Σήμερα: Ασκήσεις για

- Τύπους Horn (Horn-SAT)
- Αρχή της απόφασης
- Δένδρα αληθείας
- Μοντελοποίηση με λογική

Τύποι Horn

$A \to B \mathrel{\models\!\!\!\mid} \neg A \vee B$

$\neg(A \wedge B) \mathrel{\models\!\!\!\mid} \neg A \vee \neg B$

Τύποι Horn

Μια πρόταση ονομάζεται **τύπος Horn** αν γράφεται σε μία από τις τρεις μορφές:

Αν ισχύουν κάποιες προτάσεις, πρέπει να ισχύει και p_{k+1}

- α) p_k ✓ — Ισχύει το $p_k, p_{k+1}, \cdots p_\lambda$
- ✓ β) $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_k) \to p_{k+1}$ ✓ $\mathrel{\models\!\!\!\mid} \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k) \vee p_{k+1}$ $\mathrel{\models\!\!\!\mid} \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_k \vee p_{k+1}$
- ✓ γ) $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_k$

όπου $p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}$ είναι άτομα.

Δεν ισχύουν όλα ταυτόχρονα

Στις μορφές β, γ, ανήκουν και προτάσεις της μορφής: $p_k \to p_{k+1}$, $\boxed{\neg p_k}$.
Για παράδειγμα, οι προτάσεις $(p_1 \wedge p_2) \to p_1$, p_1, $\neg p_2 \vee \neg p_3$, $p_3 \to p_1$, $\neg p_2$ είναι τύποι Horn.

Ισοδύναμα: Μια πρόταση είναι τύπος Horn ανν στην CNF μορφή της, σε κάθε διάζευξη περιέχεται το

Δεν ισχύει το p_k

πολυ ενας ορος που ειναι ατομο (και οχι αρνηση ατομου)

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας στην περίπτωση των τύπων Horn μπορεί να λυθεί ακολουθώντας τον παρακάτω αλγόριθμο.

Είσοδος: Ένα σύνολο τύπων Horn
Έξοδος: Μια εκτίμηση που το ικανοποιεί, αν υπάρχει.

Βήμα 1: Θέσε ψευδείς τις εκτιμήσεις όλων των ατόμων, εκτός αυτών που περιέχονται **ως** προτάσεις στο Σ.

Βήμα 2: Όσο υπάρχει συνεπαγωγή η οποία δεν ικανοποιείται, θέσε την εκτίμηση του ατόμου στο δεξιό της μέλος ως αληθή, και επανάλαβε μέχρις ότου όλες οι συνεπαγωγές ικανοποιούνται.

Βήμα 3: Έλεγξε μόνο τους τύπους οι οποίοι περιέχουν μόνο αρνήσεις ατόμων. Αν όλοι αυτοί οι τύποι είναι αληθείς, τότε επίστρεψε την εκτίμηση που βρέθηκε.
Αλλιώς, επίστρεψε ότι το σύνολο δεν ικανοποιείται.

Άσκηση 20

Έστω Σ το σύνολο που αποτελείται από τους εξής τύπους Horn.

$\Sigma = \{(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_1, \boxed{p_1 \rightarrow p_2}, (p_1 \wedge p_3) \rightarrow p_4,$
$(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_4, p_1, p_4, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2, p_5, p_5 \rightarrow p_1, \boxed{(p_5 \wedge p_2) \rightarrow p_6}\}$

Να εξετασθεί αν το σύνολο Σ είναι ικανοποιήσιμο.

Βήμα 1: Θέτουμε $v(p_1)=v(p_4)=v(p_5)=1$ και $v(p_2)=v(p_3)=v(p_6)=0$

Βήμα 2: Επειδή $v(p_1 \rightarrow p_2)=0$ θέτουμε $v(p_2)=1$ και έχουμε την εκτίμηση

$v(p_1)=v(p_2)=v(p_4)=v(p_5)=1$ και $v(p_3)=v(p_6)=0$

Επειδή $v((p_5 \wedge p_2) \rightarrow p_6)=0$ θέτουμε $v(p_6)=1$ και έχουμε την εκτίμηση

$v(p_1)=v(p_2)=v(p_4)=v(p_5)=v(p_6)=1$ και $v(p_3)=0$

Τώρα, ολες οι συνεπαγωγες ειναι αληθεις.

Βημα 3: Ελεγχουμε τις προτάσεις που περιεχουν μονο αρνησεις ατομων

Επειδη

$$v(\overset{1}{\neg p_3} \vee \overset{0}{\neg p_1} \vee \overset{0}{\neg p_2}) = 1$$

η εκτιμηση v με

$$v(p_1)=v(p_2)=v(p_4)=v(p_5)=v(p_6)=1 \quad \text{και} \quad v(p_3)=0$$

ειναι μοντελο του Σ.

Αρα, το Σ ειναι ικανοποιησιμο.

Το πλεονέκτημα του αλγοριθμου ειναι οτι δεν γυριζει ποτε πισω (δεν κανει backtracking)

Λύση: Το Σ περιέχει 4 άτομα: p_1, p_2, p_3, p_4.
Βήμα 1: Αρχικά θέτουμε όλα τα άτομα ψευδή εκτός από τα p_1, p_4, οπότε έχουμε

$$v(p_2) = v(p_3) = 0, \quad v(p_1) = v(p_4) = 1$$

Βήμα 2: Η συνεπαγωγή $p_1 \to p_2$ είναι ψευδής, άρα θέτουμε p_2 αληθές, οπότε έχουμε

$$v(p_3) = 0, \quad v(p_1) = v(p_2) = v(p_4) = 1$$

Τώρα, όλες οι συνεπαγωγές είναι αληθείς.
Βήμα 3: Η πρόταση $\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2$ είναι αληθής, αφού επαληθεύται από την εκτίμηση v.
Άρα, η εκτίμηση v που βρήκαμε ικανοποιεί το Σ.

Παρατηρήστε ότι στο Βήμα 2

- αν η εκτίμηση ενός ατόμου γίνει αληθής, ποτέ δεν θα αλλάξει σε ψευδής
- (τότε η εκτίμηση κάποιας συνεπαγωγής μπορεί να αλλάξει από αληθής σε ψευδής)
- αν η εκτίμηση μιας συνεπαγωγής αλλάξει από ψευδής σε αληθής, ποτέ δεν πρόκειται να αλλάξει ξανά, οπότε μπορούμε να την αγνοήσουμε στους μελλοντικούς ελέγχους

Άσκηση 21

Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα τύπων Horn είναι ικανοποιήσιμα.

$\{(p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \to p_4, \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, p_3 \to p_1, \neg p_5 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2, p_3, (p_1 \wedge p_3) \to p_5\}$

Απάντηση. *Ικανοποιήσιμο, με* $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 1$ *και* $v(p_2) = 0$.

$\{p_6, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, (p_6 \wedge p_3) \to p_1, \neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_3, (p_1 \wedge p_6) \to p_4, p_6 \to p_3\}$

Απάντηση. *Ικανοποιήσιμο, με* $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_6) = 1$ *και* $v(p_2) = v(p_5) = 0$.

$\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \to p_1, (p_3 \wedge p_2 \wedge p_5) \to p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \wedge p_1) \to p_2, p_1\}$.

Απάντηση. *Ικανοποιήσιμο, με* $v(p_1) = 1$ *και* $v(p_2) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.

Αρχή της απόφασης

- $p\ ,\ \alpha \vee \neg p \Rightarrow \alpha$

Ειδικές μορφές

- $p \vee q\ ,\ p \vee \neg q \Rightarrow p \vee p \models\!\dashv p$

Αρχή της απόφασης

Από τις προτάσεις $\varphi \vee p$ και $\psi \vee \neg p$ προκύπτει ως λογικό συμπέρασμα η πρόταση $\varphi \vee \psi$.

Χρησεις της αρχης της αποφασης: Βρισκει ολα τα λογικα συμπερασματα ενος συνολο προτασεων Σ

Παρατήρηση

Έστω $\Sigma \subseteq P$. Η πρόταση ϕ είναι λογικό συμπέρασμα του συνόλου Σ αν και μόνο αν το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.

Προσόχη απο τις προτασεις

$\alpha \vee p \vee q$ και $b \vee \neg p \vee \neg q$

προκυπτουν οι προτασεις $\alpha \vee b \vee q \vee \neg q$ ταυτολογια

$\alpha \vee b \vee p \vee \neg p$ ταυτολογια

Απο τις προτασεις δεν προκυπτει καποιο χρησιμο συμπερασμα

Διάλειμμα μέχρι 10:05

Άσκηση 22

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι $\Sigma \vdash_r \varphi$, *όπου* $\varphi = p_2 \wedge \neg p_3$ *και*

$$\Sigma = \{p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1), \neg p_1 \vee \neg p_3, p_1 \rightarrow p_2, p_4 \vee \neg(p_2 \wedge p_5), p_6\},$$

ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1:

Η $p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1)$ γράφεται σε CNF:
$(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4)$.

Η $\neg p_1 \vee \neg p_3$ είναι τετριμμένη (είναι ήδη σε CNF).

Η $p_1 \rightarrow p_2$ γράφεται σε CNF $\neg p_1 \vee p_2$.

Η $p_4 \vee \neg(p_2 \wedge p_5)$ γράφεται σε CNF $p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5$.

Η p_6 είναι τετριμμένη (είναι ήδη σε CNF).

Άρα, $\Sigma' =$
$\{(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4), \neg p_1 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2, p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, p_6\}$.

Άσκηση (Αρχή της απόφασης)

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi \vee p \\ \psi \vee \neg p \end{array} \Rightarrow \varphi \vee \psi}$$

Να δειχθεί, χρησιμοποιώντας την αρχή της απόφασης, ότι

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{όπου} \quad \varphi = p_2 \wedge \neg p_3$$

και

$$\Sigma = \{ p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1),\ \neg p_1 \vee \neg p_3,\ p_1 \rightarrow p_2,\ p_4 \vee \neg(p_2 \wedge p_5),\ p_6 \}$$

- Υπενθύμιση: $\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ μη ικανοποιήσιμο

- Για να εφαρμόσουμε την αρχή της απόφασης, πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε όλες τις προτάσεις σε CNF μορφή και να τις διασπάσουμε σε μία ή περισσότερες που περιέχουν μόνο διαζεύξεις. (όπου χρειάζεται)

Λύση: Θεωρούμε το σύνολο $\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$

Θα δείξουμε ότι το Σ' είναι μη ικανοποιήσιμο.

$p_4 \wedge (p_4 \to p_1)$

p_4 (1)

$p_4 \to p_1 \models\!\!\!\models \neg p_4 \vee p_1$ (2)

$\neg p_1 \vee \neg p_3$ (3)

$p_1 \to p_2 \models\!\!\!\models \neg p_1 \vee p_2$ (4)

$p_4 \vee \neg(p_2 \wedge p_5) \models\!\!\!\models p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5$ (5)

p_6 (6)

$\neg\varphi = \neg(p_2 \wedge \neg p_3) \models\!\!\!\models \neg p_2 \vee p_3$ (7)

Πρεπει να δειξουμε οτι οι 7 προτασεις οδηγουν σε αντιφαση εφαρμοζοντας επαναληπτικα την αρχη της αποφασης:

(1), (2) $\Rightarrow p_1$ (8)

(8), (3) $\Rightarrow \neg p_3$ (9)

(8), (4) $\Rightarrow p_2$ (10)

(7), (10) $\Rightarrow p_3$ (11)

Απο τις προτασεις (9), (11) εχουμε αντιφαση

Αρα, το Σ' ειναι μη ικανοποιησιμο, αρα $\Sigma \models \varphi \to \Sigma \vdash_r \varphi$

Βήμα 2:
Η άρνηση της αποδεικτέας είναι η $\neg(p_2 \wedge \neg p_3)$, η οποία σε CNF γράφεται ως $\neg p_2 \vee p_3$.

Βήμα 3:
Διασπώντας την $(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4)$ (η οποία είναι η μόνη που χρειάζεται τέτοια διάσπαση) σε τρεις προτάσεις (τα "μέρη" της: $\neg p_1 \vee p_4$, $\neg p_4 \vee p_1$, $p_1 \vee p_4$), δημιουργούμε το σύνολο $\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$:

$$\begin{aligned}\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}'' = \{&\neg p_1 \vee p_4, \neg p_4 \vee p_1, p_1 \vee p_4, \neg p_1 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2,\\ &p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, p_6, \underbrace{\neg p_2 \vee p_3}_{\{\neg\varphi\}''}\}.\end{aligned}$$

Βήμα 4:

Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την αρχή της απόφασης, μέχρι να πάρουμε την κενή πρόταση:

1. $\neg p_2 \vee p_3$
2. $\neg p_1 \vee p_4$
3. $\neg p_4 \vee p_1$
4. $p_1 \vee p_4$
5. $\neg p_1 \vee \neg p_3$
6. $\neg p_1 \vee p_2$
7. $p_4 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5$
8. p_6 Από το $\Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$
9. $p_1 \vee p_1$, (δηλαδή p_1) (Από 3, 4 και αρχή απόφασης)
10. p_2 (Από 6, 9 και αρχή απόφασης)
11. $\neg p_1 \vee \neg p_2$ (Από 1, 5 και αρχή απόφασης)
12. $\neg p_1$ (Από 10, 11 και αρχή απόφασης)
13. αντίφαση (Από 9, 12 και αρχή απόφασης).

Άσκηση 23

Αν έχω TV και δεν είμαι απασχολημένος, θα δω το έργο.
Αν έχω video και είμαι απασχολημένος, θα γράψω το έργο.
Αν γράψω το έργο, θα το δω.
Έχω TV.
Έχω video.
Να δειχθεί ότι θα δω οπωσδήποτε το έργο.

p :	Θα δω το έργο.
q :	Έχω TV.
r :	Είμαι απασχολημένος.
s :	Θα γράψω το έργο.
t :	Έχω video.

$$\Sigma = \{(q \wedge \neg r) \to p, \quad (t \wedge r) \to s, \quad s \to p, \quad q, \quad t\}.$$

1 2 3 4 5 6

Βήμα 1: $\Sigma' = \{\neg q \vee r \vee p, \quad \neg t \vee \neg r \vee s, \quad \neg s \vee p, \quad q, \quad t\}. \cup \{\neg p\}$

Βήμα 2: Η άρνηση της αποδεικτέας είναι η $\neg p$ (η οποία είναι ήδη σε CNF).

(3), (6) $\Rightarrow$ $\neg s$ (7)

(1), (6) $\Rightarrow$ $\neg q \vee r$ (8)

(4), (8) $\Rightarrow$ r (9)

(2), (9) $\Rightarrow$ $\neg t \vee s$ (10)

(10), (7) $\Rightarrow$ $\neg t$ (11)

(11), (5) $\Rightarrow$ αντιφαση

Βήμα 3: Δεδομένου ότι $\Sigma'' = \Sigma'$, έχουμε ότι

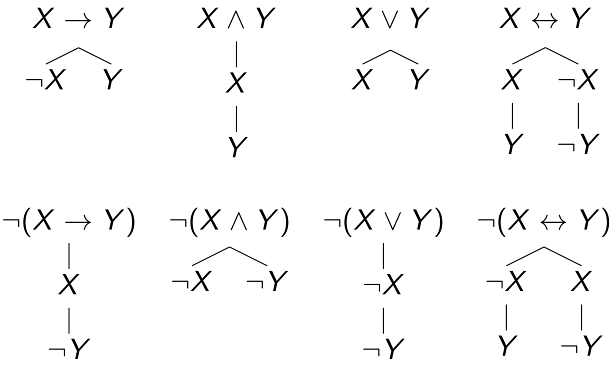
$$\Sigma'' \cup \{\neg\phi\}'' = \{p \vee \neg q \vee r, \quad s \vee \neg t \vee \neg r, \quad p \vee \neg s, \quad q, \quad t, \quad \neg p\}.$$

Βήμα 4: Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την αρχή της απόφασης, μέχρι να πάρουμε την κενή πρόταση:

$$\left.\begin{array}{rl}
1. & p \vee \neg q \vee r \\
2. & \neg p \\
3. & q \\
4. & s \vee \neg t \vee \neg r \\
5. & p \vee \neg s \\
6. & t
\end{array}\right\} \text{ Από το } \Sigma'' \cup \{\neg\varphi\}''$$

$$\begin{array}{rll}
7. & \neg q \vee r & \text{(Από 1, 2 και αρχή απόφασης)} \\
8. & r & \text{(Από 3, 7 και αρχή απόφασης)} \\
9. & p \vee \neg t \vee \neg r & \text{(Από 4, 5 και αρχή απόφασης)} \\
10. & \neg t \vee \neg r & \text{(Από 2, 9 και αρχή απόφασης)} \\
11. & \neg r & \text{(Από 6, 10 και αρχή απόφασης)} \\
12. & \text{αντίφαση} & \text{(Από 8, 11 και αρχή απόφασης).}
\end{array}$$

Διάλειμμα μέχρι 10:55



Γενικεύονται και για περισσότερους όρους: $x_1 \vee x_2 \vee x_3$

x_1 x_2 x_3

Άσκηση Να εξετασθεί αν είναι ικανοποιήσιμη η πρόταση φ όπου

$$\varphi = \neg\big((p \to q) \to (q \to p)\big) \wedge (\neg p \to q) \quad (1)$$

$$\neg p \to q \quad (5)$$

$$\neg\big((p \to q) \to (q \to p)\big) \quad (2)$$

$$p \to q \quad (4)$$

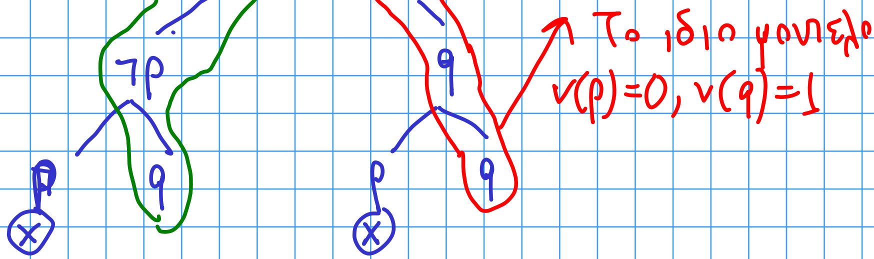
$$\neg(q \to p) \quad (3)$$

$$q$$

$$\neg p$$

$$\neg p \to q \dashv\models p \vee q$$

$$v(q) = v(\neg p) = 1 \iff \boxed{v(p) = 0 \text{ και } v(q) = 1}$$

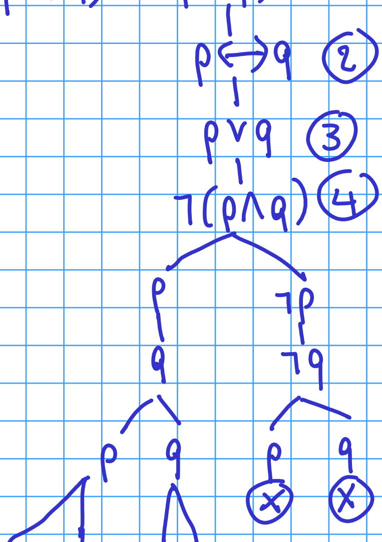


Το δενδρο αληθειας δεν ειναι "κλειστό"
Υπαρχουν μονοπατια που ειναι "ανοιχτα" δεν οδηγουν σε αδιεξοδο. Αυτα τα μονοπατια περιεχουν τις εκτιμησεις που ειναι μοντελα της φ

Η φ ειναι ικανοποιήσιμη.

Άσκηση 2 Να εξετασθεί αν είναι ικανοποιήσιμη η πρόταση

$$\varphi = (p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \quad (1)$$



Διακρίνουμε περιπτώσεις για την $p \leftrightarrow q$

1η περίπτωση
$v(p)=v(q)=1$

⋮

2η περίπτωση
$v(p)=v(q)=0$

⋮

$\neg p$ $\neg q$ $\neg p$ $\neg q$

$\otimes$ $\otimes$ $\otimes$ $\otimes$

Ολα τα μονοπατια του δενδρου ειναι "κλειστα" οδηγουν σε αδιεξοδο σε αντιφαση

Αρα, η προταση φ ειναι μη ικανοποιησιμη

Τα δενδρα αληθειας χρησιμοποιουνται και για το προβλημα της συμπερασματολογιας

Εχουν το πλεονεκτημα οτι σου αποδεικνυουν οτι για προταση φ ειναι λογικο συμπερασμα ενος συνολου Σ και αν δεν ισχυει αυτο σου βρισκουν ολα τα αντιπαραδειγματα (οι περιπτωσεις που δεν ισχυει)

Άσκηση

Να εξετασθει αν ισχυει

$$\{\neg A \to B,\ \neg B \to C\} \models A \to (\neg C \to B)$$

Αρκει να ελεγξουμε οτι το συνολο

$$\{\neg A \to B,\ \neg B \to C,\ \neg(A \to (\neg C \to B))\}$$

ειναι μη ικανοποιησιμο. (Τοτε ισχυει)

Θεωρουμε την προταση

$\varphi = (\neg A \to B) \wedge (\neg B \to C) \wedge \neg(A \to (\neg C \to B))$ 1

$\neg A \to B$ 4

$\neg B \to C$ 5

$\neg(A \to (\neg C \to B))$ 2

A

$\neg(\neg C \to B)$ 3

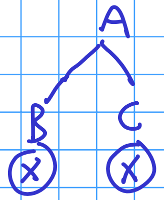
$\neg C$

$\neg B$

$\neg(a \to b)$

a

$\neg b$



Αρα, ολα τα μονοπατια (υποπεριπτωσεις) οδηγουν σε αδιεξοδο (δηλαδη ειναι "κλειστα")

Αρα, η φ ειναι μη ικανοποιησιμη.

Αρα, το συμπερασμα ισχυει.

Άσκηση Να εξετασθεί αν ισχύει

$$(A \vee B) \to C \models A \vee C$$

Αν δεν ισχύει να βρεθούν όλα τα αντιπαραδείγματα

$$((A \vee B) \to C) \wedge \neg(A \vee C) \quad 1$$

$$(A \vee B) \to C \quad 3$$

$$\neg(A \vee C) \quad 2$$

$$\neg A$$

$$\neg C$$

$$\neg(A \vee B) \qquad\qquad C$$

$$\times$$

$\neg A$

$|$

$\neg B$

Υπαρχει "ανοιχτο" μονοπατι

Η διαδρομη αυτη δινει ενα μοντελο για την προταση φ

$$v(\neg A) = v(\neg B) = v(\neg C) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

Αυτο το μοντελο της φ ειναι αντιπαράδειγμα για τον ισχυρισμο

$$(A \vee B) \to C \models A \vee C$$

διοτι $v((A \vee B) \to C) = 1$ οταν $\underline{v(A) = v(B) = v(C) = 0}$

ενω $v(A \vee C) = 0$

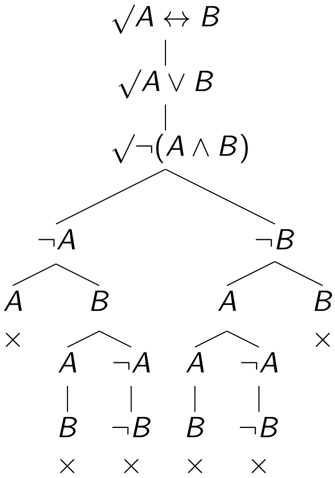
Οι κανόνες αυτοί προφανώς εκφράζουν τις ισοδυναμίες:

$$
\begin{aligned}
X \to Y &\quad \models\!\!\!\mid \quad (\neg X) \vee Y \\
X \wedge Y &\quad \models\!\!\!\mid \quad X \wedge Y \\
X \vee Y &\quad \models\!\!\!\mid \quad X \vee Y \\
X \leftrightarrow Y &\quad \models\!\!\!\mid \quad (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \\
\neg(X \to Y) &\quad \models\!\!\!\mid \quad X \wedge \neg Y \\
\neg(X \wedge Y) &\quad \models\!\!\!\mid \quad \neg X \vee \neg Y \\
\neg(X \vee Y) &\quad \models\!\!\!\mid \quad \neg X \wedge \neg Y \\
\neg(X \leftrightarrow Y) &\quad \models\!\!\!\mid \quad (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y),
\end{aligned}
$$

με διακλάδωση για το $\vee$ και με διαδοχική παράθεση (το ένα κάτω από το άλλο) για το $\wedge$.

Άσκηση 24

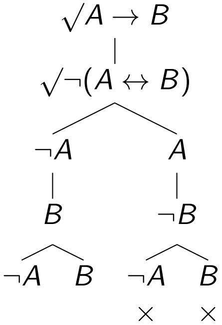
Να εξετασθεί αν ισχύει ότι $\{A \leftrightarrow B, \quad A \vee B\} \models A \wedge B$.



Όλες οι διαδρομές είναι κλειστές, άρα ισχύει.

Άσκηση 25

Να εξετασθεί αν ισχύει ότι $A \to B \models A \leftrightarrow B$.



Οι δύο πρώτες διαδρομές δεν είναι κλειστές, άρα δεν ισχύει.

Παρατήρηση. Παρατηρούμε εδώ ότι οι διαδρομές που δεν κλείνουν περιέχουν τα $\neg A$, B. Άρα τα $\neg A$, B (δηλαδή $A : 0$, $B : 1$) δίνουν ένα αντιπαράδειγμα. Πράγματι, αν $A : 0$, $B : 1$, τότε ισχύει $A \to B : 1$ ενώ $A \leftrightarrow B : 0$.

Άσκηση 26

Να εξετασθεί αν ισχύει ότι $A \vee B \to C \models A \vee C$.

$$\surd A \vee B \to C$$

$$\surd \neg(A \vee C)$$

$$\neg A$$

$$\neg C$$

$\surd \neg(A \vee B)$	C
$\neg A$	$\times$
$\neg B$	

Η πρώτη διαδρομή δεν είναι κλειστή, άρα δεν ισχύει.

Παρατήρηση. Στη διαδρομή που δεν κλείνει εμφανίζονται τα $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ τα οποία δίνουν ένα αντιπαράδειγμα. Πράγματι, για A, B, $C : 0$, έχουμε $A \vee B \to C : 1$, ενώ $A \vee C : 0$.

Άσκηση 27

Να εξετασθεί, με χρήση δένδρων αληθείας, αν ισχύει κάθε ένα από τα παρακάτω:

$$\{A, \quad A \to B\} \models B.$$

$$\{B, \quad A \to B\} \models A.$$

$$\neg A \models A \to B.$$

$$\{A \to B, \quad B \to C\} \models A \to C.$$

$$\neg A \to B \models B \to A.$$

$$A \to B \models \neg B \to \neg A.$$

$$(A \to B) \to C \models \neg C \to A.$$

$$(A \to B) \to A \models A.$$

$$(A \to B) \to B \models A.$$

Όπου δεν ισχύει, να δοθούν όλα τα σχετικά αντιπαραδείγματα.

Άσκηση 28

Να εξετασθεί, με χρήση δένδρων αληθείας, αν ισχύει κάθε ένα από τα παρακάτω:

$$\{A \to B, \quad B \to C, \quad C \to D\} \models A \to D.$$

$$\{A \to B, \neg A \to C\} \models (B \to A) \to (B \wedge C).$$

$$\{\neg A \vee B, A\} \models (\neg B \to C) \wedge (A \wedge (B \vee C)).$$

$$\{\neg A \to B, \neg B \to C\} \models A \to (\neg C \to B).$$

$$\{\neg A \wedge B, A \to \neg C\} \models A \vee (B \to C).$$

Όπου δεν ισχύει, να δοθούν όλα τα σχετικά αντιπαραδείγματα.

Άσκηση 29

Σκοπεύουμε να καλέσουμε για φαγητό κάποιους φίλους μας όμως λόγω προσωπικών θεμάτων πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τους παρακάτω περιορισμούς:

i) *Αν έρθει ο* a *δεν μπορούν να έρθουν μαζί οι* b *και* c.

ii) *Αν δεν έρθει ο* b *δεν θα έρθει και η* c

iii) *Πρέπει να έρθει τουλάχιστον ένας από τους* b *και* c

Να εκφραστεί το πρόβλημα του γεύματος ως πρόβλημα ικανοποιησιμότητας.

Θεωρουμε τις προτασεις
A : O α ερχεται στο γευμα
B : O b ερχεται στο γευμα
C : O c ερχεται στο γευμα

Χρησιμοποιωντας τα ατομα A, B, C θα εκφρασουμε τις προτασεις i), ii), iii)

i) $A \to \neg(B \land C)$

ii) $\neg B \to \neg C$

iii) $B \lor C$

Τα μοντελα του συνολου $\{A \to \neg(B \land C), \neg B \to \neg C, B \lor C\}$ δινουν ολες τις πιθανες επιλογες για ποιους μπορουμε να καλεσουμε.

Άσκηση 30

Επτά κωμικοί A, B, C, D, E, F, G *πρόκειται να δώσουν παραστάσεις μιας βραδιάς, σε δύο από πέντε ξενοδοχεία μιας πόλης, κατά τη διάρκεια ενός τριήμερου φεστιβάλ. Σε κάθε παράσταση μπορεί να συμμετέχει μόνο ένας κωμικός. Κάθε ένας από αυτούς είναι διαθέσιμος, λόγω άλλων υποχρεώσεων, μόνο δύο από τις μέρες αυτές ως εξής:*

1) *Ο A μπορεί να πάει στο Aladdin και στο Caesars τις μέρες 1 και 2.*
2) *Ο B μπορεί να πάει στο Bellagio και στο Excalibur τις μέρες 1 και 2.*
3) *Ο C μπορεί να πάει στο Desert και στο Excalibur τις μέρες 2 και 3.*
4) *Ο D μπορεί να πάει στο Aladdin και στο Desert τις μέρες 1 και 3.*
5) *Ο E μπορεί να πάει στο Caesars και στο Excalibur τις μέρες 1 και 3.*
6) *Ο F μπορεί να πάει στο Bellagio και στο Desert τις μέρες 2 και 3.*
7) *Ο G μπορεί να πάει στο Bellagio και στο Caesars τις μέρες 1 και 2.*

Ζητείται να ευρεθεί αν είναι δυνατή η πραγματοποίηση των παραστάσεων αυτών.

Λύση

Θεωρούμε τις 7 προτάσεις:

a: Ο A πηγαίνει στο Aladdin την ημέρα 1 και στο Caesars την ημέρα 2.
b: Ο B πηγαίνει στο Bellagio την ημέρα 1 και στο Excalibur την ημέρα 2.
c: Ο C πηγαίνει στο Desert την ημέρα 2 και στο Excalibur την ημέρα 3.
d: Ο D πηγαίνει στο Aladdin την ημέρα 1 και στο Desert την ημέρα 3.
e: Ο E πηγαίνει στο Caesars την ημέρα 1 και στο Excalibur την ημέρα 3.
f: Ο F πηγαίνει στο Bellagio την ημέρα 2 και στο Desert την ημέρα 3.
g: Ο G πηγαίνει στο Bellagio την ημέρα 1 και στο Caesars την ημέρα 2.

Η άρνηση κάθε μιας από τις προτάσεις αυτές αντιστοιχεί στο ότι οι μέρες προγραμματίζονται ανάποδα, για παράδειγμα,

$\neg a$: Ο A πηγαίνει στο Aladdin την ημέρα 2 και στο Caesars την ημέρα 1.

Έτσι, συγκεντρωτικά για κάθε κωμικό έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Λύση (συνέχεια)

Κωμικός	Πρόταση	1η μέρα	2η μέρα	3η μέρα
A	a	Aladdin	Caesars	-
A	$\neg a$	Caesars	Aladdin	-
B	b	Bellagio	Excalibur	-
B	$\neg b$	Excalibur	Bellagio	-
C	c	-	Desert	Excalibur
C	$\neg c$	-	Excalibur	Desert
D	d	Aladdin	-	Desert
D	$\neg d$	Desert	-	Aladdin
E	e	Caesars	-	Excalibur
E	$\neg e$	Excalibur	-	Caesars
F	f	-	Bellagio	Desert
F	$\neg f$	-	Desert	Bellagio
G	g	Bellagio	Caesars	-
G	$\neg g$	Caesars	Bellagio	-

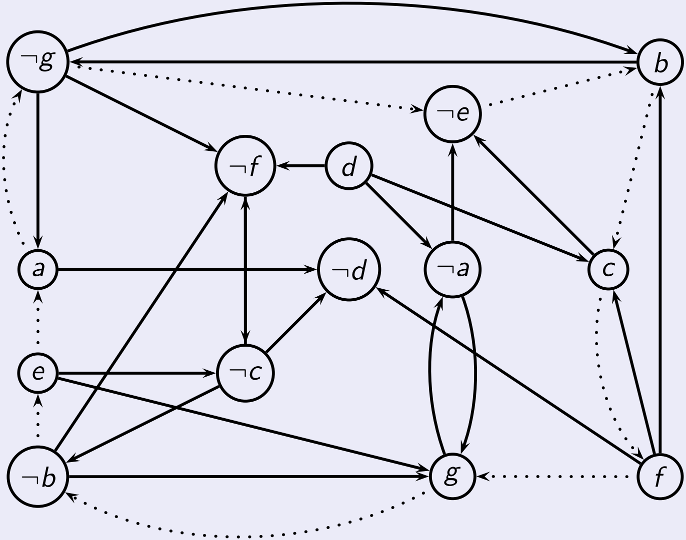
Λύση (συνέχεια)

Τώρα μπορούμε να γράψουμε τους περιορισμούς που εξασφαλίζουν ότι κανένα ζευγάρι κωμικών δε θα βρεθεί στο ίδιο ξενοδοχείο την ίδια μέρα.

$$
\begin{array}{llllll}
a \rightarrow \neg d & \text{και} & d \rightarrow \neg a & \neg b \rightarrow g & \text{και} & \neg g \rightarrow b \\
a \rightarrow \neg g & \text{και} & g \rightarrow \neg a & c \rightarrow f & \text{και} & \neg f \rightarrow \neg c \\
\neg a \rightarrow \neg e & \text{και} & e \rightarrow a & c \rightarrow \neg e & \text{και} & e \rightarrow \neg c \\
\neg a \rightarrow g & \text{και} & \neg g \rightarrow a & \neg c \rightarrow \neg d & \text{και} & d \rightarrow c \\
b \rightarrow \neg g & \text{και} & g \rightarrow \neg b & \neg c \rightarrow \neg f & \text{και} & f \rightarrow c \\
b \rightarrow c & \text{και} & \neg c \rightarrow \neg b & d \rightarrow \neg f & \text{και} & f \rightarrow \neg d \\
\neg b \rightarrow e & \text{και} & \neg e \rightarrow b & e \rightarrow g & \text{και} & \neg g \rightarrow \neg e \\
\neg b \rightarrow \neg f & \text{και} & f \rightarrow b & f \rightarrow g & \text{και} & \neg g \rightarrow \neg f
\end{array}
$$

Λύση (συνέχεια)

Οι συνεπαγωγές αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν στο παρακάτω γράφημα τόξων:



Λύση (συνέχεια)

Δυστυχώς υπάρχουν φαύλοι κύκλοι. Για παράδειγμα υπάρχουν οι κύκλοι

$$e \to a \to \neg g \to \neg e \to b \to c \to f \to g \to \neg b \to e$$

και

$$e \to a \to \neg g \to \neg e \to b \to \neg g \to \neg f \to \neg c \to \neg b \to e$$

Αυτοί οι κύκλοι μας λένε ότι τα e και $\neg e$ πρέπει να έχουν την ίδια τιμή, άρα δεν υπάρχει τρόπος να προγραμματίσουμε όλες τις παραστάσεις. Οι διοργανωτές του φεστιβάλ πρέπει να επαναδιαπραγματευτούν τις συμφωνίες τους με τουλάχιστον ένα από τους έξι κωμικούς A, B, C, E, F, G (η διαθεσιμότητα του D δεν εμφανίζεται στους παραπάνω κύκλους) για να καταρτισθεί ένα ορθό πρόγραμμα.