Ταιριάσματα και Διμερή Γραφήματα

Κεφάλαιο 4,

Παράγραφος 4.7

Περιεχόμενα

- Ταίριασμα
- Μέγιστο Ταίριασμα
- Τέλειο Ταίριασμα
- Επαυξημένη Διαδρομή
- Αλγόριθμος υπολογισμού Μέγιστου Ταιριάσματος
- Διμερές Γράφημα

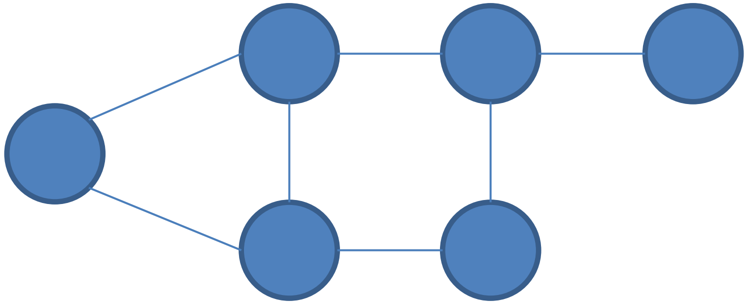
Ταίριασμα (matching)

Ταίριασμα T ενός γραφήματος G υποσύνολο του γραφήματος που δεν περιέχει προσκείμενες πλευρές

Ταίριασμα (matching)

Ταίριασμα Τ ενός γραφήματος G υποσύνολο του γραφήματος που δεν περιέχει προσκείμενες πλευρές

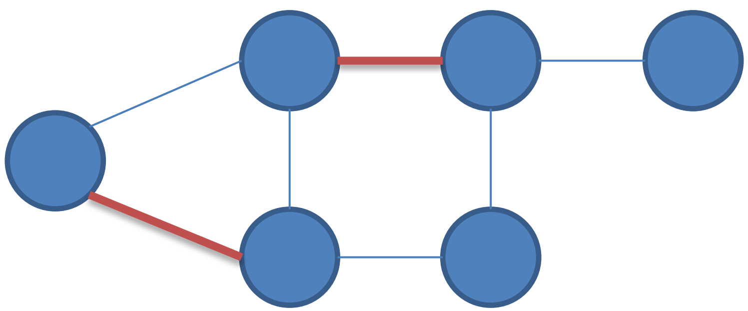
- Οι κορυφές που είναι άκρα πλευρών του Τ είναι **ταιριασμένες μεταξύ τους ανά δύο** μέσω μίας πλευράς του Τ και αποκλείεται μία κορυφή να έχει πάνω από ένα ταίρι.



Ταίριασμα (matching)

Ταίριασμα T ενός γραφήματος G υποσύνολο του γραφήματος που δεν περιέχει προσκείμενες πλευρές

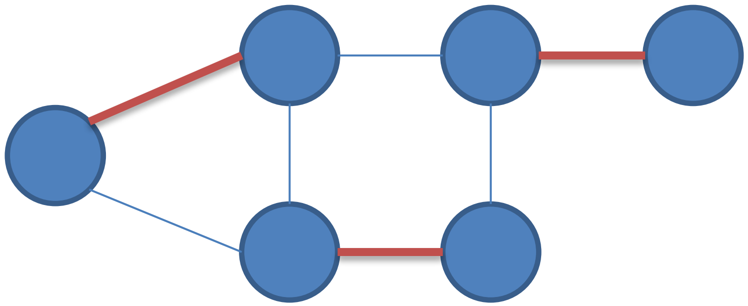
- Οι κορυφές που είναι άκρα πλευρών του T είναι **ταιριασμένες μεταξύ τους ανά δύο** μέσω μίας πλευράς του T και αποκλείεται μία κορυφή να έχει πάνω από ένα ταίρι.



Μέγιστο Ταίριασμα

Ταίριασμα Τ ενός γραφήματος G υποσύνολο του γραφήματος που δεν περιέχει προσκείμενες πλευρές

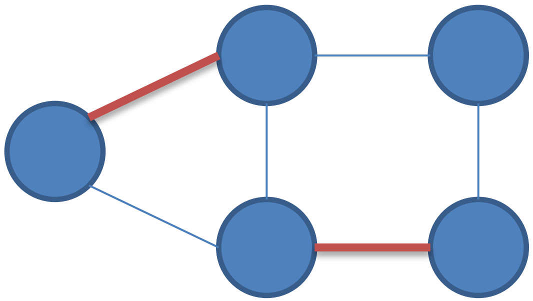
- Οι κορυφές που είναι άκρα πλευρών του Τ είναι **ταιριασμένες μεταξύ τους ανά δύο** μέσω μίας πλευράς του Τ και αποκλείεται μία κορυφή να έχει πάνω από ένα ταίρι.
- Αν δεν υπάρχει ταίριασμα μεγαλύτερο από το Τ τότε λέμε ότι το Τ είναι «**μέγιστο**» (έχουν βρεθεί ταίρια για όσο το δυνατόν πιο πολλές κορυφές).

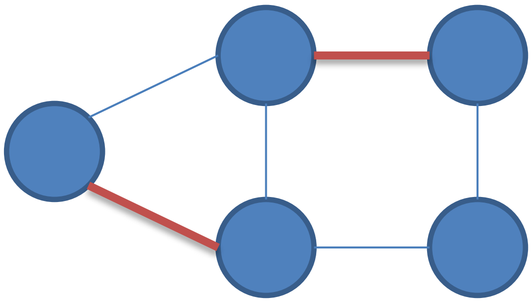


Μέγιστο Ταίριασμα

Ταίριασμα T ενός γραφήματος G υποσύνολο του γραφήματος που δεν περιέχει προσκείμενες πλευρές

- Οι κορυφές που είναι άκρα πλευρών του T είναι **ταιριασμένες μεταξύ τους ανά δύο** μέσω μίας πλευράς του T και αποκλείεται μία κορυφή να έχει πάνω από ένα ταίρι.
- Αν δεν υπάρχει ταίριασμα μεγαλύτερο από το T τότε λέμε ότι το T είναι «**μέγιστο**» (έχουν βρεθεί ταίρια για όσο το δυνατόν πιο πολλές κορυφές).
- Ένα γράφημα G μπορεί να έχει πάνω από ένα μέγιστα ταιριάσματα.

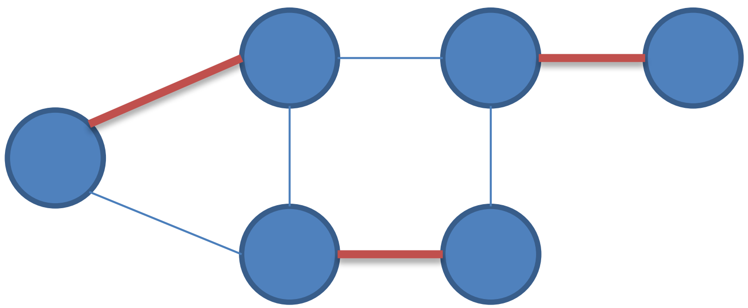




Τέλειο Ταίριασμα

Ταίριασμα Τ ενός γραφήματος G υποσύνολο του γραφήματος που δεν περιέχει προσκείμενες πλευρές

- Οι κορυφές που είναι άκρα πλευρών του Τ είναι **ταιριασμένες μεταξύ τους ανά δύο** μέσω μίας πλευράς του Τ και αποκλείεται μία κορυφή να έχει πάνω από ένα ταίρι.
- Αν δεν υπάρχει ταίριασμα μεγαλύτερο από το Τ τότε λέμε ότι το Τ είναι «**μέγιστο**» (έχουν βρεθεί ταίρια για όσο το δυνατόν πιο πολλές κορυφές).
- Ένα γράφημα G μπορεί να έχει πάνω από ένα μέγιστα ταιριάσματα.
- Αν έχουν ταιριάξει όλες οι κορυφές του G τότε το Τ λέγεται «**τέλειο**».



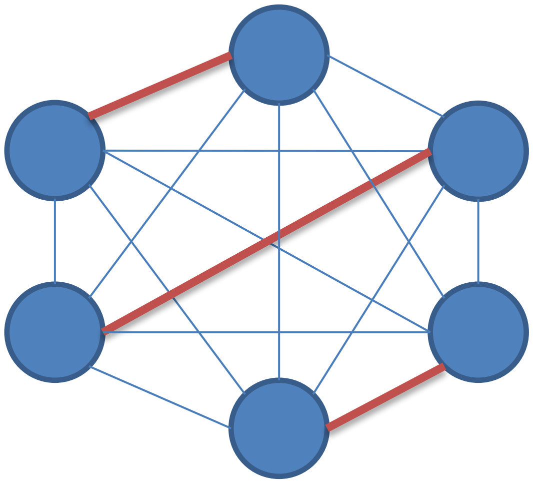
Τέλειο Ταίριασμα

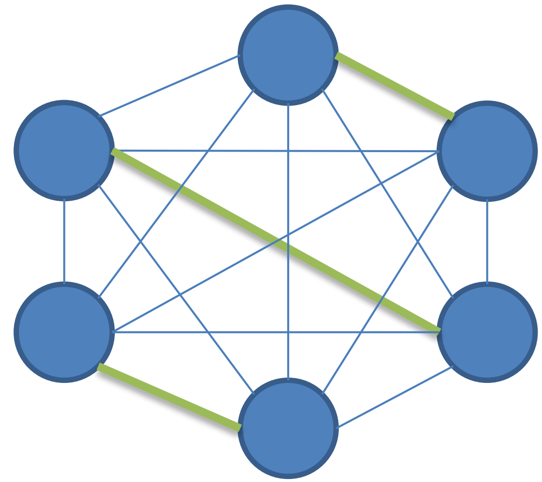
Ταίριασμα Τ ενός γραφήματος G υποσύνολο του γραφήματος που δεν περιέχει προσκείμενες πλευρές

- Οι κορυφές που είναι άκρα πλευρών του Τ είναι **ταιριασμένες μεταξύ τους ανά δύο** μέσω μίας πλευράς του Τ και αποκλείεται μία κορυφή να έχει πάνω από ένα ταίρι.
- Αν δεν υπάρχει ταίριασμα μεγαλύτερο από το Τ τότε λέμε ότι το Τ είναι «**μέγιστο**» (έχουν βρεθεί ταίρια για όσο το δυνατόν πιο πολλές κορυφές).
- Ένα γράφημα G μπορεί να έχει πάνω από ένα μέγιστα ταιριάσματα.
- Αν έχουν ταιριάξει όλες οι κορυφές του G τότε το Τ λέγεται «**τέλειο**».
- Ένα γράφημα με μονό πλήθος κορυφών αποκλείεται να έχει τέλειο ταίριασμα.

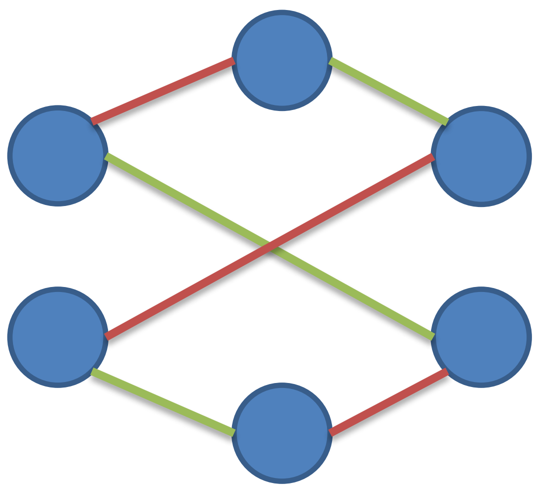
Ταίριασμα - Ιδιότητες

- Έστω Τ και Τ’ δύο ταιριάσματα του γραφήματος G





- Έστω $G_1 = (V, E_1)$, όπου E_1 η συμμετρική διαφορά των Τ και Τ’



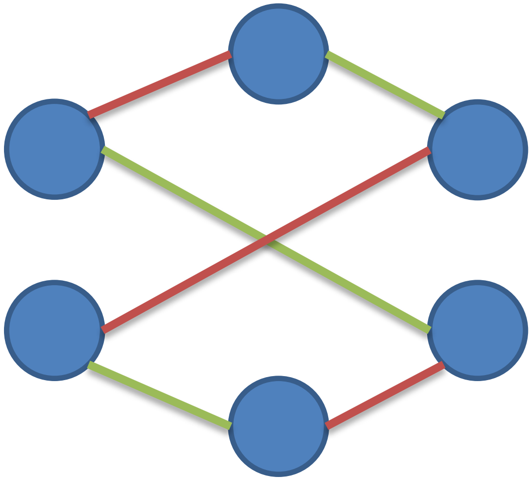
Ισοδυναμεί με την πράξη XOR

Ταίριασμα - Ιδιότητες

Για το γράφημα G_1 ισχύει ότι:

1. Δύο πλευρές που ανήκουν στο ίδιο ταίριασμα αποκλείεται να συντρέχουν στην ίδια κορυφή.

Από ορισμό ταιριάσματος

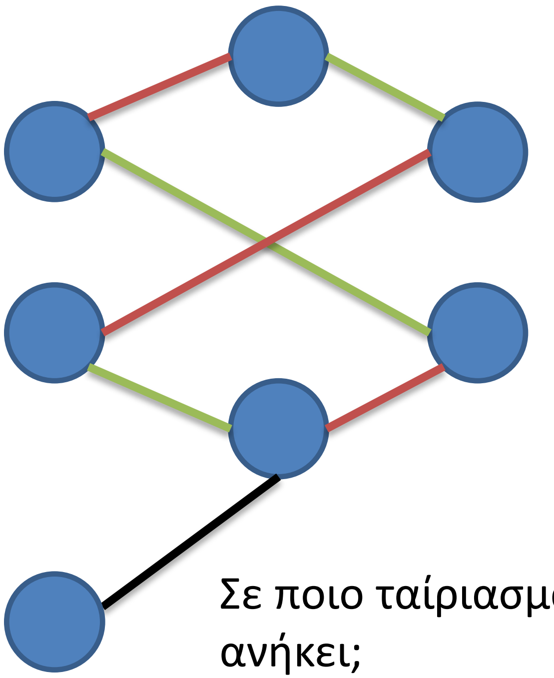


Ταίριασμα - Ιδιότητες

Για το γράφημα G_1 ισχύει ότι:

1. Δύο πλευρές που ανήκουν στο ίδιο ταίριασμα αποκλείεται να συντρέχουν στην ίδια κορυφή.

2. Σε μία οποιαδήποτε κορυφή αποκλείεται να συντρέχουν πάνω από δύο πλευρές.



Σε ποιο ταίριασμα ανήκει;
Ιδιότητα 1

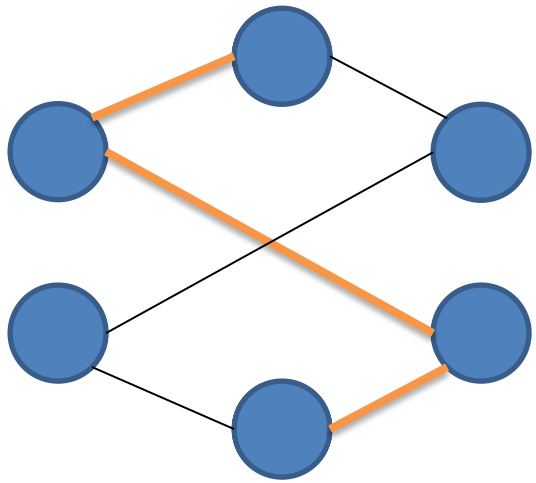
Ταίριασμα - Ιδιότητες

Για το γράφημα G_1 ισχύει ότι:

1. Δύο πλευρές που ανήκουν στο ίδιο ταίριασμα αποκλείεται να συντρέχουν στην ίδια κορυφή.

2. Σε μία οποιαδήποτε κορυφή αποκλείεται να συντρέχουν πάνω από δύο πλευρές.

3. Κάθε διαδρομή, κύκλος ή όχι, αποτελείται από πλευρές που εναλλάσσονται (στα T και T').



Από ιδιότητα 1, οι γειτονικές ακμές της πορτοκαλί διαδρομής ανήκουν σε διαφορετικά ταιριάσματα

Ταίριασμα - Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ:

i. Κάθε κύκλος του $G_1 := (V, E_1)$, αποτελείται από ζυγό πλήθος πλευρών που εναλλάσσονται στα Τ-Τ’ και Τ’-Τ.

ii. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_1 που περιέχει κύκλο, συμπίπτει με τον κύκλο.

iii. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_1 που δεν είναι κύκλος, είναι ένα από τα παρακάτω:

α) μια απομονωμένη κορυφή ή

β) μια απλή διαδρομή που, αν οι πλευρές της είναι πάνω από μία, τότε εναλλάσσονται στα Τ και Τ’.

Ταίριασμα - Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ:

i. **Κάθε κύκλος του $G_1 \coloneqq (V, E_1)$, αποτελείται από ζυγό πλήθος πλευρών που εναλλάσσονται στα Τ-Τ’ και Τ’-Τ.**

ii. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_1 που περιέχει κύκλο, συμπίπτει με τον κύκλο.

iii. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_1 που δεν είναι κύκλος, είναι ένα από τα παρακάτω:

α) μια απομονωμένη κορυφή ή

β) μια απλή διαδρομή που, αν οι πλευρές της είναι πάνω από μία, τότε εναλλάσσονται στα Τ και Τ’.

Έπεται άμεσα από την ιδιότητα 3

Ταίριασμα - Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ:

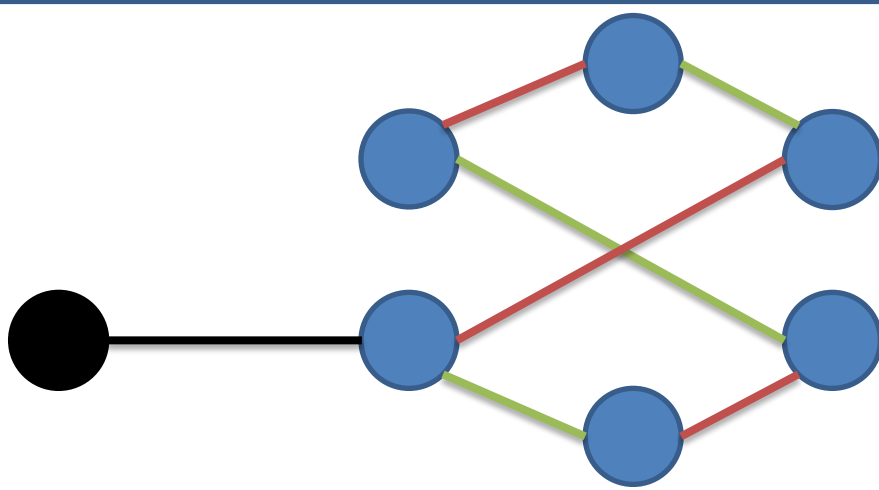
i. Κάθε κύκλος του $G_1 \coloneqq (V, E_1)$, αποτελείται από ζυγό πλήθος πλευρών που εναλλάσσονται στα T-T' και T'-T.

ii. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_1 που περιέχει κύκλο, συμπίπτει με τον κύκλο.

iii. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_1 που δεν είναι κύκλος, είναι ένα από τα παρακάτω:

α) μια απομονωμένη κορυφή ή

β) μια απλή διαδρομή που, αν οι πλευρές της είναι πάνω από μία, τότε εναλλάσσονται στα T και T'.



Η συνεκτική συνιστώσα του G_1 περιέχει κύκλο. Έστω ότι δεν συμπίπτει με τον κύκλο, άρα έχει μία ακμή επιπλέον σε κάποιο κόμβο → ΑΤΟΠΟ

Ταίριασμα - Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ:

i. Κάθε κύκλος του $G_1 := (V, E_1)$, αποτελείται από ζυγό πλήθος πλευρών που εναλλάσσονται στα T-T' και T'-T.

ii. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_1 που περιέχει κύκλο, συμπίπτει με τον κύκλο.

iii. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του G_1 που δεν είναι κύκλος, είναι ένα από τα παρακάτω:

α) μια απομονωμένη κορυφή ή

β) μια απλή διαδρομή που, αν οι πλευρές της είναι πάνω από μία, τότε εναλλάσσονται στα T και T'.

Έστω ότι η συνεκτική συνιστώσα του G_1 δεν είναι απομονωμένη κορυφή ή αποτελείται από μία μόνο πλευρά.

Από συνεκτικότητα, υπάρχει Διαδρομή που περνά από όλες τις κορυφές.

Η Διαδρομή αυτή είναι απλή, γιατί αν ήταν κύκλος τότε και η συνεκτική συνιστώσα θα ήταν κύκλος από ii.

Από ιδιότητα 3, οι πλευρές της Δ εναλλάσσονται.

Επαυξημένη Διαδρομή

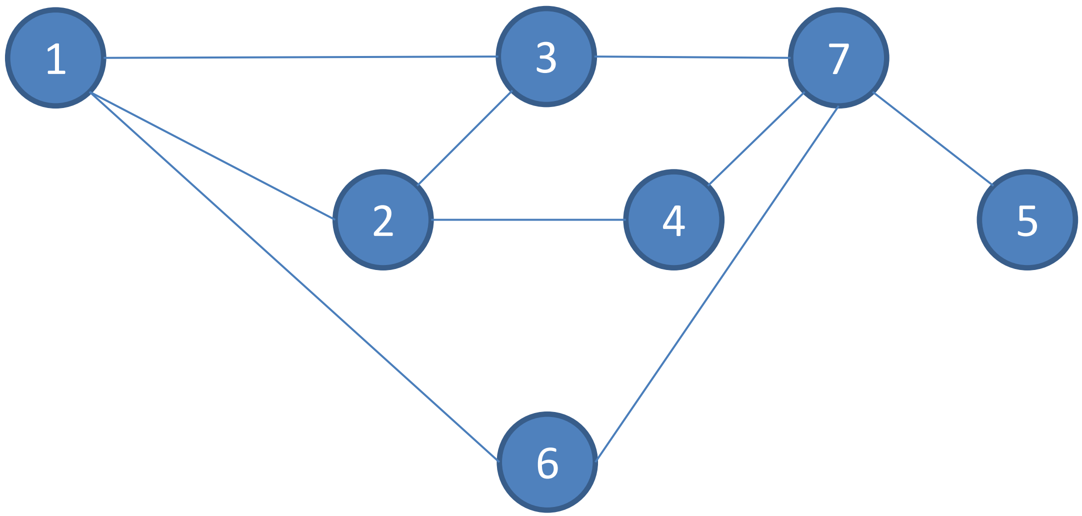
Θεωρούμε ταίριασμα Τ στο G.

Αν υπάρχουν δύο διαφορετικές κορυφές στο G που δεν είναι ταιριασμένες από το Τ και αν υπάρχει διαδρομή που τις συνδέει, με πλευρές που εναλλάσσονται (εντός και εκτός του Τ) τότε λέμε ότι υπάρχει «**επαυξημένη διαδρομή (Ε.Δ.) στο G, σε σχέση με το Τ**».

Προφανώς, η Ε.Δ. αρχίζει και τελειώνει με πλευρές εκτός του Τ.

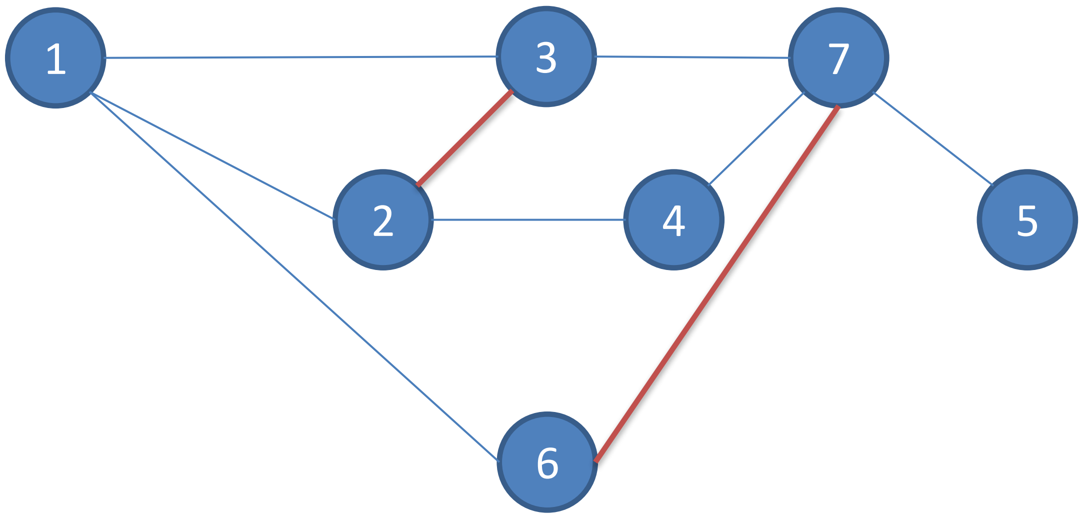
- Δ(Τ) το σύνολο των πλευρών μιας Ε.Δ. στο G, σε σχέση με το Τ. Ισχύει ότι:
  1. Το πλήθος των πλευρών του Δ(Τ) είναι μονός αριθμός
  2. Το Δ(Τ)-Τ έχει μία πλευρά παραπάνω από το Δ(Τ)∩Τ

Επαυξημένη Διαδρομή-Παράδειγμα



Γράφημα G

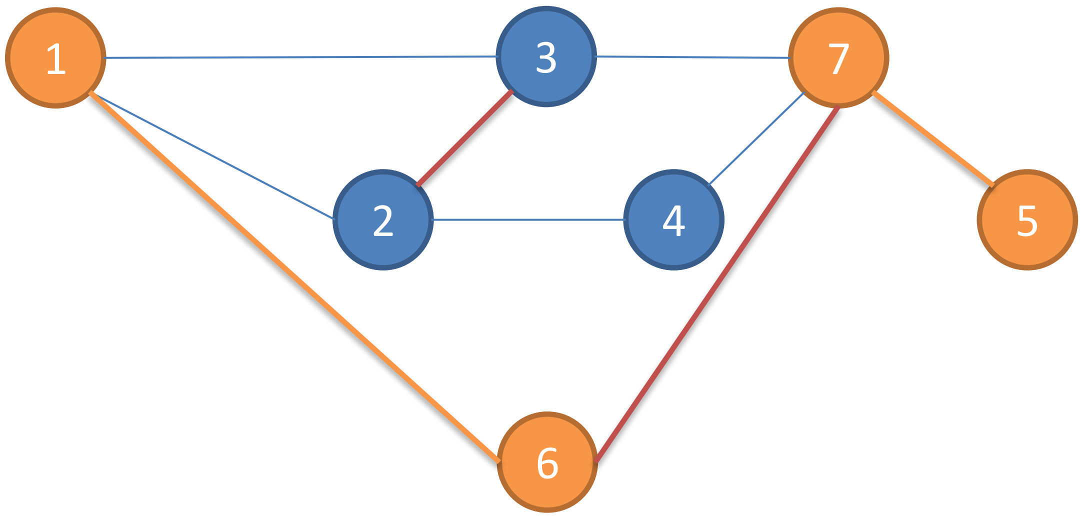
Επαυξημένη Διαδρομή-Παράδειγμα



Ταίριασμα T γραφήματος G

Οι κορυφές 1 και 5 δεν είναι ταιριασμένες.

Επαυξημένη Διαδρομή-Παράδειγμα

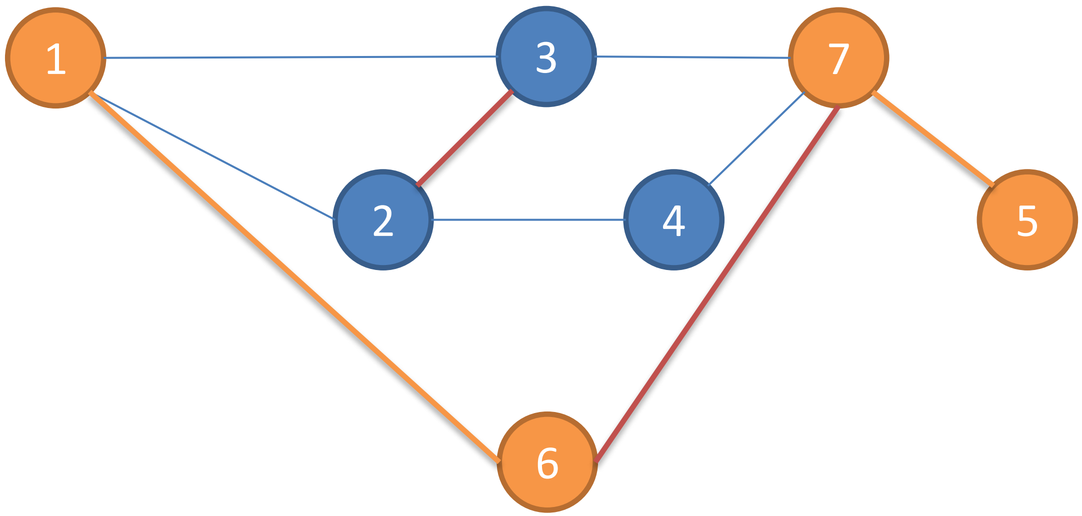


Επαυξημένη διαδρομή Ε.Δ. στο G, σε σχέση με το T

Όντως ισχύουν ότι:

i. Το πλήθος των πλευρών του Δ(T) είναι μονός αριθμός
ii. Το Δ(T)-T έχει μία πλευρά παραπάνω από το Δ(T)∩T

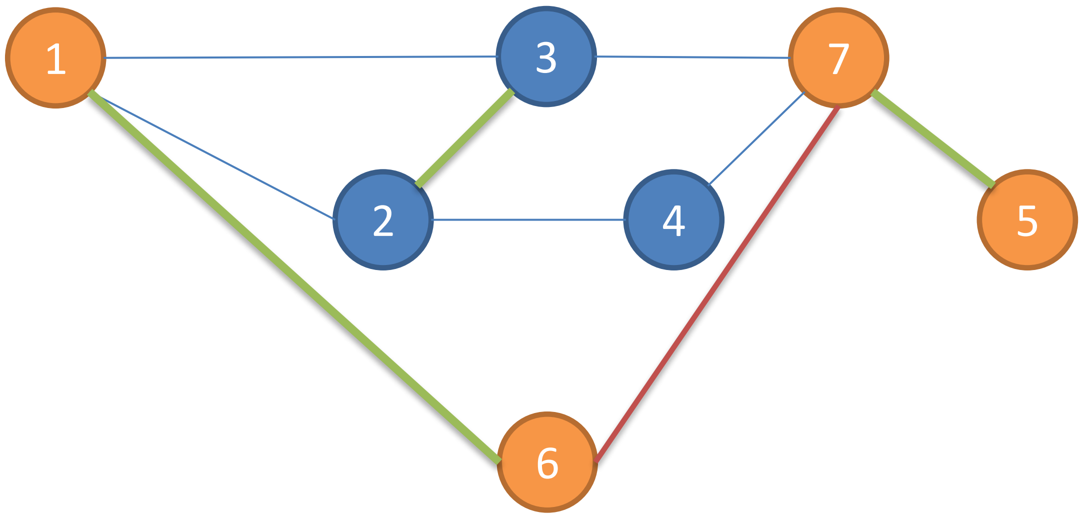
Επαυξημένη Διαδρομή-Λήμμα



Επαυξημένη διαδρομή Ε.Δ. στο G, σε σχέση με το T

Λήμμα:
Αν υπάρχει Ε.Δ. στο G, σε σχέση με ένα ταίριασμα T του G, τότε το σύνολο T'=T⊕Δ(T) είναι επίσης ένα ταίριασμα του G, που έχει πλήθος πλευρών κατά ένα περισσότερο από το T.

Επαυξημένη Διαδρομή-Λήμμα



Νέο ταίριασμα Τ’

Παρατηρούμε ότι για κάθε ταίριασμα Τ, εφόσον μπορούμε να βρούμε μια Ε.Δ. στο G σε σχέση με το Τ, μπορούμε να φτιάξουμε και μεγαλύτερο ταίριασμα Τ’.

Λήμμα:
Αν υπάρχει Ε.Δ. στο G, σε σχέση με ένα ταίριασμα Τ του G, τότε το σύνολο Τ’=Τ⊕Δ(Τ) είναι επίσης ένα ταίριασμα του G, που έχει πλήθος πλευρών κατά ένα περισσότερο από το Τ.

Επαυξημένη Διαδρομή-Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ:
Ένα ταίριασμα T δεν είναι μέγιστο $\leftrightarrow$ Υπάρχει Ε.Δ. στο G, σε σχέση με το T.

- Ένας αλγόριθμος υπολογισμού μέγιστου ταιριάσματος θα μπορούσε να ξεκινά με ένα τυχαίο ταίριασμα T (έστω και το κενό T) και να το μετέτρεπε σε μεγαλύτερο T’, βρίσκοντας μια Ε.Δ. και με T’=T⨁Δ(T)

- Πρόβλημα εύρεσης Ε.Δ.: παρόμοιο τρόπο με ΑΠΒ (υπερπολυωνυμικός αλγόριθμος- απλούστευση για τα διμερή γραφήματα όμως)

- Διμερές γράφημα: Οι κορυφές του μπορούν να χωριστούν σε δύο μη κενά σύνολα A και B=V-A, με την ιδιότητα ότι όλες οι πλευρές του γραφήματος συνδέουν κορυφές μεταξύ του A και B. Αν δηλαδή $e_{ij} \in E$ τότε αποκλείεται να είναι και οι δύο κορυφές V_i και V_j μέσα στο ίδιο σύνολο A ή B.

Αλγόριθμος μέγιστου ταιριάσματος σε διμερή γραφήματα

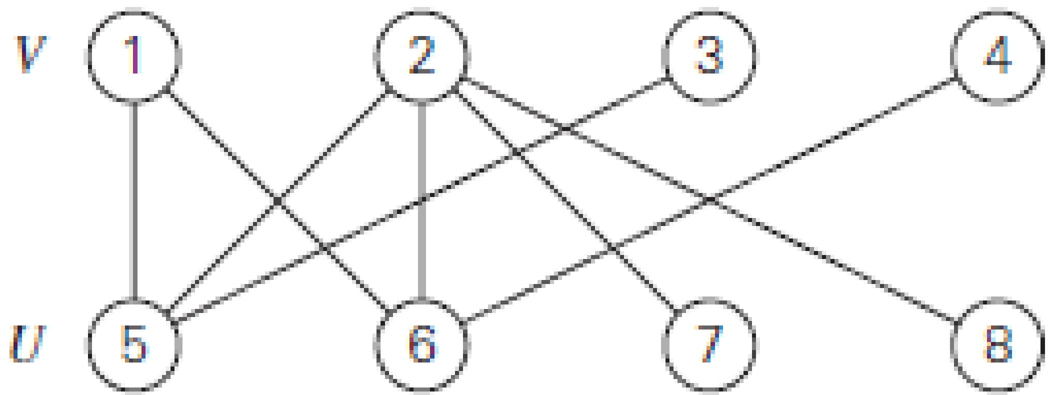
- Έστω T ένα γνωστό ταίριασμα σε ένα διμερές γράφημα G.

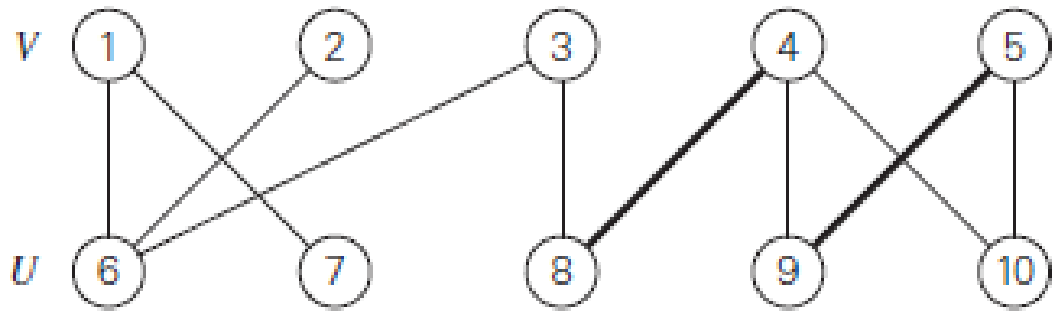
- Εισάγουμε διευθύνσεις στα τόξα e_{ij} του G δημιουργώντας ένα διευθυνόμενο γράφημα G', με τον εξής κανόνα:
  - Ας είναι e_{ij} ένα τόξο του G και έστω ότι από τις κορυφές V_i και V_j που συνδέει, αυτή που ανήκει στο A είναι η V_i, οπότε η V_j ανήκει στο B.
  - Αν το τόξο ανήκει στο T ορίζουμε ως διεύθυνση του τόξου αυτήν από τη V_i προς τη V_j, αλλιώς ορίζουμε την αντίθετή της.

- Για να υπάρχει Ε.Δ. πρέπει να υπάρχει διαδρομή στο G' μεταξύ δύο αταίριαστων κορυφών.

- ❑ Με εφαρμογή του ΑΠΒ (ή του ΑΠΠ, ή άλλου αντίστοιχου αλγορίθμου) θα ανακαλύψει τη διαδρομή αυτή σε χρόνο $\mathbf{O}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m})$.
- ❑ Αν αυτό χρειαστεί για κάθε κορυφή του G→ $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}))$.
- ❑ Βελτίωση σε $\boldsymbol{O}(\sqrt{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}))$.

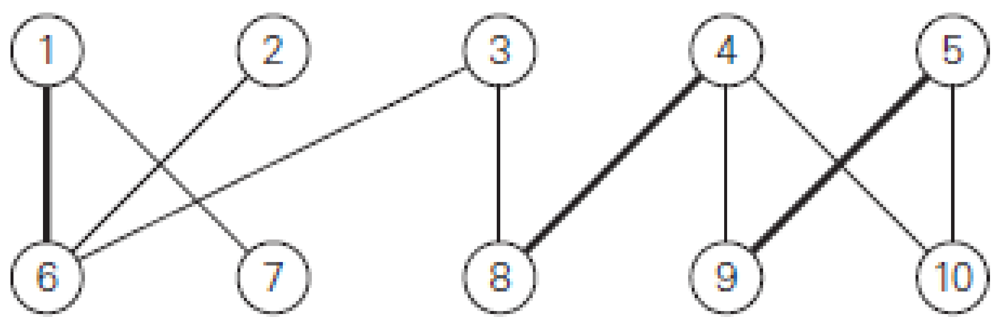
Παράδειγμα





(a)

Augmenting path: 1, 6



(b)

Augmenting path: 2, 6, 1, 7