Οι διαφάνειες βασίζονται σε αυτές του ακόλουθου μαθήματος:

Introduction to Algorithms (6-046J), MIT

https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/

Αποσβεστική Ανάλυση

- Υπολογισμός της μέσης τιμής του χρόνου για την εκτέλεση κάποιας πράξης δομής δεδομένων, επί όλων των εκτελούμενων πράξεων.
- Το μέσο κόστος ανά πράξη μπορεί να είναι μικρό, παρ’ όλο που μια μεμονωμένη πράξη της ακολουθίας αυτής πιθανόν να έχει μεγάλο κόστος.
- Η αποσβεστική ανάλυση εγγυάται τη *μέση επίδοση κάθε πράξης στη χειρότερη περίπτωση*.
- Τρεις μέθοδοι αποσβεστικής ανάλυσης:
    - Η σωρευτική μέθοδος
    - Η χρεωπιστωτική μέθοδος
    - Η μέθοδος του δυναμικού

Τιμή μετρητή	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	Συνολικό κόστος
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	3
3	0	0	0	0	0	0	1	1	4
4	0	0	0	0	0	1	0	0	7
5	0	0	0	0	0	1	0	1	8
6	0	0	0	0	0	1	1	0	10
7	0	0	0	0	0	1	1	1	11
8	0	0	0	0	1	0	0	0	15
9	0	0	0	0	1	0	0	1	16
10	0	0	0	0	1	0	1	0	18
11	0	0	0	0	1	0	1	1	19
12	0	0	0	0	1	1	0	0	22
13	0	0	0	0	1	1	0	1	23
14	0	0	0	0	1	1	1	0	25
15	0	0	0	0	1	1	1	1	26
16	0	0	0	1	0	0	0	0	31

Σχήμα 17.2 Οι διαδοχικές καταστάσεις ενός 8-δύφιου δυαδικού μετρητή καθώς η τιμή του μεταβάλλεται από το 0 στο 16 μέσω μιας ακολουθίας 16 πράξεων Επαυξησης. Τα δυφία που μεταβάλλονται για να επιτευχθεί η επόμενη τιμή απεικονίζονται σκιασμένα. Στη δεξιά στήλη παρατίθεται το συνολικό τρέχον κόστος για τη μεταβολή των δυφίων. Παρατηρήστε ότι το κόστος αυτό είναι πάντοτε μικρότερο από το διπλάσιο του συνολικού αριθμού των πράξεων Επαυξησης.

```
INCREMENT(A)
i = 0
while i < A.length and A[i] == 1
    A[i] = 0
    i = i + 1
if i < A.length
    A[i] = 1
```

Πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης: O(nk)
όπου n είναι το πλήθος των αυξήσεων κατά 1 και k το μέγιστο μήκος δυαδικού αριθμού που σχηματίζεται (A.length)
Καλύτερη ανάλυση (Σωρευτική μέθοδος) :

- Το ψηφίο A[0] μεταβάλλεται κάθε φορά
- Το ψηφίο A[1] μεταβάλλεται κάθε δεύτερη φορά
- Το ψηφίο A[2] μεταβάλλεται κάθε τέταρτη φορά
- Γενικά το ψηφίο A[i] μεταβάλλεται floor($n/2^i$) φορές.
- Συνολικά το πλήθος των δυαδικών πράξεων:

$$\sum_{i=0}^{k-1}\left\lfloor \frac{n}{2^i}\right\rfloor < n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 2n ,$$

- Το μέσο (αποσβεστικό) κόστος είναι: O(n)/n=O(1).

Δυναμικοί πίνακες

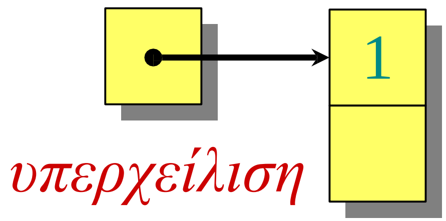
- Οι πίνακες έχουν προκαθορισμένο μέγεθος
- Σε ορισμένες περιπτώσεις, ο χώρος δεν επαρκεί για την αποθήκευση των στοιχείων.
- Διαστολή πίνακα: Μεταφορά των στοιχείων σε νέο μεγαλύτερο πίνακα
- Αντίστροφα, μετά από διαγραφή πολλών στοιχείων, συμφέρει να δηλωθεί ο πίνακας με μικρότερο μέγεθος.
- Συστολή πίνακα: Μεταφορά των στοιχείων σε νέο μικρότερο πίνακα
- Το πραγματικό κόστος μιας πράξης είναι υψηλό όταν αυτή προκαλεί μια διαστολή ή μια συστολή.
- Όμως το αποσβεστικό κόστος εισαγωγής και διαγραφής: O(1)
- Ο αχρησιμοποίητος χώρος σε έναν δυναμικό πίνακα δεν θα υπερβαίνει ποτέ ένα σταθερό ποσοστό του συνολικού χώρου.

Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

1. INSERT
2. INSERT

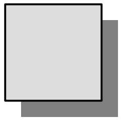
Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

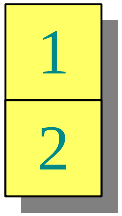
1. Insert
2. Insert



Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

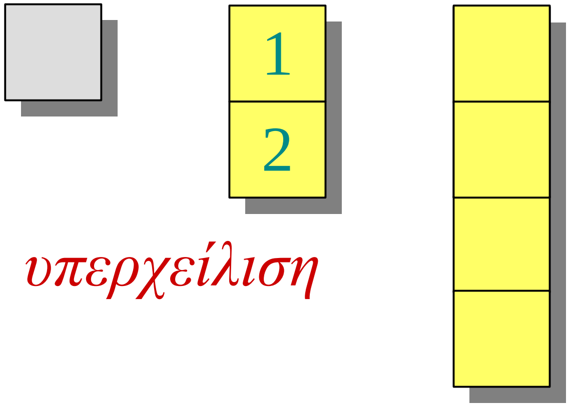
1. INSERT
2. INSERT





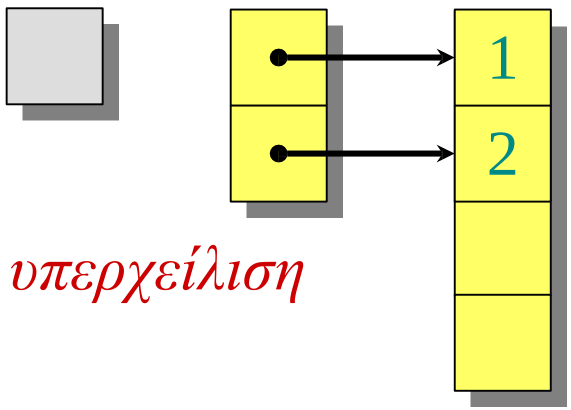
Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

1. INSERT
2. INSERT
3. INSERT



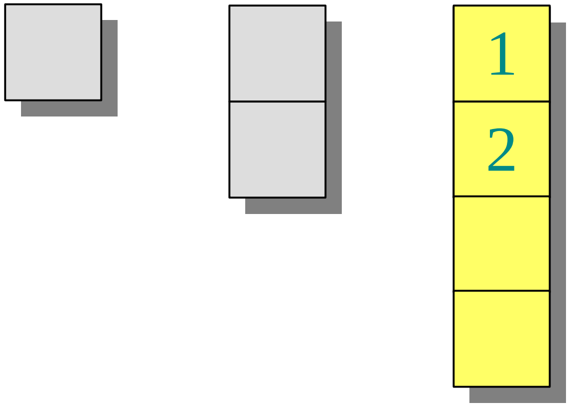
Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

1. INSERT
2. INSERT
3. INSERT



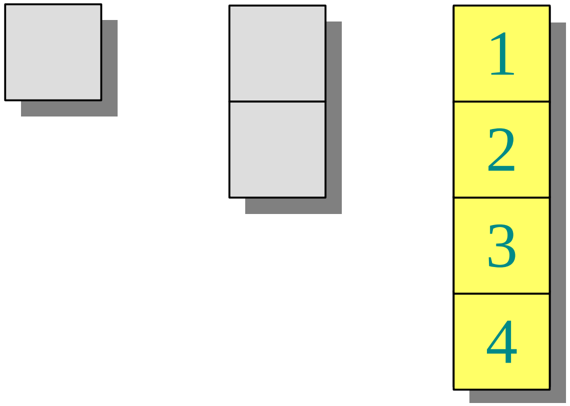
Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

1. INSERT
2. INSERT
3. INSERT



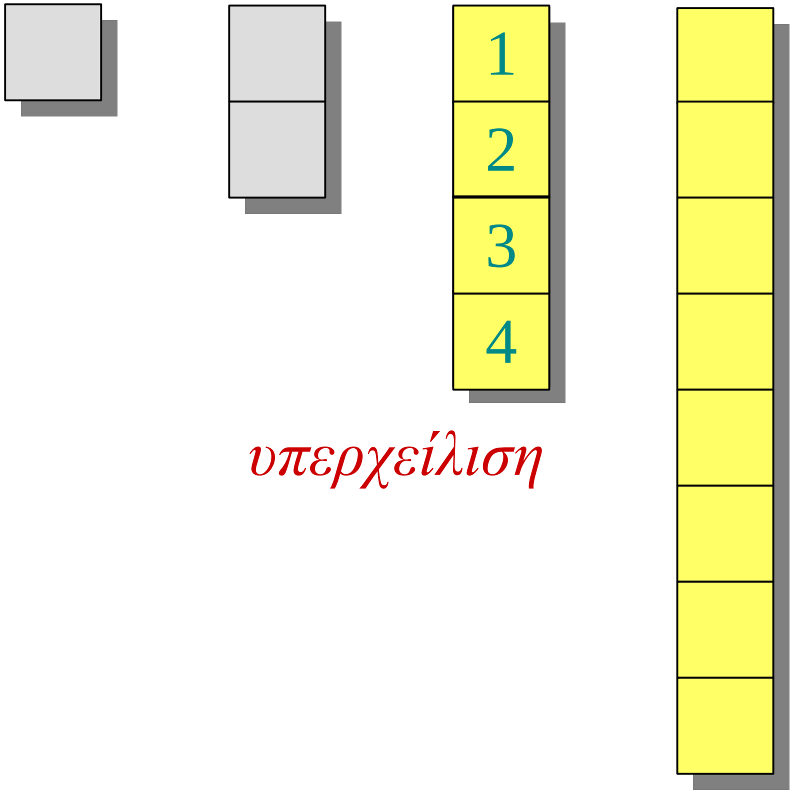
Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

1. INSERT
2. INSERT
3. INSERT
4. INSERT



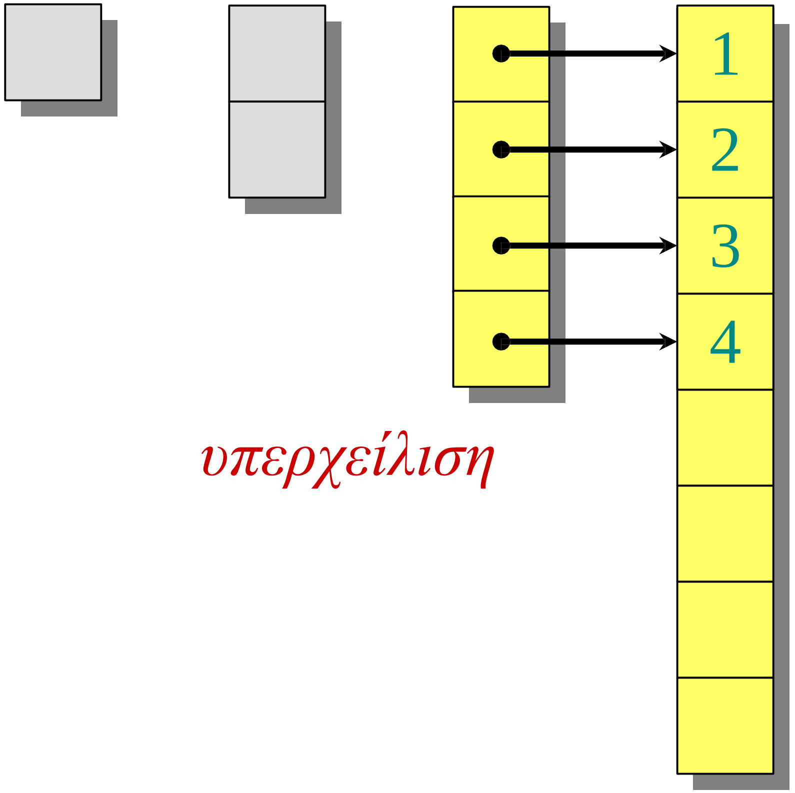
Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

1. Insert
2. Insert
3. Insert
4. Insert
5. Insert



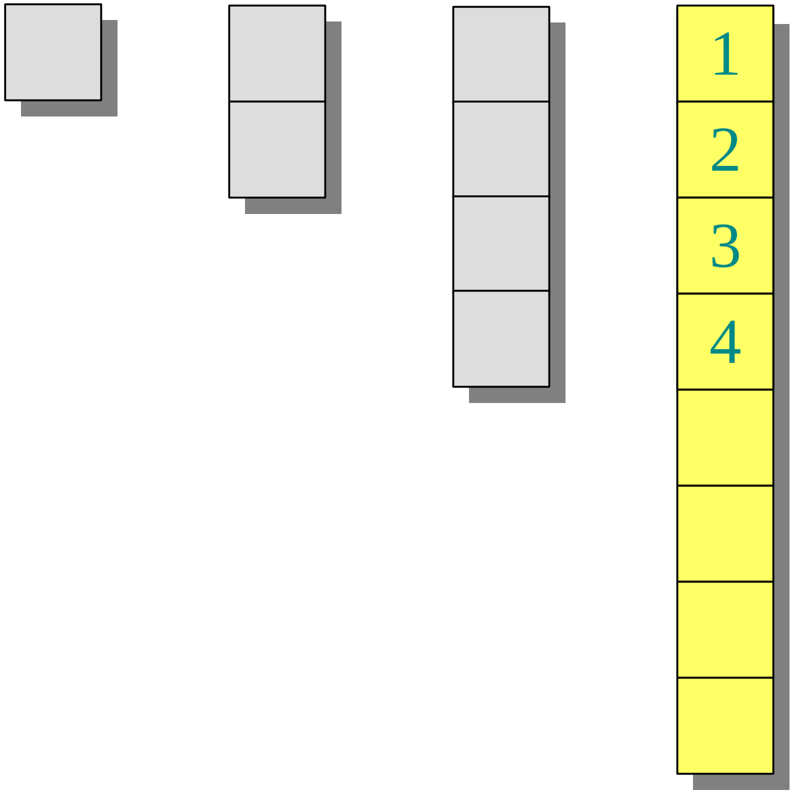
Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

1. INSERT
2. INSERT
3. INSERT
4. INSERT
5. INSERT



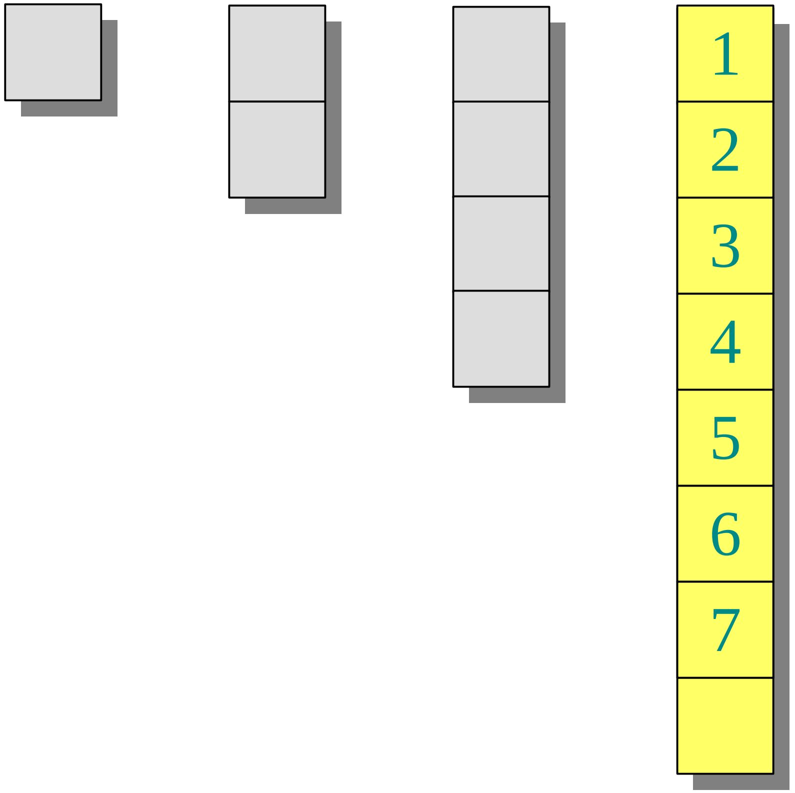
Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

1. INSERT
2. INSERT
3. INSERT
4. INSERT
5. INSERT



Παράδειγμα δυναμικού πίνακα

1. INSERT
2. INSERT
3. INSERT
4. INSERT
5. INSERT
6. INSERT
7. INSERT



Ανάλυση Χειρότερης Περίπτωσης

- Έστω μία ακολουθία n εισαγωγών.
- Ο χρόνος χειρότερης περίπτωσης για μία εισαγωγή είναι $\Theta(n)$.
- Επομένως, ο χρόνος χειρότερης περίπτωσης για n εισαγωγές είναι $n \cdot \Theta(n) = \Theta(n^2)$.

Λάθος. Στη πράξη, το κόστος της χειρότερης περίπτωσης για n εισαγωγές είναι μόνο $\Theta(n) \ll \Theta(n^2)$.

Πιο «σφιχτή» ανάλυση

Έστω $c_i =$ το κόστος της i-*στης* εισαγωγής

$$= \begin{cases} i & \text{αν } i-1 \text{ είναι δύναμη του } 2, \\ 1 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$size_i$	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16
c_i	1	2	3	1	5	1	1	1	9	1

Πιο «σφιχτή» ανάλυση

Έστω $c_i =$ το κόστος της i-$\sigma\tau\eta\varsigma$ εισαγωγής

$$= \begin{cases} i & \text{αν } i-1 \text{ είναι δύναμη του } 2, \\ 1 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$size_i$	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16
c_i	1	1 1	1 2	1	1 4	1	1	1	1 8	1

Πιο «σφιχτή» ανάλυση

$$\text{Κόστος } n \text{ εισαγωγών} = \sum_{i=1}^{n} c_i \leq n + \sum_{j=0}^{\lfloor \lg(n-1) \rfloor} 2^j \leq 3n = \Theta(n)\,.$$

Έτσι, το μέσο κόστος κάθε λειτουργίας είναι $\Theta(n)/n = \Theta(1)$.

Αποσβεστική ανάλυση

- ***Αποσβεστική ανάλυση*** είναι οποιαδήποτε στρατηγική για την ανάλυση μίας ακολουθίας λειτουργιών προκειμένου να δείξουμε ότι το μέσο κόστος ανά λειτουργία είναι μικρό, ακόμα και αν μεμονωμένα κάποιες λειτουργίες στην ακολουθία μπορεί να είναι ακριβές.
- Η αποσβεστική ανάλυση εγγυάται τη μέση απόδοση κάθε λειτουργίας στη χειρότερη περίπτωση.

Τύποι Αποσβεστικής Ανάλυσης

Τρείς τεχνικές:

- Η σωρευτική μέθοδος,
- Η χρεωπιστωτική μέθοδος,
- Η μέθοδος δυναμικού.

Έχουμε δει τη σωρευτική μέθοδο.

Η σωρευτική μέθοδος, αν και απλή, υπολείπεται ακρίβειας σε σχέση με τις άλλες μεθόδους.

Συγκεκριμένα, η χρεωπιστωτική μέθοδος και η μέθοδος δυναμικού επιτρέπουν ένα διαφορετικό αποσβεστικό κόστος για κάθε λειτουργία.

Η χρεωπιστωτική μέθοδος

- Χρέωσε τη i-*οστη* λειτουργία με ένα πλασματικό ***αποσβεστικό κόστος*** $\hat{c}_i$, όπου 1€ είναι το κόστος για 1 μονάδα εργασίας (*δηλ.*, χρόνος).
- Το ποσό που περισσεύει αφού πληρωθεί το πραγματικό κόστος της λειτουργίας αποταμιεύεται σε μία ***τράπεζα*** για πληρωμή μελλοντικών λειτουργιών
- Το υπόλοιπο του λογαριασμού δεν μπορεί να έχει αρνητική τιμή.
- Θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \le \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i$$

για κάθε ακολουθία n λειτουργιών.

- Έτσι, το συνολικό αποσβεστικό κόστος είναι ένα πάνω όριο του συνολικού πραγματικού κόστους.

Χρεωπιστωτική Ανάλυση Κόστους Ακολουθίας Εισαγωγών σε Δυναμικό Πίνακα

Χρέωσε ένα αποσβεστικό κόστος $\hat{c}_i = 3€$ για την i-οστή εισαγωγή.

- 1€ πληρώνεται για τη συγκεκριμένη εισαγωγή.
- 2€ αποταμιεύονται για την πληρωμή της ακριβής πράξης του διπλασιασμού πίνακα.

Όταν ο πίνακας διπλασιάζεται σε μέγεθος, 1€ πληρώνεται για τη μετακίνηση ενός πρόσφατου στοιχείου και 1€ πληρώνεται για τη μετακίνηση ενός παλαιού στοιχείου.

Παράδειγμα:

0€	0€	0€	0€	2€	2€	2€	2€

υπερχείλιση

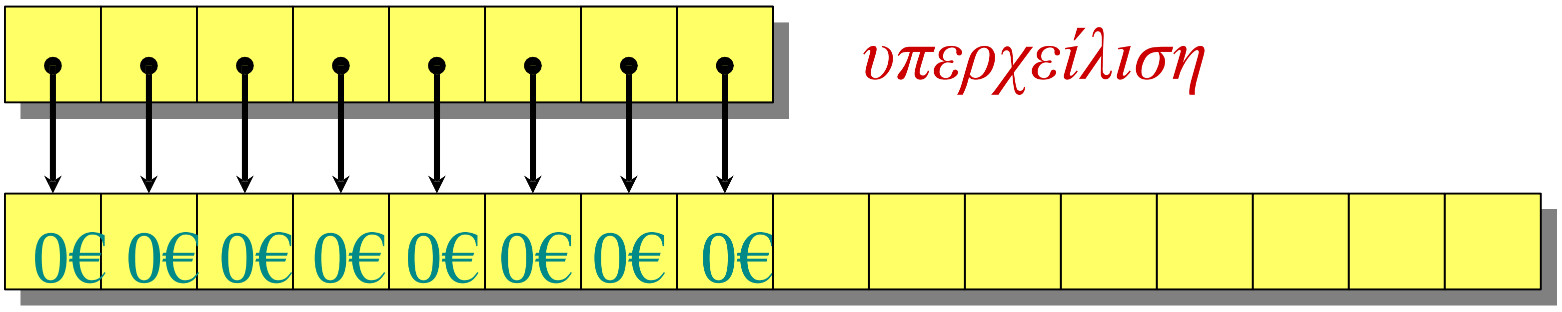
Χρεωπιστωτική Ανάλυση Κόστους Ακολουθίας Εισαγωγών σε Δυναμικό Πίνακα

Χρέωσε ένα αποσβεστικό κόστος $\hat{c}_i = 3€$ για την i-οστή εισαγωγή.

- 1€ πληρώνεται για τη συγκεκριμένη εισαγωγή.
- 2€ αποταμιεύονται για την πληρωμή της ακριβής πράξης του διπλασιασμού πίνακα.

Όταν ο πίνακας διπλασιάζεται σε μέγεθος, 1€ πληρώνεται για τη μετακίνηση ενός πρόσφατου στοιχείου και 1€ πληρώνεται για τη μετακίνηση ενός παλαιού στοιχείου.

Παράδειγμα:



Χρεωπιστωτική Ανάλυση Κόστους Ακολουθίας Εισαγωγών σε Δυναμικό Πίνακα

Χρέωσε ένα αποσβεστικό κόστος $\hat{c}_i = 3€$ για την i-οστή εισαγωγή.

- 1€ πληρώνεται για τη συγκεκριμένη εισαγωγή.
- 2€ αποταμιεύονται για την πληρωμή της ακριβής πράξης του διπλασιασμού πίνακα.

Όταν ο πίνακας διπλασιάζεται σε μέγεθος, 1€ πληρώνεται για τη μετακίνηση ενός πρόσφατου στοιχείου και 1€ πληρώνεται για τη μετακίνηση ενός παλαιού στοιχείου.

Παράδειγμα:

0€	0€	0€	0€	0€	0€	0€	0€	2€	2€	2€					

Χρεωπιστωτική ανάλυση

Βασική ιδιότητα: Το υπόλοιπο του λογαριασμού πότε δεν γίνεται αρνητικό. Έτσι, το άθροισμα του αποσβεστικού κόστους είναι άνω όριο του αθροίσματος των πραγματικών κοστών.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$size_i$	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16
c_i	1	2	3	1	5	1	1	1	9	1
$\hat{c}_i$	2*	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$bank_i$	1	2	2	4	2	4	6	8	2	4

* Η πρώτη λειτουργία έχει κόστος μόνο 2€ και όχι 3€.

Η μέθοδος του δυναμικού

Ιδέα: Θεώρησε τον τραπεζικό λογαριασμό ως δυναμική ενέργεια (όπως στη Φυσική) του δυναμικού συνόλου.

Βασικό περίγραμμα:

- Έναρξη με την αρχική δομή δεδομένων D_0.
- Η λειτουργία i μετατρέπει τη D_{i-1} στην D_i.
- Το κόστος της λειτουργίας i είναι c_i.
- Ορίζουμε τη ***συνάρτηση δυναμικού*** $\Phi : \{D_i\} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\Phi(D_0) = 0$ και $\Phi(D_i) \geq 0$ για όλα τα i.
- Το ***αποσβεστικό κόστος*** $\hat{c}_i$ ως προς τη Φ ορίζεται ως $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$.

Κατανοώντας τα δυναμικά

$$\hat{c}_i = c_i + \underbrace{\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})}$$

Διαφορά δυναμικού $\Delta\Phi_i$

- Αν $\Delta\Phi_i > 0$, τότε $\hat{c}_i > c_i$. Η λειτουργία i αποθηκεύει ενέργεια για μελλοντική χρήση.
- Αν $\Delta\Phi_i < 0$, τότε $\hat{c}_i < c_i$. Η δομή δεδομένων χρησιμοποιεί την αποθηκευμένη ενέργεια για να εκτελέσει τη λειτουργία i.

Το αποσβεστικό κόστος φράζει το πραγματικό κόστος

Το συνολικό αποσβεστικό κόστος των n λειτουργιών είναι:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{} c_i$$ αφού $\Phi(D_n) \geq 0$ και $\Phi(D_0) = 0$.

Η ανάλυση με τη μέθοδο του δυναμικού για το διπλασιασμό πίνακα

Ορίζουμε το δυναμικό του πίνακα μετά τη i-οστη εισαγωγή με $\Phi(D_i) = 2i - 2^{\lceil \lg i \rceil}$.

(Υποθέτουμε ότι $2^{\lceil \lg 0 \rceil} = 0$)

Σημειώστε ότι:

- $\Phi(D_0) = 0$,
- $\Phi(D_i) \geq 0$ για όλα τα i.

Παράδειγμα:

•	•	•	•	•	•		
0€	0€	0€	0€	2€	2€		

$\Phi = 2 \cdot 6 - 2^3 = 4$

(Χρεωπιστωτική μέθοδος)

Υπολογισμός αποσβεστικών κοστών

Το αποσβεστικό κόστος της i-οστής εισαγωγής είναι

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} i & \text{αν } i-1 \text{ δύναμη του } 2, \\ 1 & \text{αλλιώς} \end{array} \right\} + \left(2i - 2^{\lceil \lg i \rceil}\right) - \left(2(i-1) - 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil}\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} i & \text{αν } i-1 \text{ δύναμη του } 2, \\ 1 & \text{αλλιώς} \end{array} \right\} + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil}.$$

Υπολογισμός

Περίπτωση 1: $i - 1$ είναι δύναμη του 2.

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= i + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\ &= i + 2 - 2(i-1) + (i-1) \\ &= i + 2 - 2i + 2 + i - 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Περίπτωση 2: $i - 1$ δεν είναι δύναμη του 2.

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= 1 + 2 - 2^{\lceil \lg i \rceil} + 2^{\lceil \lg (i-1) \rceil} \\ &= 3\end{aligned}$$

Επομένως, n εισαγωγές έχουν συνολικό κόστος $\Theta(n)$ στη χειρότερη περίπτωση.

Συστολή και διαστολή πίνακα

- Εισαγωγές και διαγραφές στο δυναμικό πίνακα T.
- Συντελεστής πληρότητας ενός μη κενού πίνακα T ορίζεται ως $\alpha(T) = T.\textit{πλήθος}/T.\textit{μέγεθος}$
- $\alpha(T)=1$ για κενό πίνακα (μηδενικού μεγέθους)
- Θα πρέπει $\alpha(T) \in [1/4 \ldots 1]$
- Αν $\alpha(T)=1$, διπλασιασμός του μεγέθους του πίνακα.
- Αν $\alpha(T)=1/4$, υποδιπλασιασμός του μεγέθους του πίνακα.
- Αν θα έπρεπε $\alpha(T) \geq 1/2$, υψηλό αποσβεστικό κόστος στη χειρότερη περίπτωση

Συνάρτηση Δυναμικού

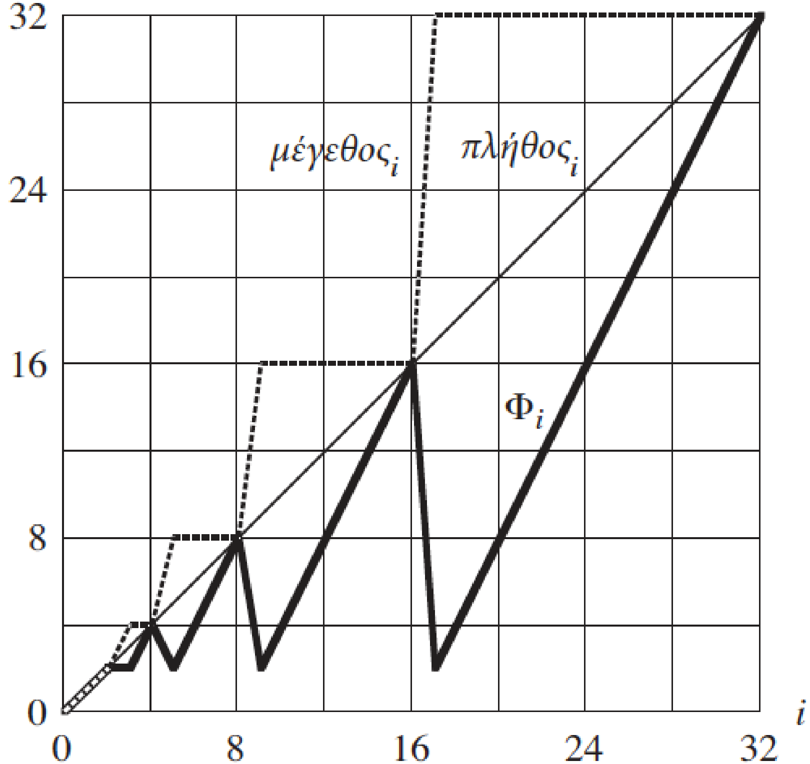
Φ(Τ) =

2 · Τ.πλήθος − Τ.μέγεθος εάν α(Τ) ≥ 1/2 ,

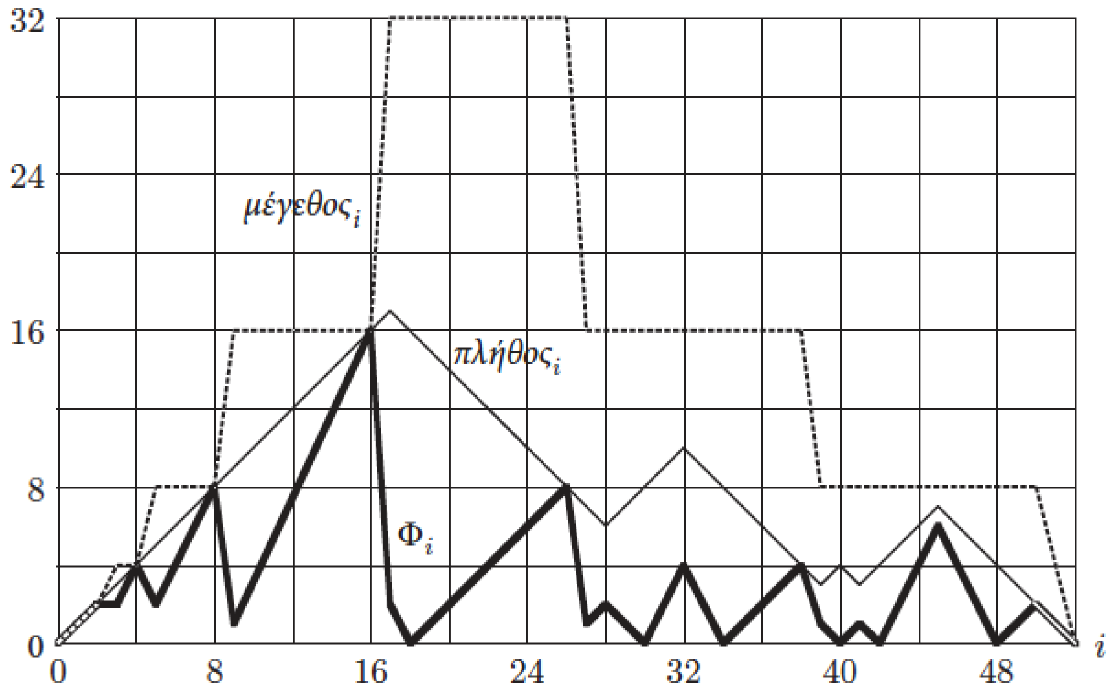
Τ.μέγεθος/2 − Τ.πλήθος εάν α(Τ) < 1/2 .

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$$

όπου T_i και T_{i-1} είναι ο πίνακας μετά την *i*-οστή και (*i*-*1*)-οστή λειτουργία.



Σχήμα 17.3 Η εξέλιξη της ποσότητας $πλήθος_i$ των στοιχείων του πίνακα, της ποσότητας $μέγεθος_i$ των θυρίδων του πίνακα, και του δυναμικού $\Phi_i = 2 \cdot πλήθος_i - μέγεθος_i$ κατά τη διάρκεια n πράξεων Εισαγωγης σε Πινακα (οι τιμές και των τριών μεγεθών αναφέρονται στην κατάσταση μετά από την i-οστή πράξη). Η λεπτή γραμμή απεικονίζει την ποσότητα $πλήθος_i$, η διακεκομμένη γραμμή την ποσότητα $μέγεθος_i$, και η έντονη γραμμή το δυναμικό Φ_i. Παρατηρήστε ότι αμέσως πριν από μια διαστολή, το δυναμικό έχει εξισωθεί με το πλήθος των στοιχείων του πίνακα, και επομένως μπορεί να καλύψει το κόστος της μετακίνησης όλων των στοιχείων στον νέο πίνακα. Μετά από τη διαστολή, το δυναμικό πέφτει στο 0, αλλά αυξάνεται αμέσως στην τιμή 2 όταν εισαχθεί το στοιχείο που προκάλεσε τη διαστολή.



Σχήμα 17.4 Η εξέλιξη της ποσότητας $\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma_i$ των στοιχείων του πίνακα, της ποσότητας $\mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma_i$ των θυρίδων του πίνακα, και του δυναμικού

$$\Phi_i = \begin{cases} 2 \cdot \pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma_i - \mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma_i & \text{εάν } \alpha_i \geq 1/2\,, \\ \mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma_i/2 - \pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma_i & \text{εάν } \alpha_i < 1/2\,, \end{cases}$$

κατά τη διάρκεια n πράξεων Εισαγωγης σε Πινακα και Διαγραφης απο Πινακα (οι τιμές και των τριών μεγεθών αναφέρονται στην κατάσταση μετά από την i-οστή πράξη). Η λεπτή γραμμή απεικονίζει την ποσότητα $\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma_i$, η διακεκομμένη γραμμή την ποσότητα $\mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma_i$, και η έντονη γραμμή το δυναμικό Φ_i. Παρατηρήστε ότι αμέσως πριν από μια διαστολή, το δυναμικό έχει εξισωθεί με το πλήθος των στοιχείων του πίνακα, και επομένως μπορεί να καλύψει το κόστος της μετακίνησης όλων των στοιχείων στον νέο πίνακα. Αντίστοιχα, αμέσως πριν από μια συστολή, το δυναμικό έχει επίσης εξισωθεί με το πλήθος των στοιχείων του πίνακα.

Αποσβεστικό κόστος λειτουργιών

Αποσβεστικό κόστος της i-οστής λειτουργίας όταν είναι εισαγωγή:

- Αν $\alpha_{i-1} \geq 1/2$, η ανάλυση είναι ίδια με την περίπτωση που υπάρχουν μόνο εισαγωγές.
- Αν $\alpha_{i-1} < 1/2$ και $\alpha_i < 1/2$, $\hat{c}_i = 0$.

$$\begin{aligned}
\widehat{c}_i &= c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\
&= 1 + (size_i/2 - num_i) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1}) \\
&= 1 + (size_i/2 - num_i) - (size_i/2 - (num_i - 1)) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Αν $\alpha_{i-1} < 1/2$ αλλά $\alpha_i \geq 1/2$, $\hat{c}_i = 3$.

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\
&= 1 + (2 \cdot num_i - size_i) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1}) \\
&= 1 + (2(num_{i-1} + 1) - size_{i-1}) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1}) \\
&= 3 \cdot num_{i-1} - \frac{3}{2} size_{i-1} + 3 \\
&= 3\alpha_{i-1} size_{i-1} - \frac{3}{2} size_{i-1} + 3 \\
&< \frac{3}{2} size_{i-1} - \frac{3}{2} size_{i-1} + 3 \\
&= 3 .
\end{aligned}
$$

Αποσβεστικό κόστος λειτουργιών

Αποσβεστικό κόστος της i-οστής λειτουργίας όταν είναι διαγραφή:

- Αν $\alpha_{i-1} < 1/2$ και η λειτουργία δεν προκαλεί συστολή, $\hat{c}_i = 2$.

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\
&= 1 + (size_i/2 - num_i) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1}) \\
&= 1 + (size_i/2 - num_i) - (size_i/2 - (num_i + 1)) \\
&= 2\,.
\end{aligned}
$$

- Αν $\alpha_{i-1} < 1/2$ και η λειτουργία προκαλεί συστολή, $\hat{c}_i = 1$.

$$size_i/2 = size_{i-1}/4 = num_{i-1} = num_i + 1.$$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\
&= (num_i + 1) + (size_i/2 - num_i) - (size_{i-1}/2 - num_{i-1}) \\
&= (num_i + 1) + ((num_i + 1) - num_i) - ((2 \cdot num_i + 2) - (num_i + 1)) \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

Αν $\alpha_{i-1} \geq 1/2$, $\hat{c}_i = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$.

$\alpha_i \geq 1/2$

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= 1 + (2 \cdot num_i - size_i) - (2 \cdot num_{i-1} - size_{i-1}) \\ &= 1 + 2 \cdot num_i - size_i - 2 \cdot num_i - 2 + size_i \\ &= -2.\end{aligned}$$

$\alpha_i < 1/2$

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= 1 + (size_i/2 - num_i) - (2 \cdot num_{i-1} - size_{i-1}) \\ &= 1 + size_i/2 - num_i - 2 \cdot num_i - 2 + size_i \\ &= -1 + \frac{3}{2}(size_i - 2 \cdot num_i) \\ &\leq -1 + \frac{3}{2}(size_i - (size_i - 1)) \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Επομένως, n λειτουργίες εισαγωγών/διαγραφών έχουν συνολικό κόστος $\Theta(n)$ στη χειρότερη περίπτωση.