν χωρις να μειωσουμε την ~~εκφρ~~ σημασιολογική ιδιοτητα της γλωσσας του Π.Λ

Ερώτημα: Υπαρχει προταση η οποια να περιεχει τα ατομα p_1, p_2, p_3 και η οποια να ειναι αληθής μονο οταν ακριβως 2 απο ~~αυτα να ειναι~~ τα p_1, p_2, p_3 ειναι αληθη;

Για να απαντησουμε σε τετοια ερωτηματα υπαρχει ενας απλος τροπος που σχετιζεται με τις λεγομενες <u>κανονικες μορφές των προτασεων</u>

Υπαρχουν 2 κανονικες μορφές. Η κανονική ~~συζευκτική~~ διαζευκτική μορφή (DNF)
dinjuctive

Η κανονική συζευκτική μορφή CNF
conjuctive

DNF

Εστω φ μια προταση η οποια περιεχει τα ατομα p_1, p_2, p_k τοτε η φ ειναι λογικα ισοδυναμη με παμπροταση φ' η οποια αποτελειται απο διαζευξεις συζευξεων των ατομων $p_1, p_2, \dots, p_k$ αυτων που εχει η προταση η των αρνησεων τους

Συγκεκριμενα, οι συζευξεις της φ' θα ειναι της μορφης

$$p_1^* \wedge p_2^* \wedge \dots \wedge p_k^*$$

οπου,

$$p_i = \begin{cases} p_i & \text{αν για την εκτιμηση } v \text{ που επαληθευει την } \varphi \text{ ισχυει } v(p_i) = 1 \\ \neg p_i & \text{αν για την εκτιμηση } v \text{ που επαληθευει την } \varphi \text{ ισχυει } v(p_i) = 0 \end{cases}$$

για καθε εκτιμηση v που επαληθευει την φ

Αυτη η προταση φ' που προκυπτει λεγεται DNF της φ

Παραδειγμα: Να βρεθει η κανονικη διαζευκτικη μορφη της προτασης

$$\varphi = \neg\big((p_1 \wedge p_2) \to p_3\big)$$

Απαντηση:

Η φ αποτελειται απο 3 ατομα : p_1, p_2, p_3

Θα βρουμε ολα τα μοντελα της φ

p_1	p_2	p_3	$p_1 \wedge p_2$	$(p_1 \wedge p_2) \to p_3$	$\underbrace{\neg((p_1 \wedge p_2) \to p_3)}_{=\varphi}$
A	A	A	A	A	Ψ
A	A	Ψ	A	Ψ	A
A	Ψ	A	Ψ	A	~~A~~ Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	~~A~~ Ψ
Ψ	A	A	Ψ	A	~~A~~ Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ	A	~~A~~ Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	A	~~A~~ Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	~~A~~ Ψ

Η φ εχει μονο ενα μοντελο

$$v(p_1) = v(p_2) = 1 \ , \ v(p_3) = 0$$

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$$

<u>Παράδειγμα</u>

Ψαχνω μια προταση που αποτελειται απο τα ατομα p_1, p_2, p_3 η οποια ειναι αληθης μονο οταν ακριβως 2 απο p_1, p_2, p_3 ειναι αληθη

p_1	p_2	p_3	φ
A	A	A	Ψ
A	A	Ψ	A
A	Ψ	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	A
Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Άρα η φ έχει 3 μοντέλα

- $v(p_1) = v(p_2) = 1$, $v(p_3) = 0$

$$p_1 \land p_2 \land \neg p_3$$

- $v(p_1) = v(p_3) = 1$, $v(p_2) = 0$

$$p_1 \land \neg p_2 \land p_3$$

- $v(p_1) = 0$, $v(p_2) = v(p_3) = 1$

οποτε η ζητουμενη προταση ειναι η

$$(p_1 \land p_2 \land \neg p_3) \lor (p_1 \land \neg p_2 \land p_3) \lor (\neg p_1 \land p_2 \land p_3)$$

14/11/15 (Φροντιστήριο Μαθηματικά των Υπολογιστών)

Σήμερα : Λογική

ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

p	q	$p \land q$	$p \lor q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

p	$\neg p$
Α	Ψ
Ψ	Α

- v εκτίμηση (valuation) $v : P \to \{0, 1\}$
- Αν $v(\varphi) = 1$, τοτε η v ικανοποιει την φ

  η v ειναι μοντελο της φ
- Αν $v(\varphi) = 1$, για καθε $\varphi \in \Sigma$, τοτε γραφουμε $v \models \Sigma$

  η v ικανοποιει το Σ

  η v ειναι μοντελο του Σ