ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Πληροφορικής

Μαθηματικά των Υπολογιστών

2016-2017

3ο Φροντιστήριο

Όνομα / Αρ.Μητρώου	***Κωνσταντακάτος Γρηγόρης Π12068***

3ο Φροντιστήριο

Διώνυμο του Νεύτωνα

Παραγοντικά Πολυώνυμα

▸ Τύπος του διωνύμου του Νεύτωνα:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ *

▸ Ειδικές Περιπτώσεις:

• $n=2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k \cdot b^{2-k} = \binom{2}{0} a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1} a^1 \cdot b^{2-1} + \binom{2}{2} \cdot a^2 \cdot b^{2-2} = b^2 + 2ab + a^2$

• $n=3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

*Ο τύπος χρησιμοποιείται κυρίως για δύο πράγματα:

1) υπολογισμός / απλοποίηση αθροισμάτων

2) αναπτύγματα δυναμοσειρών (Ανάλυση ΙΙ)

▸ Άσκηση 1

α) Να βρεθεί ο συντελεστής του a^5 στο ανάπτυγμα της έκφρασης $(a+b)^8$

Ο γενικός όρος του αθροίσματος στο ανάπτυγμα είναι της μορφής $\binom{8}{k} \cdot a^k \cdot b^{8-k}$, όπου $k = 0, 1, .., 8$.

Ο συντελεστής του a^5 προκύπτει για $k=5$ και είναι ίσος με $\binom{8}{5} \cdot b^{8-5} = \binom{8}{5} \cdot b^3$

!Προσοχή! Ο συντελεστής του a^5 δεν επιτρέπεται να περιέχει a.

β) Να βρεθεί ο συντελεστής του a^7 στο ανάπτυγμα της παράστασης

$$\Big(\underbrace{a}_{a} + \underbrace{\frac{1}{a^2}}_{b}\Big)^{10}$$

Ο γενικός όρος του αθροίσματος είναι $\binom{10}{k} \cdot a^k \left(\frac{1}{a^2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \cdot a^{3k-20}$

Ο συντελεστής του a^7 προκύπτει όταν $3k-20=7 \Leftrightarrow 3k=27 \Leftrightarrow k=9$
Άρα ο συντελεστής του a^7 είναι $\binom{10}{9}=10$.

γ) Να βρεθεί ο συντελεστής του a^2 στο $\left(a+\frac{1}{a^2}\right)^{10}$
Ο γενικός όρος του αθροίσματος είναι $\binom{10}{k} a^{3k-20}$
Ο συντελεστής του a^2 προκύπτει όταν $3k-20=2 \Leftrightarrow k=\frac{22}{3} \notin \mathbb{Z}$
Επομένως ο συντελεστής του a^2 είναι 0,
δηλαδή ισοδύναμα, το ανάπτυγμα δεν περιέχει τον όρο a^2.

Άσκηση 2 (SOS για εξετάσεις απο εδώ και κάτω...)
Να υπολογισθούν (απλοποιηθούν) τα αθροίσματα.

α) $S_1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$ ΒΑΣΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n\right]$$

β) $S_2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$

$$S_2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k\cdot 1^{n-k}=(2+1)^n=3^n$$

γ) $S_3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$$S_3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k 1^{n-k}=\left(\frac{3}{4}+1\right)^n=\left(\frac{7}{4}\right)^n$$

δ) $S_4=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cdot 3^k$

$$S_4=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^k\cdot 1^{n-k}=(-3+1)^n=(-2)^n$$

ε) $S_5 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}$

$S_5 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \underset{(k=0)}{\binom{n}{0}} - \underset{(k=1)}{\binom{n}{1}} = 2^n - 1 - n$

στ) $S_6 = \sum_{k=3}^{n-1} \binom{n}{k}$

$S_6 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{2} - \binom{n}{n} = 2^n - \frac{n(n-1)}{2} - n - 1 - 1$

Υπενθύμιση: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$

ζ) $S_7 = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k}$

$S_7 = 2^{n+2}$

η) $S_8 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$

Θέτω $k+1 = \lambda$

Για $k=0$, έχουμε $\lambda = 1$

Για $k = n-1$, έχουμε $\lambda = n$

Άρα $S_8 = \sum_{\lambda=1}^{n} \binom{n}{\lambda} = 2^n - \binom{n}{0} = 2^n - 1$

▸ Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

α) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} n \binom{n}{k}$

Ιδέα: Καθώς αλλάζει το κ, το n παραμένει σταθερό.

$S_1 = n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n \cdot 2^n$

β) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

Σημαντική Ιδιότητα: $\binom{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \binom{a-1}{b-1}$, για $a, b \geq 1$

Μπορεί να μας ζητηθεί η απόδειξη της σχέσης.

Για $a = n$ και $b = k$ έχουμε ότι $\binom{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)\binom{n-1}{k-1} \Leftrightarrow$
$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, $n, k \geq 1$

$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$

Για $k=0$, μηδενιζόταν.

Θέτουμε $k-1 = \lambda$.

Για $k=1$, έχουμε $\lambda = 0$.

Για $k = n$, έχουμε $\lambda = n-1$.

Άρα το $S_2 = n \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-1}{\lambda} = n \cdot 2^{n-1}$

β') ΝΔΟ ισχύει η ιδιότητα: $\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$, $a, b \geq 1$

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!} = \frac{a(a-1)!}{b\,(b-1)!\,(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a-1)!}{(b-1)!\,[(a-1)-(b-1)]!} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

γ) $S_3 = \sum_{k=0}^{n} (5k+6) \binom{n}{k}$

Ιδέα: Θα το σπάσω σε 2 αθροίσματα.

$S_3 = 5 \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} + 6 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 5n \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot 2^n$

δ) $S_4=\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

$$S_4=\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n} k\cdot \boxed{k\binom{n}{k}} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot n\binom{n-1}{k-1}=n\cdot\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Θέτουμε } k-1=\lambda \\ \text{Για } k=1,\ \lambda=0 \\ \text{Για } k=n,\ \lambda=n-1\end{array}\right\}\ \text{Αλλάζουμε άκρα με αλλαγή μεταβλητής!}$$

Άρα, $S_4=n\sum_{\lambda=0}^{n-1}(\lambda+1)\binom{n-1}{\lambda} = n\left(\sum_{\lambda=0}^{n-1}\lambda\binom{n-1}{\lambda}+\sum_{\lambda=0}^{n}\binom{n-1}{\lambda}\right)=n\left((n-1)\,2^{n-2}+2^{n-1}\right)$

ε) $S_5=\sum_{k=0}^{n}(Ak^2+Bk+C)\binom{n}{k}$, $\quad A,B,C\in\mathbb{R}$

$$S_5=A\cdot\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}+B\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}+C\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=A\cdot n\left((n-1)\,2^{n-2}+2^{n-1}\right)+B\cdot n\cdot 2^{n-1}+C\cdot 2^{n}.$$

▸ Άσκηση 4

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

α) $S_1=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)\binom{n}{k}$

Βασική Ιδιότητα: $\binom{a}{b}=\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} \leftrightarrow \frac{1}{a}\binom{a}{b}=\frac{1}{b}\binom{a-1}{b-1}$

Θέτω $b=k+1$ και $a=n+1$.

Τότε $\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Επομένως,

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$$

Θέτω $k+1=\lambda$.

Για $k=0$, $\lambda=1$

Για $k=n$, $\lambda=n+1$

Άρα $S_1=\frac{1}{n+1}\sum_{\lambda=1}^{n+1}\binom{n+1}{\lambda}=\frac{1}{n+1}\left[2^{n+1}-\binom{n+1}{0}\right]=\frac{1}{n+1}\cdot\left(2^{n-1}-1\right)$

b) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{7k-2}{k+1} \binom{n}{k}$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{7(k+1)-9}{k+1} \binom{n}{k} = 7 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 9 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = 7 \cdot 2^n - 9 \frac{1}{n+1} \left(2^{n+1} - 1\right)$$