Άσκηση 1

Δίνεται ένα γράφημα G και ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο T. Υποθέτουμε ότι μειώνεται το κόστος μιας ακμής του T. Δείξτε ότι το T παραμένει ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G.

Ελάχιστο γεννητικό δέντρο

- Δεδομένου ενός συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$ με θετικά κόστη ακμών c_e, ένα ΕΓΔ είναι ένα υποσύνολο των ακμών $T \subseteq E$ τέτοιο ώστε το T να είναι ένα γεννητικό δέντρο του οποίου το άθροισμα των κοστών των ακμών είναι ελάχιστο.

- Δίνεται ένα γράφημα G και ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο T. Υποθέτουμε ότι μειώνεται το κόστος μιας ακμής του T. Παραμένει το T ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G;

Ελάχιστο γεννητικό δέντρο

- Έστω $w(T)$ το αρχικό βάρος του ΕΓΔ και $w'(T)$ το τελικό βάρος του. Ισχύει ότι:

$$w(T) = \sum_{(x,y)\in T} w(x,y)$$

Και

$$w'(T) = w(T) - k$$

- Έστω T' ένα τυχαίο γεννητικό δέντρο του G, τέτοιο ώστε: $\mathrm{w}(T) \leq w(T')$
  - Αν η ακμή της οποίας το κόστος μειώνεται δεν ανήκει στο T' τότε:
    $$w'(T') = w(T') \geq w(T) > w'(T)$$
  - Αν η ακμή της οποίας το κόστος μειώνεται ανήκει στο T' τότε:
    $$w'(T') = w(T') - \mathrm{k} \geq w(T) - k = w'(T)$$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\mathrm{w}'(T) \leq w'(T')$ και συνεπώς το T παραμένει ΕΓΔ.

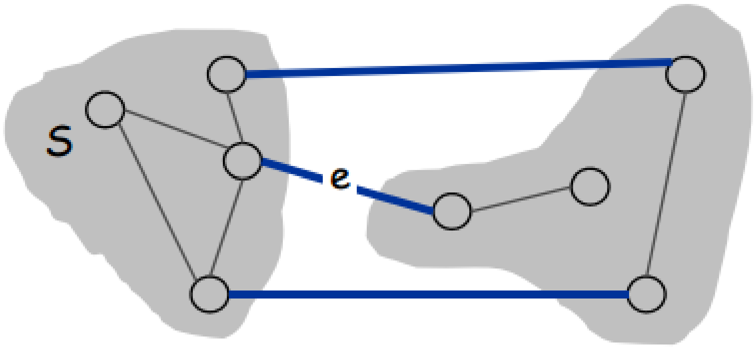
Άσκηση 2

Έστω συνεκτικό γράφημα G, με n κορυφές, m ακμές και με διαφορετικά κόστη για κάθε ακμή. Ορίζουμε συγκεκριμένη ακμή e του G. Περιγράψτε ένα αλγόριθμο που αποφαίνεται αν η ακμή e περιέχεται σε κάποιο ελάχιστο γεννητικό δέντρου του G σε χρόνο $O(m+n)$.

Άσκηση 2

- Υπάρχουν κανόνες στους οποίους μπορούμε να βασιστούμε για να αποφασίσουμε για το αν μία ακμή συμπεριλαμβάνεται ή όχι σε ένα ΕΓΔ;

1. Ιδιότητα Αποκοπής (Cut Property): μία ακμή e συμπεριλαμβάνεται σε κάθε ΕΓΔ όταν είναι η ακμή με το μικρότερο κόστος προκειμένου να μεταβούμε από ένα σύνολο S στο συμπληρωματικό του $V - S$.

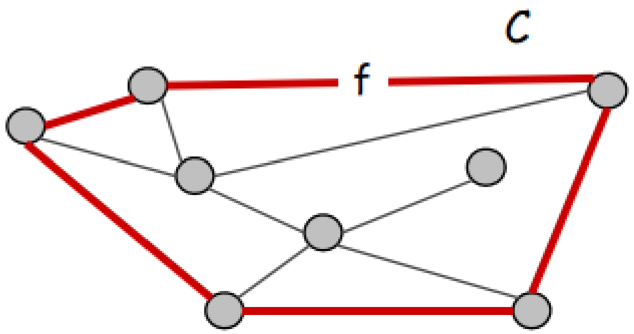


Η ακμή e συμπεριλαμβάνεται σε κάθε ΕΓΔ, εφόσον έχει μικρότερο κόστος από τις άλλες 2 μπλε ακμές.

Άσκηση 2

- Υπάρχουν κανόνες στους οποίους μπορούμε να βασιστούμε για να αποφασίσουμε για το αν μία ακμή συμπεριλαμβάνεται ή όχι σε ένα ΕΓΔ;

2. Ιδιότητα Κύκλου (Cycle Property): μια ακμή e δεν συμπεριλαμβάνεται σε κανένα ΕΓΔ αν είναι η ακμή με το μεγαλύτερο κόστος ενός κύκλου C.



Η ακμή f δεν συμπεριλαμβάνεται σε κανένα ΕΓΔ αν έχει μεγαλύτερο κόστος από όλες τις άλλες κόκκινες ακμές του κύκλου C.

Άσκηση 2

❖Συνδυασμός των 2 ιδιοτήτων:

Μία ακμή $e = (v, w)$ δεν ανήκει σε κανένα ΕΓΔ του G αν και μόνο αν οι κόμβοι v και w μπορούν να συνδεθούν μέσω ενός μονοπατιού που αποτελείται μόνο από ακμές οι οποίες έχουν μικρότερο κόστος από την e.

Απόδειξη

<u>Ευθύ</u>: Αρχικά, υποθέτουμε ότι P είναι ένα μονοπάτι από τον κόμβο v στον w το οποίο αποτελείται μόνο από ακμές μικρότερου κόστους σε σχέση με την ακμή e. Αν προσθέσουμε την ακμή e στο P, σχηματίζεται κύκλος στον οποίο η e είναι η ακμή με το μεγαλύτερο κόστος. Έτσι, σύμφωνα με την ιδιότητα του Κύκλου, η e δεν ανήκει σε κανένα ΕΓΔ του G.

Άσκηση 2

Απόδειξη

<u>Αντίστροφο</u>: Υποθέτουμε ότι οι κόμβοι v και w δεν μπορούν να συνδεθούν μέσω ενός μονοπατιού που αποτελείται μόνο από ακμές με μικρότερο κόστος από την e. Αν εντοπίσουμε ένα σύνολο S για το οποίο η e είναι η ακμή με το μικρότερο κόστος, η οποία έχει το ένα άκρο της στο σύνολο S και το άλλο άκρο της στο συμπληρωματικό σύνολο $V - S$, τότε σύμφωνα με την ιδιότητα Αποκοπής η e ανήκει σε κάθε ΕΓΔ.

Το σύνολο S θα αποτελείται από όλους τους κόμβους οι οποίοι μπορούν να προσεγγιστούν από τον κόμβο v. Σύμφωνα με την υπόθεση που κάναμε αρχικά, $w \in V - S$. Επίσης από τον ορισμό του S, δεν υπάρχει ακμή $f = (x, y)$ με μικρότερο κόστος από την e, και η οποία έχει το άκρο x στο S και το άκρο y στο $V - S$. Αν υπήρχε τέτοια ακμή f, τότε επειδή ο κόμβος x μπορεί να προσεγγιστεί από v μέσω μονοπατιού που αποτελείται μόνο από ακμές με μικρότερο κόστος από την e, τότε και ο κόμβος y θα ήταν προσεγγίσιμος από τον v.

Συνεπώς, η e είναι η ακμή με το μικρότερο κόστος, η οποία έχει το ένα άκρο της στο S και το άλλο στο $V - S$.

Άσκηση 2

❖ Αλγόριθμος:

1. Κατασκευάζουμε ένα γράφημα G' διαγράφοντας όλες τις ακμές που έχουν βάρος μεγαλύτερο από $w(e)$ (καθώς και την ίδια την e).
2. Ελέγχουμε αν υπάρχει μονοπάτι από τον v στον w στο γράφημα G'. ΠΩΣ;

ΑκΠ

1. Σύμφωνα με τον κανόνα που διατυπώσαμε, η ακμή e ανήκει στο ΕΓΔ αν και μόνο αν δεν υπάρχει τέτοιο μονοπάτι.

Χρονική πολυπλοκότητα:

B1: $O(m+n)$

B2: $O(m+n)$

Συνολικά: $\mathbf{O}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$

Άσκηση 3

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες. Σε περίπτωση που είναι σωστή, δώστε μία σύντομη εξήγηση. Αν είναι λανθασμένη, δικαιολογείστε την απάντηση σας δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

α. Έστω γράφημα G, με διαφορετικά θετικά κόστη για κάθε ακμή. Έστω T ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G. Αντικαθιστούμε το κόστος της κάθε ακμής c_e με το τετράγωνό του c_e^2.
Σωστό ή Λάθος; Το T είναι ελάχιστο γεννητικό δέντρο του τροποποιημένου G.

β. Έστω κατευθυνόμενο γράφημα G, με διαφορετικά θετικά κόστη για κάθε ακμή. Έστω μονοπάτι P το οποίο είναι το ελάχιστο μονοπάτι από τον κόμβο s στον κόμβο t. Αντικαθιστούμε το κόστος της κάθε ακμής c_e με το τετράγωνό του c_e^2.
Σωστό ή Λάθος; Το P είναι ελάχιστο μονοπάτι από τον κόμβο s στον κόμβο t του τροποποιημένου G.

Άσκηση 3

α. Έστω γράφημα G, με διαφορετικά θετικά κόστη για κάθε ακμή. Έστω T ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G.

Αντικαθιστούμε το κόστος της κάθε ακμής c_e με το τετράγωνό του ${c_e}^2$.

Το T είναι ελάχιστο γεννητικό δέντρο του τροποποιημένου G;

Απάντηση:

Ναι, Σωστό. Διότι δεν θα αλλάξει η σειρά με την οποία ο αλγόριθμος Kruskal εξετάζει τις ακμές (η ταξινόμηση των ακμών κατά αύξουσα σειρά δεν αλλάζει) και έτσι το T παραμένει ΕΓΔ.

Άσκηση 3

β. Έστω κατευθυνόμενο γράφημα G, με διαφορετικά θετικά κόστη για κάθε ακμή. Έστω μονοπάτι P το οποίο είναι το ελάχιστο μονοπάτι από τον κόμβο s στον κόμβο t. Αντικαθιστούμε το κόστος της κάθε ακμής c_e με το τετράγωνό του ${c_e}^2$.

Το P είναι ελάχιστο μονοπάτι από τον κόμβο s στον κόμβο t του τροποποιημένου G;

Απάντηση:

Όχι, Λάθος.

Άσκηση 4

Βασική ιδέα του προβλήματος της εύρεσης του ελάχιστου γεννητικού δέντρου είναι η εύρεση ενός δικτύου ενός συνόλου κόμβων με ελάχιστο συνολικό κόστος. Θέτουμε ακόμα ένα στόχο, να σχεδιάσουμε ένα δίκτυο για το οποίο ισχύει ότι η ακμή με το μεγαλύτερο κόστος έχει τη δυνατή μικρότερη τιμή.

Συγκεκριμένα, έστω συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές, m ακμές και με διαφορετικά θετικά κόστη για κάθε ακμή. Έστω $T = (V, E')$ γεννητικό δέντρο του G και ορίζουμε ως *ακμή συμφόρησης* του T την ακμή με το μεγαλύτερο κόστος.

Ένα γεννητικό δέντρο T του G είναι *γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης*, αν δεν υπάρχει άλλο γεννητικό δέντρο T' του G με μικρότερη ακμή συμφόρησης.

Είναι κάθε γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης του G ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G;

Είναι κάθε ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης του G;

Γεννητικό Δέντρο Ελάχιστης Συμφόρησης

- **Γεννητικό Δέντρο Ελάχιστης Συμφόρησης**: έστω συνεκτικό γράφημα G=(V,E) με n κορυφές, m ακμές και με διαφορετικά θετικά κόστη για κάθε ακμή. Έστω T=(V,E') γεννητικό δέντρο του G και ορίζουμε ως **ακμή συμφόρησης** του T την ακμή με το μεγαλύτερο κόστος.

Ένα γεννητικό δέντρο T του G είναι γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης, αν δεν υπάρχει άλλο γεννητικό δέντρο T' του G με μικρότερη ακμή συμφόρησης.

Γεννητικό Δέντρο Ελάχιστης Συμφόρησης

α. Είναι κάθε γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης του G ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G;

Απάντηση:

ΌΧΙ. Έστω $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ οι κόμβοι του G, και υπάρχουν οι ακμές οι οποίες συνδέουν 2 οποιουσδήποτε κόμβους του G. Το κόστος μιας ακμής από τον v_i στον v_j ισούται με $i + j$. Τότε κάθε δέντρο θα έχει ακμή συμφόρησης με κόστος τουλάχιστον 5. Επομένως το δέντρο που αποτελείται από το μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους v_3, v_2, v_1, v_4 είναι ένα γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης. Είναι όμως και ΕΓΔ;

Όχι, διότι το συνολικό του βάρος είναι μεγαλύτερο από το δέντρο που αποτελείται από τις ακμές που συνδέουν τον κόμβο v_1 με όλους τους υπόλοιπους κόμβους.

Γεννητικό Δέντρο Ελάχιστης Συμφόρησης

β. Είναι κάθε ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης του G;

Απάντηση:

ΝΑΙ. Έστω T ΕΓΔ του G, και T' ένα γεννητικό δέντρο με ακμή συμφόρησης με μικρότερο κόστος. Συνεπώς το T περιέχει μία ακμή που έχει μεγαλύτερο κόστος από οποιαδήποτε ακμή του T'. Αν προσθέσουμε την ακμή e στο T' σχηματίζεται ένας κύκλος C στον οποίο η ακμή με το μεγαλύτερο κόστος είναι η e.

Σύμφωνα με την ιδιότητα του Κύκλου, η ακμή e δεν ανήκει σε κανένα ΕΓΔ, και επομένως η αρχική υπόθεση είναι άτοπη.

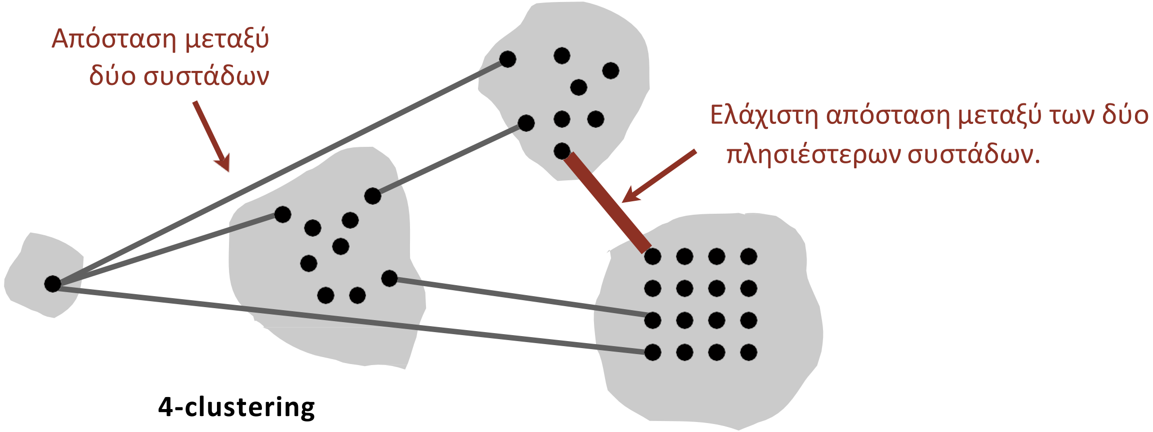
Δημιουργία συστάδων μέγιστου διαχωρισμού (spacing)

k-clustering. Διαίρεσε τα αντικείμενα σε k μη κενές ομάδες.
Συνάρτηση απόστασης. Αριθμητική τιμή η οποία προσδιορίζει την «εγγύτητα» δύο αντικειμένων.

- $d(p_i, p_j) = 0$ ανν $p_i = p_j$
- $d(p_i, p_j) \geq 0$
- $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i)$

Διαχωρισμός. Ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων που ανήκουν σε διαφορετικές συστάδες.

Στόχος. Δοθέντος ενός ακεραίου k, βρες k συστάδες μέγιστου διαχωρισμού.

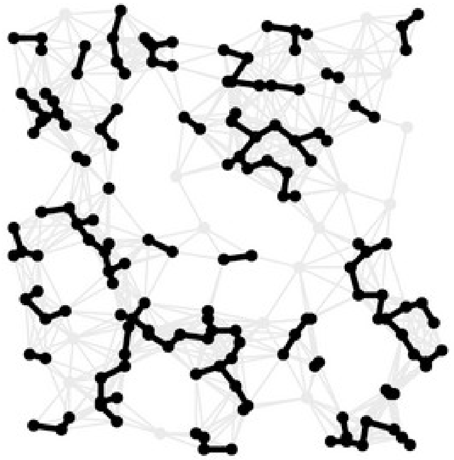


4-clustering

Άπληστος αλγόριθμος δημιουργίας συστάδων

Γνωστός αλγόριθμος στη βιβλιογραφία για single-linkage k-clustering:

- Σχημάτισε ένα γράφημα πάνω στο σύνολο των κόμβων U, που αντιστοιχεί σε n συστάδες.
- Βρες το πλησιέστερο ζεύγος αντικειμένων τέτοιο ώστε κάθε αντικείμενο είναι σε διαφορετική συστάδα, και πρόσθεσε μία ακμή μεταξύ τους.
- Επανέλαβε $n - k$ φορές (μέχρι να υπάρχουν ακριβώς k συστάδες).



Βασική παρατήρηση. Αυτή η διαδικασία είναι ακριβώς ο αλγόριθμος του Kruskal (εκτός του ότι σταματούμε όταν υπάρχουν k συνεκτικές συνιστώσες).

Εναλλακτικά. Βρες ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο και αφαίρεσε τις $k - 1$ μακρύτερες ακμές.

Άπληστος αλγόριθμος δημιουργίας συστάδων: ανάλυση

Θεώρημα. Έστω C^* το σύνολο των συστάδων $C^*_1, \ldots, C^*_k$ που σχηματίζονται με τη αφαίρεση των $k - 1$ μακρύτερων ακμών σε ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο.

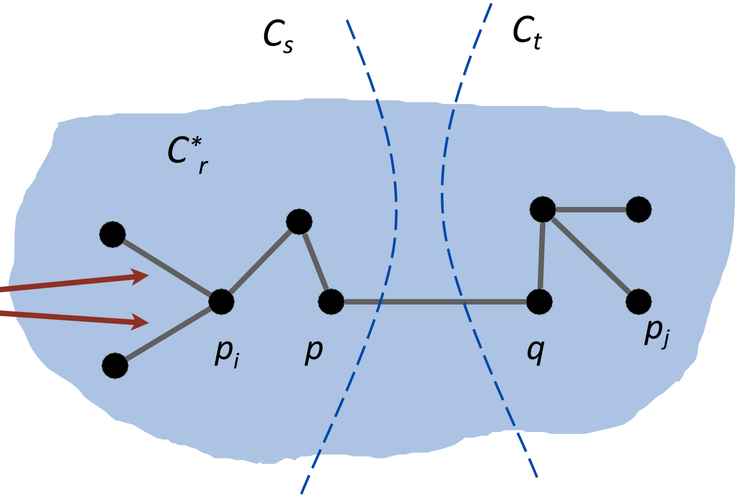
Τότε, C^* είναι ένα σύνολο k συστάδων μέγιστου διαχωρισμού.

Pf. Έστω C οποιαδήποτε άλλη ομάδα k συστάδων $C_1, \ldots, C_k$.

- Έστω p_i και p_j είναι στην ίδια συστάδα στο C^*, έστω C^*_r, αλλά σε διαφορετικές συστάδες στη C, έστω C_s και C_t.
- Κάποια ακμή (p, q) στο μονοπάτι $p_i - p_j$ στο C^*_r διασχίζει δύο διαφορετικές συστάδες στο C.
- Διαχωρισμός του C^* = μήκος d^* της $(k - 1)$-ης μακρύτερης ακμές στο ελάχιστο γεννητικό δέντρο. Η ακμή (p, q) έχει μήκος $\leq d^*$ αφού προστέθηκε από τον Kruskal.
- Ο διαχωρισμός του C είναι $\leq d^*$ αφού τα p και q είναι σε διαφορετικές συστάδες. ▪

Αυτή είναι η ακμή που θα είχε προσθέσει ο Kruskal αν δεν τον είχαμε τερματίσει.

Οι ακμές που απομένουν μετά τη διαγραφή των $k-1$ μακρύτερων ακμών από το ελάχιστο γεννητικό δέντρο.



Άσκηση 5

Έστω ότι σχεδιάζετε μία διαδρομή στον βόρειο Καναδά. Έστω ότι έχετε σχεδιάσει ένα κατευθυνόμενο γράφημα, οι κόμβοι του οποίου αναπαριστούν τους ενδιάμεσους προορισμούς και οι ακμές τους δρόμους που τους συνδέουν.

Έχετε βρει έναν ιστότοπο που παρέχει μία ακριβή πρόβλεψη για το πόσο γρήγορα μπορείτε να ταξιδέψετε σε κάθε δρόμο. Βέβαια η ταχύτητα σε κάθε δρόμο εξαρτάται από τη χρονική περίοδο του ταξιδιού. Συγκεκριμένα ο ιστότοπος σας παρέχει πληροφορίες της εξής μορφής:

έστω ακμή $e = (u, w)$ που συνδέει δύο κόμβους u και w. Δοθούσης μιας συγκεκριμένης χρονικής στιγμής αναχώρησης t από την αφετηρία u, ο ιστότοπος επιστρέφει μια εκτίμηση $f_e(t)$ της χρονικής στιγμής άφιξης στον προορισμό. Ο ιστότοπος εγγυάται ότι $f_e(t) \geq t$ για κάθε e, t και καθώς επίσης ότι η $f_e(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το χρόνο t. Προτείνετε ένα αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την εύρεση της βέλτιστης διαδρομής από ένα κόμβο αφετηρίας στον κόμβο προορισμό. Υποθέστε ότι ξεκινάτε το ταξίδι τη χρονική στιγμή 0.

Άσκηση 5

- Αν ο χρόνος διάσχισης κάθε ακμής δεν εξαρτιόταν από την ώρα αναχώρησης τότε το πρόβλημα θα ήταν ισοδύναμο με το πρόβλημα της εύρεσης του συντομότερου μονοπατιού.

- Αλγόριθμος: Τροποποίηση του αλγορίθμου Dijkstra.

- Σε κάθε κόμβο που εξερευνούμε πέρα από το συντομότερο χρόνο άφιξης στον κόμβο αυτό θα κρατείται και ο πρόγονος του (ο κόμβος από τον οποίο φτάνουμε στο συντομότερο χρόνο).

Άσκηση 5

Αλγόριθμος

```
Let S be the set of explored nodes.
  For each u ∈ S, we store the earliest time d(u) when we can arrive
at u
  and the last site r(u) before u on the fastest path to u
Initially S = {s} and d(s) = 0.
While S ≠ V
    Select a node v ∉ S with at least one edge from S for which
      d'(v) = min_{e=(u,v):u∈S} f_e(d(u)) is as small as possible.
    Add v to S and define d(v) = d'(v) and r(v) = u.
EndWhile
```

Άσκηση 5

- Χρονική πολυπλοκότητα αλγορίθμου:

Για την υλοποίηση του αλγορίθμου θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μία ουρά προτεραιότητας.

Κάθε φορά που ένας κόμβος u εξερευνάται, ελέγχουμε όλες τις γειτονικές ακμές (u, w) και ενημερώνουμε το χρόνο στους γειτονικούς κόμβους με βάση το χρόνο αναχώρησης από τον u.

Η ενημέρωση αυτή χρειάζεται χρόνο $O(logn)$ για κάθε γειτονική ακμή και συνολική πολυπλοκότητα είναι $O(mlogn)$, όπου n ο αριθμός των κόμβων και m ο αριθμός των ακμών.

Άσκηση 8

Έστω συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$. Κάθε ακμή e έχει ένα χρονικά μεταβαλλόμενο κόστος, που δίνεται από τη συνάρτηση $f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Έτσι, την χρονική στιμή t η ακμή έχει κόστος $f_e(t)$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές έχουν θετικό εύρος τιμών. Παρατηρείστε ότι το σύνολο του ακμών που αποτελούν ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο. Επίσης, το κόστος ενός ελάχιστου γεννητικού δέντρου του G μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Έστω ότι εκφράζεται από τη συνάρτηση $c_G(t)$. Προκύπτει λοιπόν το εξής πρόβλημα:
Η εύρεση της χρονικής στιγμής t, η οποία ελαχιστοποιεί το $c_G(t)$.
Υποθέστε ότι κάθε συνάρτηση f_e είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού: $f_e(t) = a_e t^2 + b_e t + c_e$ με $a_e > 0$. Περιγράψτε ένα αλγόριθμο που δέχεται ως είσοδο το γράφημα G και τις τιμές $\{(a_e, b_e, c_e) : e \in E\}$ και επιστρέφει τη χρονική στιγμή t που ελαχιστοποιεί το κόστος του ελάχιστου γεννητικού δέντρου. Ο αλγόριθμος θα πρέπει να είναι πολυωνυμικού χρόνου ως προς τον αριθμό των κόμβων και των ακμών του γραφήματος.

Άσκηση 8

- Παρατήρηση: έστω 2 διαφορετικές χρονικές στιγμές t και t’ και c_e το διατεταγμένο σύνολο των κοστών όλων των ακμών τη χρονική στιγμή t και $c_e{}'$ το διατεταγμένο σύνολο των κοστών όλων των ακμών τη χρονική στιγμή t’ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η διάταξη των ακμών παραμένει η ίδια στα 2 σύνολα.

Θα αλλάξει το ΕΓΔ τις 2 διαφορετικές χρονικές στιγμές t και t’ ;

ΌΧΙ

- Συνεπώς το ΕΓΔ αλλάζει μόνο αν προκύψει αλλαγή στη διάταξη των κοστών μεταξύ 2 ή περισσοτέρων ακμών.
- Γραφικά η αλλαγή αυτή στη διάταξη μπορεί να εντοπιστεί όταν υπάρχει σημείο τομής μεταξύ 2 γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f_{e_i} και f_{e_j}.

- Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος τομών που μπορούν να υπάρξουν μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f_{e_i} και f_{e_j};

  2 σημεία τομής, εφόσον πρόκειται για παραβολές.

  Συνολικά όμως θα έχουμε $2\binom{m}{2} \leq m^2$ το πολύ σημεία τομής μεταξύ των συναρτήσεων κόστους όλων των m ακμών.

Άσκηση 8

❖Αλγόριθμος

1. Αφού εντοπίσουμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων του κόστους, τα οποία είναι πλήθους m^2 το πολύ, χωρίζουμε τον άξονα του χρόνου σε ισάριθμα διαστήματα. Κατά τα διαστήματα αυτά το ΕΓΔ σαν σύνολο ακμών δεν αλλάζει.
2. Για κάθε χρονικό διάστημα, εφόσον η διάταξη των κοστών δεν αλλάζει μπορούμε μέσω του αλγορίθμου του Kruskal να βρούμε το ΕΓΔ, το συνολικό βάρος του οποίου θα αποτελείται από το άθροισμα των κοστών (n-1) ακμών. Θα είναι επομένως το άθροισμα (n-1) τετραγωνικών συναρτήσεων, άρα θα έχει και αυτό τη μορφή τετραγωνικής συνάρτησης. Μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης του συνολικού βάρους σε σταθερό χρόνο.
3. Τέλος, θα πρέπει να συγκρίνουμε τα ΕΓΔ που προέκυψαν από τα επιμέρους διαστήματα και να επιλέξουμε αυτό με το ελάχιστο βάρος.

Άσκηση 8

❖ Χρονική πολυπλοκότητα αλγορίθμου

B1: $O(m^2)$

B2: m^2 φορές τον αλγόριθμο του Kruskal: $O(m^2 \cdot mlogn) =$
$O(m^3 logn)$

B3: $O(m^2)$

Συνολική πολυπλοκότητα:

$$\boldsymbol{O(m^3 logn)}$$