Σήμερα: Ασκήσεις στην Επαγωγή

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί επαγωγικά ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{n}$$

Απόδειξη Έστω η πρόταση

$$\Pi(n): \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{n}$$

Για $n=2$ έχουμε $\quad \frac{1}{2^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \iff \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} - \frac{2}{4}$

Το οποίο ισχύει.

Άρα, η πρόταση $\Pi(2)$ είναι αληθής

Έστω ότι για κάποιο $\underline{k \geq 2}$ ισχύει η $\Pi(k)$ δηλαδή

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{k} \qquad (*)$$

Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι ισχύει και η $\Pi(k+1)$ δηλαδή

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{k+1}$$

Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος της αποδεικτέας: Έχουμε ότι

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \overset{(*)}{\leq} \frac{3}{4} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\quad \cancel{\frac{3}{4}} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \cancel{\frac{3}{4}} - \frac{1}{k+1} \iff$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \iff$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} \iff$$

$$\frac{1}{(k+1)^{\cancel{2}}} \leq \frac{1}{k\cancel{(k+1)}} \iff$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} \iff k \leq k+1, \text{ το οποίο ισχύει}$$

Αρα, η Π(κ+1) είναι επίσης αληθής.

Απο την αρχη της επαγωγης προκυπτει οτι η Π(n) είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$.

Συμβολισμος Σιγμα (για αθροίσματα)

Θελουμε να εκτυπώσουμε τους αριθμους $\underline{1}$ εως $\underline{100}$ χρησιμοποιωντας καποιο for σε μια γλωσσα τυπου C ή Java

```
for (i=1 ; i ≤ 100 ; i++)
      print(i)

for (i=11; i ≤ 110; i++)
      print(i-10)

for (j=11; j≤110; j++)
      print(j-10)
```

Τετοιες συντομογραφιες υπαρχουν και για τα αθροισματα

$$1+2+3+\cdots+100 = \sum_{i=1}^{100} i \longrightarrow \text{sum (σουμα)}$$

$$= \sum_{j=1}^{100} j$$

$$= \sum_{i=21}^{120} (i-20)$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} = \boxed{\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2}} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^i}$$

Εστω μια ακολουθια $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ τότε το αθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ γραφεται και ως $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

Με αυτον το συμβολισμο ο δεικτης αυξανεται κατα 1 καθε φορα.

Εστω $I = \{5, 7, 10, 15, 20, 27\}$

$$5+7+10+15+20+27 = \sum_{i\in I} i$$

Python: I=[5,7,10,15,20,27] λιστα

```
for i in I:
    print(i)
```

$$\alpha_5+\alpha_7+\alpha_{10}+\alpha_{15}+\alpha_{20}+\alpha_{27}=\sum_{i\in I}\alpha_i$$

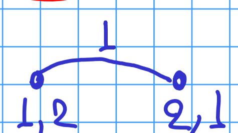
οπου $I=\{5,7,10,15,20,27\}$

Διαλειμμα μεχρι 10:18

Άσκηση 2 (Πρόβλημα κουτσομπολιών - συνέχεια)

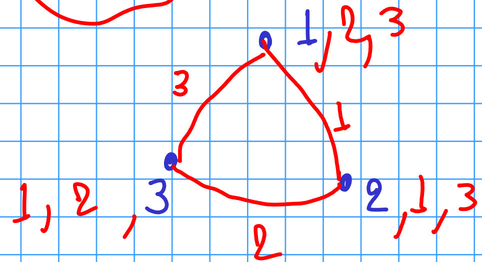
- n πρόσωπα καθένα από τα οποία γνωρίζει 1 κουτσομπολιό διαφορετικό από τα υπόλοιπα
- Τα πρόσωπα κουτσομπολεύουν "διακριτικά" σε ζεύγη. Όταν καλεί ο a τον b ανταλλάσουν όλα νέα που γνωρίζουν
- Έστω $\boxed{a_n}$ ο ελάχιστος αριθμός από κλήσεις που απαιτούνται ώστε όλα τα n πρόσωπα να μάθουν όλα τα n κουτσομπολιά

$n=2$



$\boxed{a_2=1}$

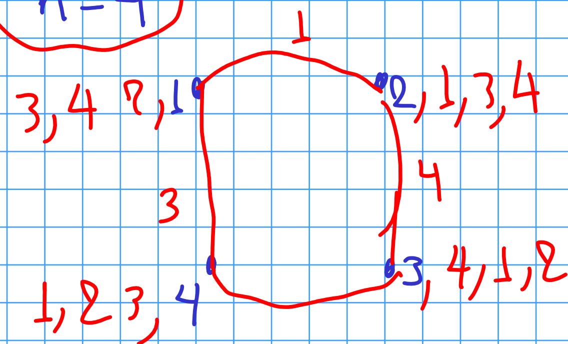
$n=3$



$a_3 \le 3$

$\boxed{a_3=3}$

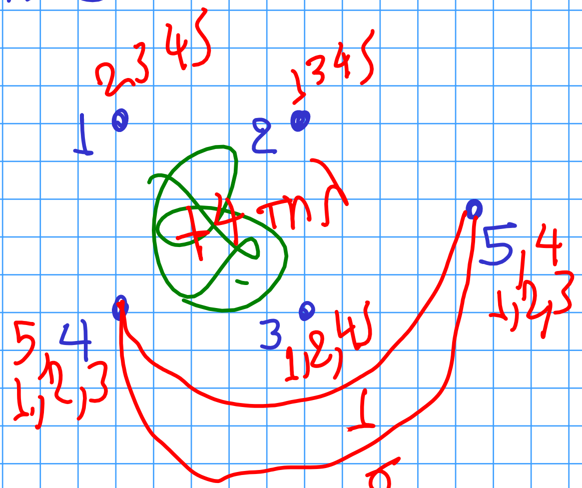
$n=4$



$\cancel{a_4 \le 4}$

$\boxed{a_4=4}$

$n=5$



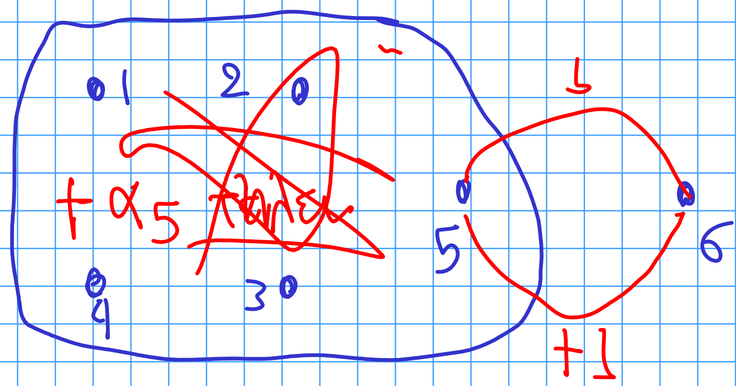
→ Αρχικά, ο 5 καλεί τον 4

→ Έπειτα, οι 1, 2, 3, 4 με $a_4=4$ κλήσεις ανταλλάσουν μεταξύ τους και τα 5 κουτσομπολιά

→ Τελικά, ο 4 καλεί τον 5

$a_5 \le 1 + a_4 + 1 \le 1+4+1 \le 6$

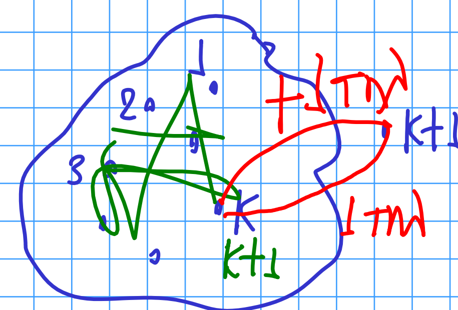
$n=6$



Αυτος ο μηχανισμος μπορει να γενικευθει (επαγωγικά) ως εξης:

Εστω οτι γνωριζουμε πως να μεταφερουμε ολη την πληροφορια/κουτσομπολια για k ατομα οπου $k \geq 4$

Θα δειξουμε οτι μπορουν να λυσουν το προβλημα και για k+1 ατομα ως εξης:



① Ο k+1 καλει τον k

② Τα k ατομα μεταφερουν ολες τις πληροφοριες που εχουν σε ολους (και τις πληροφοριες του k+1)

③ Ο k καλει τον k+1

Άσκηση 3 (Ανισότητα)

Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 4$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > n+1$$

Λύση Θεωρούμε την πρόταση

$$\Pi(n): \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n > n+1$$

Για $n=4$ έχουμε

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 4+1 \Leftrightarrow \frac{81}{16} > 5 \Leftrightarrow 81 > \underbrace{5\cdot 16}_{80}$$

το οποίο ισχύει. Άρα, η $\Pi(4)$ είναι αληθής.

Έστω ότι για κάποιο $\boxed{k \geq 4}$ ισχύει η $\Pi(k)$ δηλαδή

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^k > k+1 \qquad (*)}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $\Pi(k+1)$ δηλαδή

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > (k+1)+1 = k+2$$

Ξεκινάμε από αριστερό μέλος της αποδεικτέας

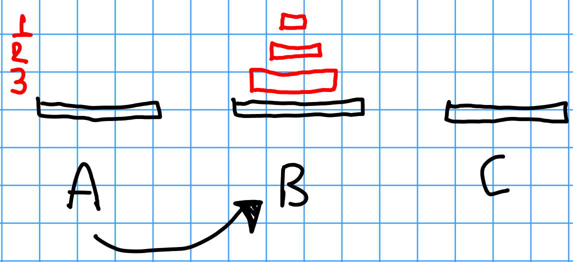
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \left(\frac{3}{2}\right) \overset{(*)}{>} (k+1)\frac{3}{2}$$

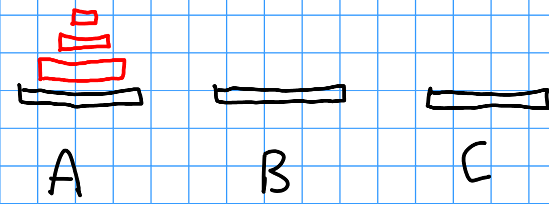
$$= \frac{3}{2}k + \frac{3}{2} = \frac{2}{2}k + \frac{k}{2} + \frac{3}{2}$$

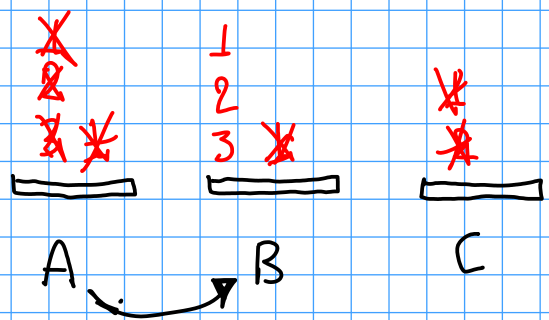
$$= k + \frac{k}{2} + \frac{3}{2} > k + \frac{k}{2} \underset{(k\geq 4)}{\geq} k+2$$

Διάλειμμα μέχρι 11:15

Άσκηση 4 (Πύργοι του Hanoi)







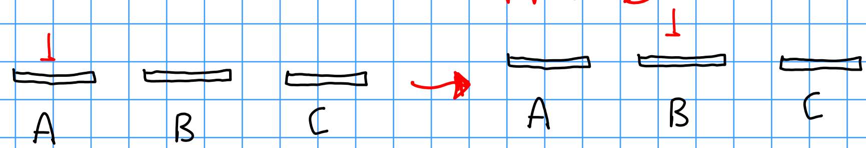
Υπάρχει τρόπος να λύσουμε το πρόβλημα επαγωγικά;

① Πρέπει να λυθεί με συγκεκριμένες κινήσεις για κάποια n; π.χ. $n=1$, $n=2$, …, $n=5$

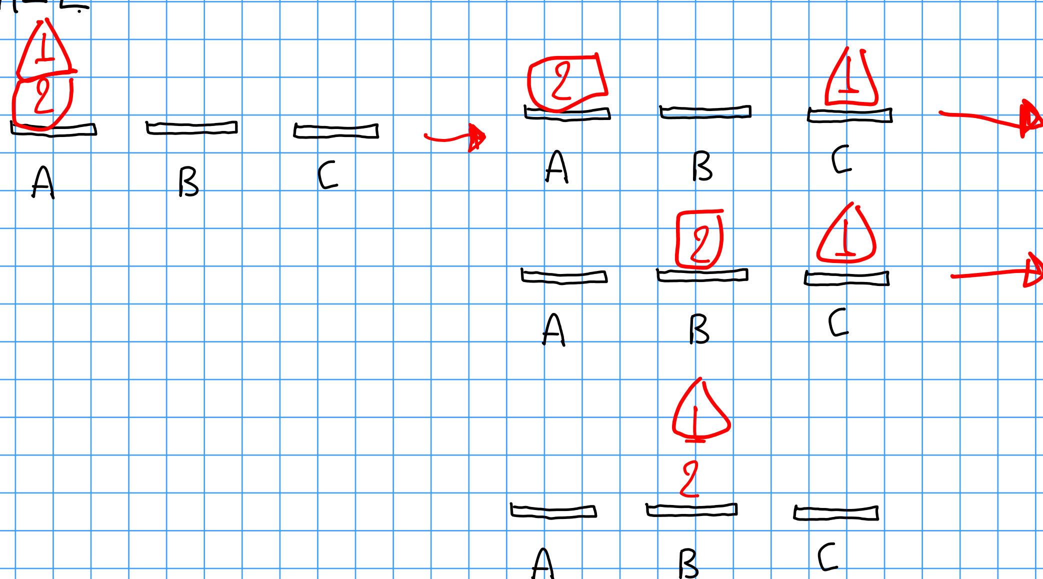
② Πρέπει να δείξουμε ότι αν λύνεται για κάποιο $n=k$ τότε ξέρουμε να το λύσουμε και για $n=k+1$

Για $n=1$

Μεταφέρουμε τον δίσκο 1 από το A στο B



Για $n=2$



Εστω οτι γνωριζουμε πως να μεταφερουμε $\boxed{k}$ δισκους απο το A στο B χρησιμοποιωντας το C ως βοηθητικη θεση

Αν εχουμε k+1 δισκους θα κανουμε το εξης: