ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ: ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^o

Ακαδημαϊκό έτος: 2014-2015
Διδάσκων: Χ. Κωνσταντόπουλος

---

1. Δίνεται ένα γράφημα G και ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο T. Υποθέτουμε ότι μειώνεται το κόστος μιας ακμής του T. Δείξτε ότι το T παραμένει ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G.

2. Έστω συνεκτικό γράφημα G, με n κορυφές, m ακμές και με διαφορετικά κόστη για κάθε ακμή. Ορίζουμε συγκεκριμένη ακμή e του G. Περιγράψτε ένα αλγόριθμο που αποφαίνεται αν η ακμή e περιέχεται σε κάποιο ελάχιστο γεννητικό δέντρου του G σε χρόνο $O(m + n)$.

3. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες. Σε περίπτωση που είναι σωστή, δώστε μία σύντομη εξήγηση. Αν είναι λανθασμένη, δικαιολογείστε την απάντηση σας δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.
α. Έστω γράφημα G, με διαφορετικά θετικά κόστη για κάθε ακμή. Έστω T ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G. Αντικαθιστούμε το κόστος της κάθε ακμής c_e με το τετράγωνό του c_e^2.
Σωστό ή Λάθος; Το T είναι ελάχιστο γεννητικό δέντρο του τροποποιημένου G.
β. Έστω κατευθυνόμενο γράφημα G, με διαφορετικά θετικά κόστη για κάθε ακμή. Έστω μονοπάτι P το οποίο είναι το ελάχιστο μονοπάτι από τον κόμβο s στον κόμβο t. Αντικαθιστούμε το κόστος της κάθε ακμής c_e με το τετράγωνό του c_e^2.
Σωστό ή Λάθος; Το P είναι ελάχιστο μονοπάτι από τον κόμβο s στον κόμβο t του τροποποιημένου G.

4. Βασική ιδέα του προβλήματος της εύρεσης του ελάχιστου γεννητικού δέντρου είναι η εύρεση ενός δικτύου ενός συνόλου κόμβων με ελάχιστο συνολικό κόστος. Θέτουμε ακόμα ένα στόχο, να σχεδιάσουμε ένα δίκτυο για το οποίο ισχύει ότι η ακμή με το μεγαλύτερο κόστος έχει τη δυνατή μικρότερη τιμή.
Συγκεκριμένα, έστω συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές, m ακμές και με διαφορετικά θετικά κόστη για κάθε ακμή. Έστω $T = (V, E')$ γεννητικό δέντρο του G και ορίζουμε ως *ακμή συμφόρησης* του T την ακμή με το μεγαλύτερο κόστος.
Ένα γεννητικό δέντρο T του G είναι *γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης*, αν δεν υπάρχει άλλο γεννητικό δέντρο T' του G με μικρότερη ακμή συμφόρησης.
Είναι κάθε γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης του G ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G;
Είναι κάθε ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G γεννητικό δέντρο ελάχιστης συμφόρησης του G;

5. Έστω ότι έχετε σχεδιάσει ένα κατευθυνόμενο γράφημα, οι κόμβοι του οποίου αναπαριστούν τους ενδιάμεσους προορισμούς και οι ακμές τους δρόμους που τους συνδέουν.
Έχετε βρει έναν ιστότοπο που παρέχει μία ακριβή πρόβλεψη για το πόσο γρήγορα μπορείτε να ταξιδέψετε σε κάθε δρόμο. Βέβαια η ταχύτητα σε κάθε δρόμο εξαρτάται από τη χρονική περίοδο του ταξιδιού. Συγκεκριμένα ο ιστότοπος σας παρέχει πληροφορίες της εξής μορφής:
έστω ακμή $e = (u, w)$ που συνδέει δύο κόμβους u και w. Δοθούσης μιας συγκεκριμένης χρονικής στιγμής αναχώρησης t από την αφετηρία u, ο ιστότοπος επιστρέφει μια εκτίμηση $f_e(t)$ της χρονικής στιγμής άφιξης στον προορισμό. Ο ιστότοπος εγγυάται ότι $f_e(t) \geq t$ για κάθε e, t και καθώς επίσης ότι η $f_e(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το χρόνο t. Προτείνετε ένα αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την εύρεση της βέλτιστης διαδρομής από ένα κόμβο αφετηρίας στον κόμβο προορισμό. Υποθέστε ότι ξεκινάτε το ταξίδι τη χρονική στιγμή 0.

6. Οι σχεδιαστές δικτύων μιας εταιρείας αντιμετωπίζουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Έστω ότι έχουν ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$, στο οποίο οι κόμβοι αναπαριστούν τις τοποθεσίες που πρέπει να επικοινωνούν. Κάθε ακμή e έχει ένα διαθέσιμο εύρος ζώνης (bandwidth) b_e.
Για κάθε ζεύγος κόμβων $u, v \in V$ πρέπει να επιλέξουν ένα μονοπάτι $u - v$ μέσω του οποίου θα επικοινωνούν. Ο ρυθμός συμφόρησης $b(P)$ του μονοπατιού P είναι το ελάχιστο εύρος ζώνης οποιασδήποτε ακμής του μονοπατιού, $b(P) = min_{e \in P} b_e$. Ο βέλτιστος εφικτός ρυθμός συμφόρησης για ένα ζεύγος

u, v στο G, είναι η μέγιστη τιμή $b(P)$ όλων των μονοπατιών P του G.
Επειδή είναι περίπλοκο να κρατούν το μονοπάτι για κάθε πιθανό ζεύγος κόμβων, κάποιος κάνει την εξής πρόταση:
Να βρούμε το γεννητικό δέντρο T του G το οποίο για κάθε ζεύγος κόμβων u, v, το μοναδικό μονοπάτι $u - v$ στο δέντρο T επιτυγχάνει το βέλτιστο ρυθμό συμφόρησης για το ζεύγος u, v στο G.
Δείξτε ότι υπάρχει τέτοιο γεννητικό δέντρο και προτείνετε αλγόριθμο για την εύρεσή του.

7. Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε μία διαδρομή σε ένα οροπέδιο. Έστω ότι υπάρχουν n προορισμοί στο οροπέδιο αυτό και το οδικό δίκτυο μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$. Το χειμώνα δεν μας απασχολεί το μήκος του δρόμου αλλά το ύψος στο οποίο βρίσκεται διότι δυσχεραίνει τη διέλευσή του.
Κάθε δρόμος, ακμή e του γραφήματος, έχει μία συγκεκριμένη τιμή a_e που καταδεικνύει το υψόμετρο του υψηλότερου σημείου του. Υποθέτουμε ότι κάθε κορυφή έχει διαφορετική τιμή a_e. Το ύψος ενός μονοπατιού στο γράφημα είναι η μέγιστη τιμή a_e από όλες τις ακμές e του μονοπατιού P. Ένα μονοπάτι μεταξύ δύο κόμβων i και j καλείται χειμερινό βέλτιστο αν επιτυγχάνει το ελάχιστο ύψος από όλα τα δυνατά μονοπάτια από το i στο j.
Πρέπει να επιλέξουμε ποιοι δρόμοι θα διατηρηθούν ανοιχτοί το χειμώνα, έτσι ώστε στο νέο συνεκτικό υπογράφημα (V, E') το ύψος του βέλτιστου χειμερινού μονοπατιού για κάθε ζεύγος i και j παραμένει το ίδιο με αυτό του πλήρους γραφήματος $G = (V, E)$. Έστω ότι το (V, E') είναι το συνεκτικό υπογράφημα ελάχιστου ύψους.
Παράλληλα θέλουμε να κρατήσουν όσο το δυνατόν λιγότερους δρόμους ανοιχτούς. Έτσι καταλήγουμε στις εξής υποθέσεις:
α. Το ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G, λαμβάνοτας υπόψιν τα βάρη των ακμών a_e, είναι ένα συνεκτικό υπογράφημα ελάχιστου ύψους.
β. Ένα υπογράφημα (V, E') είναι ένα συνεκτικό υπογράφημα ελάχιστου ύψους αν και μόνο αν περιέχει τις ακμές του ελάχιστου γεννητικού δέντρου.
Ελέγξτε αν ισχύουν οι υποθέσεις.

8. Έστω συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$. Κάθε ακμή e έχει ένα χρονικά μεταβαλλόμενο κόστος, που δίνεται από τη συνάρτηση $f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Έτσι, την χρονική στιγμή t η ακμή έχει κόστος $f_e(t)$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές έχουν θετικό εύρος τιμών. Παρατηρείστε ότι το σύνολο των ακμών που αποτελούν ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο. Επίσης, το κόστος ενός ελάχιστου γεννητικού δέντρου του G μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Έστω ότι εκφράζεται από τη συνάρτηση $c_G(t)$. Προκύπτει λοιπόν το εξής πρόβλημα:
Η εύρεση της χρονικής στιγμής t, η οποία ελαχιστοποιεί το $c_G(t)$.
Υποθέστε ότι κάθε συνάρτηση f_e είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού: $f_e(t) = a_e t^2 + b_e t + c_e$ με $a_e > 0$. Περιγράψτε ένα αλγόριθμο που δέχεται ως είσοδο το γράφημα G και τις τιμές $\{(a_e, b_e, c_e) : e \in E\}$ και επιστρέφει τη χρονική στιγμή t που ελαχιστοποιεί το κόστος του ελάχιστου γεννητικού δέντρου. Ο αλγόριθμος θα πρέπει να είναι πολυωνυμικού χρόνου ως προς τον αριθμό των κόμβων και των ακμών του γραφήματος.

9. Έστω μη κατευθυνόμενο, συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$, με συνάρτηση κόστους $w : E \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $|E| \geq |V|$ και όλα τα κόστη μεταξύ τους είναι διαφορετικά. Ορίζουμε το δεύτερο καλύτερο ελάχιστο γεννητικό δέντρο ως εξής:
Έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο όλων των γεννητικών δέντρων του G και έστω T' ένα ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G. Τότε, δεύτερο καλύτερο ελάχιστο γεννητικό δέντρο είναι ένα γεννητικό δέντρο T τέτοιο ώστε $w(T) = min_{T'' \in \mathcal{T} - \{T'\}}\{w(T'')\}$.
α. Δείξτε ότι το ελάχιστο γεννητικό δέντρο είναι μοναδικό, αλλά το δεύτερο καλύτερο ελάχιστο γεννητικό δέντρο μπορεί να μην είναι μοναδικό.
β. Έστω T το ελάχιστο γεννητικό δέντρο του G. Αποδείξτε ότι το G περιέχει ακμές $(u, v) \in T$ και $(x, y) \notin T$ τέτοιες ώστε το δέντρο $T - \{(u, v)\} \cup \{(x, y)\}$ είναι δεύτερο καλύτερο ελάχιστο γεννητικό δέντρο.
γ. Έστω T γεννητικό δέντρο του G και για δύο οποιεσδήποτε κορυφές $u, v \in V$, σημειώνουμε ως $max[u, v]$ μια ακμή μέγιστου κόστους στο μοναδικό μονοπάτι μεταξύ των κόμβων u και v στο T. Περιγράψτε έναν αλγόριθμο που δοθέντος του T υπολογίζει την ακμή $max[u, v]$ για κάθε $u, v \in V$, σε χρόνο $O(V^2)$.

δ. Προτείνετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο υπολογισμού του δεύτερου καλύτερου ελάχιστου γεννητικού δέντρου του G.

10. Έστω κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, στο οποίο κάθε ακμή (u, v) έχει μία αντίστοιχη τιμή $r(u, v)$, η οποία είναι μία πραγματική τιμή στο εύρος $0 \leq r(u, v) \leq 1$ που εκφράζει την αξιοπιστία ενός διαύλου επικοινωνίας από τον κόμβο u στον κόμβο v. Αναπαριστούμε με $r(u, v)$ την πιθανότητα επιτυχούς επικοινωνίας μεταξύ των κόμβων u και v μέσω του διάυλου. Υποθέτουμε οτι οι πιθανότητες αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Περιγράψτε έναν αλγόριθμο για την εύρεση του πιο αξιόπιστου μονοπατιού μεταξύ δύο κόμβων.

11. Έστω το πρόβλημα της έυρεσης του συντομότερου μονοπατιού. Υποθέστε ότι έχετε στη διάθεσή σας μία συνάρτηση που εκτιμά την απόσταση ενός κόμβου από τον προορισμό. Τροποποιείστε τον αλγόριθμο του Dijkstra ώστε να αξιοποιείτε την πληροφορία που έχετε στη διάθεσή σας.

12. Δίνεται ο παρακάτω αλγόριθμος:

Αλγόριθμος BellmanFord
είσοδος: γράφημα $G = (V, E)$, αρχικός κόμβος s, πίνακας με κόστη ακμών c

    $d = \langle \inf, ..., \inf \rangle$: Πίνακας με τιμές στο σύνολο $\mathbb{R} \cup \{-\inf, \inf\}$
    $parent = \langle \perp, ..., \perp \rangle$: Πίνακας από δείκτες κόμβων
    $d[s] := 0; \quad parent[s] := s$
    Για $i := 1$ έως $n - 1$
        Για κάθε $e \in E$ relax(e)
Για κάθε $e = (u, v) \in E$
        Αν $d[u] + c(e) < d[v]$ τότε infect(v)
    Επέστρεψε $(d, parent)$

Διαδικασία relax($e = (u, v) \in E$)
    Αν $d[u] + c(e) < d[v]$ τότε
        $d[v] := d[u] + c(e)$
        parent$[v] := u$

Διαδικασία infect(v)
    Αν $d[v] > -\inf$ τότε
        $d[v] := -\inf$
        Για κάθε $e = (v, w) \in E$ infect(w)

Τι βρίσκει ο αλγόριθμος; Ποιά τα πλεονεκτήματά του;

13. Ο αλγόριθμος Bellman-Ford εντοπίζει έναν αρνητικό κύκλο προσπελάσιμο από την εκάστοτε πηγή. Επεκτείνετέ τον, ώστε να εντοπίζει έναν αρνητικό κύκλο που βρίσκεται οπουδήποτε στο γράφημα, εντός χρόνου $O(VE)$.