Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Διαδικασία Bernoulli

απλό τυχαίο πείραμα

A με $P(A) = p$

$\overline{A}$ με $P(\overline{A}) = 1 - p$

$\Rightarrow S = (A, \overline{A})$

Δειγματοχώρος *απλού* πειράματος

n επαναλήψεις του πειράματος $\Rightarrow$ ακολουθίες των A, $\overline{A}$ με n στοιχεία, π.χ. $\underbrace{A\,\overline{A}\,A\cdots A}_{n-\text{στοιχεία}}$

$\Rightarrow S =$ (σύνολο των 2^n διαφορετικών ακολουθιών)

Δειγματοχώρος *σύνθετου* πειράματος

πιθανότητα εμφάνισης μιάς ακολουθίας:

$$P(A\,\overline{A}\cdots\cdots A) = [P(A)]^x \cdot [1 - P(A)]^{n-x}$$

x φορές το A

n − x −"− το $\overline{A}$

$$= p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΔΟΚΙΜΩΝ

<u>Διωνυμική κατανομή ή κατανομή *Bernoulli*</u>

Χ : πλήθος εμφάνισης του Α σε n δοκιμές

πεδίο τιμών x : 0,1,2,……,n

$$\{X=x\} = \{ \text{ οι } \binom{n}{x} \text{ ακολουθίες που περιέχουν } x-\text{φορές το A και } (n-x)-\text{φορές το } \overline{A} \}$$

$$\Rightarrow \quad P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{(x_i \le x)} \binom{n}{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{n-x_i}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Πόσες δοκιμές με p=0,01 πρέπει να εκτελεστούν για να βεβαιώσουμε ότι το Α θα εμφανιστεί με πιθανότητα 1/2 και πάνω ;

Ζητούμενο : $P(X \ge 1) \ge 1/2$

Έχουμε : $P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{n} =$
$= 1 - 0{,}99^{n}$

$\Rightarrow \quad 1 - 0{,}99^{n} \ge 1/2$ $\quad \boxed{\Rightarrow \quad n \ge 69}$

Μέση τιμή και διασπορά της X

$$\underline{\underline{E\{X\}}} = \mu = \sum_{x_i=0}^{n} x_i \cdot \binom{n}{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{n-x_i} = \underline{\underline{n \cdot p}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_X^2}} = VAR\{X\} = \underline{\underline{n \cdot p\,(1-p)}}$$

Επειδή :

$$X = \sum_{i=0}^{n} X_i, \quad \text{όπου} \quad X_i = \begin{cases} 1: \text{δοκιμή } i \text{ έφερε } A \\ 0: \text{δοκιμή } i \text{ έφερε } \overline{A} \end{cases}$$

Έχουμε :

$$E\{X_i\} = 0 \cdot \underbrace{P(\overline{A})}_{1-p} + 1 \cdot \underbrace{P(A)}_{p} = p$$

$$VAR\{X_i\} = E\{\underbrace{X_i^2}_{=X_i}\} - E\{X_i\}^2 = p - p^2 = p\,(1-p)$$

$$\Rightarrow E\{X\} = E\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n\} =$$

$$= E\{X_1\} + E\{X_2\} + \ldots + E\{X_n\} = \underline{\underline{n \cdot p}}$$

! **Προσθετικότητα μέσης τιμής**

$$VAR\{X\} = VAR\{X_1 + X_2 + \ldots\ldots X_n\}$$

$$= VAR\{X_1\} + \ldots + VAR\{X_n\} = \underline{\underline{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

! **Προσθετικότητα διασποράς σε περίπτωση ανεξάρτητων μεταβλητών**

Παράδειγμα 1

Ρίχνουμε ένα ζάρι 20 φορές. Αν Χ ο αριθμός εμφάνισης του 1, να βρεθεί :

-η πιθανότητα να εμφανιστεί το 1 πέντε φορές

-η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της Χ

Η Χ είναι διωνυμικά κατανεμημένη με $p = 1/6$.

$$\Rightarrow \quad P(X=5) = \binom{20}{5} \cdot (1/6)^5 \cdot (5/6)^{15} = 0{,}129$$

$$E\{X\} = n \cdot p = 20 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}33$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 2{,}77 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 1{,}66$$

Παράδειγμα 2

Η πιθανότητα επιτυχούς στόχευσης βολής κατά στόχου είναι 0,6 **α)** ποια η πιθανότητα τριών επιτυχιών σε πέντε προσπάθειες **β)** ποια η πιθανότητα μέχρι και τριών επιτυχιών σε πέντε προσπάθειες **γ)** ποια η πιθανότητα άνω των τριών επιτυχιών σε πέντε προσπάθειες **δ)** Έστω ότι αλλάζει η απόσταση του στόχου έτσι ώστε η πιθανότητα πέντε επιτυχιών σε δέκα προσπάθειες να είναι διπλάσια από την πιθανότητα τεσσάρων επιτυχιών σε δέκα προσπάθειες. Ποια η πιθανότητα τριών επιτυχιών σε έξι προσπάθειες.

Λύση

α) Ως ‘επιτυχία’ για την κατανομή είναι να στοχευθεί με επιτυχία ο στόχος. Άρα έχουμε διωνυμική κατανομή με p=0,6.

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot(1-p)^{n-x}\Rightarrow P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}6^{3}\cdot(1-0{,}6)^{5-3}=0{,}3456$$

β) Η πιθανότητα μέχρι και τριών επιτυχιών σε πέντε προσπάθειες θα υπολογιστεί από το άθροισμα των πιθανοτήτων μηδέν μίας δύο και τριών επιτυχιών

$$F(3)=P(X\le 3)=\sum_{(x_i\le 3)}\binom{n}{x_i}\cdot p^{x_i}\cdot(1-p)^{n-x_i}=\binom{5}{0}\cdot 0{,}6^{0}\cdot(1-0{,}6)^{5-0}+$$

$$\binom{5}{1}\cdot 0{,}6^{1}\cdot(1-0{,}6)^{5-1}+\binom{5}{2}\cdot 0{,}6^{2}\cdot(1-0{,}6)^{5-2}+\binom{5}{3}\cdot 0{,}6^{3}\cdot(1-0{,}6)^{5-3}=$$

$$0{,}01+0{,}077+0{,}23+0{,}346=0{,}663$$

Λύση

γ) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}663 = 0{,}337$

δ) Θα βρούμε την πιθανότητα επιτυχίας p από την εξίσωση που προκύπτει από το σχέση σύμφωνα με την οποία η πιθανότητα πέντε επιτυχιών σε δέκα προσπάθειες είναι διπλάσια από την πιθανότητα τεσσάρων επιτυχιών σε δέκα προσπάθειες, δηλαδή

$$\binom{10}{5} \cdot p^5 \cdot (1-p)^{10-5} = 2 \cdot \binom{10}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^{10-4}$$

Έτσι έχουμε

$$\binom{10}{5} \cdot p^5 \cdot (1-p)^{10-5} = 2 \cdot \binom{10}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^{10-4} \Rightarrow \binom{10}{5} \cdot p = 2 \cdot \binom{10}{4} \cdot (1-p) \Rightarrow$$

$$252 \cdot p = 2 \cdot 210 \cdot (1-p) \Rightarrow p = \frac{5}{3}(1-p) \Rightarrow p = \frac{5}{8}$$

Γεωμετρική Κατανομή

X : πλήθος δοκιμών μέχρι τη πρώτη εμφάνιση του A

πεδίο τιμών : 1, 2, 3, ….

$$\{X = x\} = \underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{(x-1)-\text{φορές}}\cdot A \Rightarrow P(X = x) = (1-p)^{x-1}\cdot p$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{(x_i \le x)} (1-p)^{x_i - 1}\cdot p$$

Παράδειγμα

Για την πρόσληψη του διευθυντή πωλήσεων ενός πολυκαταστήματος, μια επιτροπή εξετάζει τυχαία έναν - έναν τους υποψηφίους, μέχρις ότου να πετύχει κάποιον ικανό. Έστω ότι το 25% των υποψηφίων είναι ικανοί για τη δουλειά του διευθυντή. Ποια η πιθανότητα η επιτροπή να απορρίψει το πολύ δύο υποψηφίους ;

Έστω X το πλήθος των συνεντεύξεων μέχρις εμφάνισης ικανού υποψηφίου.

Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $P(X \leq 3)$ όπου X γεωμε-τρικά κατανεμημένη, με $p = 0,25$.

$$\Rightarrow P(X \leq 3) = \underbrace{P(X=1)}_{p} + \underbrace{P(X=2)}_{(1-p)\cdot p} + \underbrace{P(X=3)}_{(1-p)^2\cdot p} =$$

$$= p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2\right] = 0,25\left[1 + 0,75 + 0,75^2\right] = 0,578$$

Κατανομή *Poisson*

X (t) : Πλήθος εμφάνισης κάποιου γεγονότος σ' ένα σταθερό χωρικό ή χρονικό διάστημα

- **πλήθος συνδιαλέξεων εντός μιας ημέρας**
- **πλήθος σωματιδίων που καταγράφει μετρητής Geiger**
- **πλήθος λαθών σε ένα βιβλίο ή σε ένα πρόγραμμα υπολογιστή**
- **αριθμός ατυχημάτων σε συγκεκριμένη περιοχή για συγκεκριμένο διάστημα**
- **πλήθος ελαττωματικών παραγωγής εργοστασίου σε μια ώρα**
- **πλήθος των δένδρων σε 100 τ.μ. δάσους**

Βασική παράμετρος ο μέσος αριθμός εμφάνισης λ του γεγονότος, στη μονάδα *χρόνου* ή *χώρου* :

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{E\{X(t)\}}{t} \quad !$$

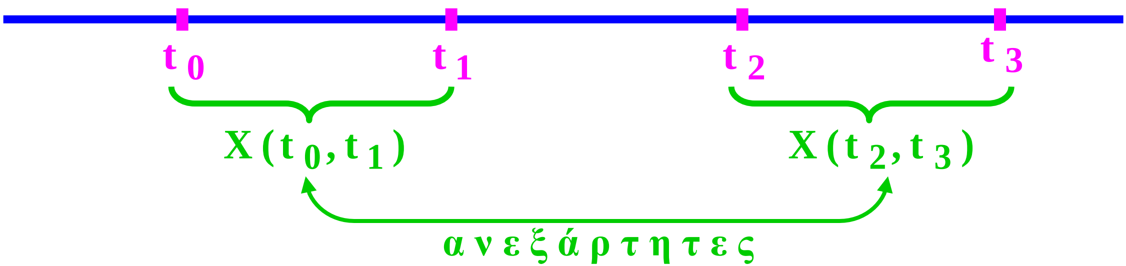
Προϋποθέσεις

- Για $\Delta t \Rightarrow 0$: P (εμφάνισης γεγονότος στο $t, t+\Delta t$) $= \lambda\ \Delta t$

  $\Rightarrow$ Πιθανότητα είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος, για $\Delta t \Rightarrow 0$

- P (δύο ή περισσότερα γεγονότα στο $t, t + \Delta t$) ≈ 0

- πλήθος γεγονότων σε δύο ξένα διαστήματα *ανεξάρτητα*



$\Rightarrow$ άπειρο “ρεζερβουάρ” γεγονότων

$$\boxed{t = n\cdot\Delta t}$$

- σε κάθε Δt ή θα συμβεί ένα Α ή όχι, όπου :

$$P(A)=\lambda\cdot\Delta t=\frac{\lambda\cdot t}{n}$$

- σε ξένα Δt ισχύει ανεξαρτησία

$$\Rightarrow P(X(t)=x)=\binom{n}{x}\cdot\underbrace{\left(\lambda\cdot\frac{t}{n}\right)}_{p}^{x}\underbrace{\left(1-\lambda\cdot\frac{t}{n}\right)}_{1-p}^{n-x}$$

Διωνυμική

$$\lim_{n\to\infty}P(X(t)=x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{t}{n}\right)^{x}\cdot\underbrace{\left(1-\lambda\cdot\frac{t}{n}\right)^{n}}_{\Rightarrow e^{-\lambda t}}\cdot\underbrace{\left(1-\lambda\cdot\frac{t}{n}\right)^{-x}}_{\Rightarrow 1}=$$

$$=\frac{(\lambda t)^{x}}{x!}e^{-\lambda t}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-x)!}\cdot\frac{1}{n^{x}}}_{=\frac{(n-x+1)\cdot(n-x+2)\cdots n}{n\cdot n\cdots\cdots n}=1}$$

$$\Rightarrow P(X(t)=x) = \frac{(\lambda \cdot t)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda t}$$ **!**

Κατανεμημένη κατά *Poisson*

$$E\{X\} = n \cdot p,$$ αν X κατανεμημένη διωνυμικά

$$\Rightarrow E\{X(t)\} = \lim_{n \to \infty} n \cdot p = \lim_{n \to \infty} n \cdot \lambda \cdot \frac{t}{n} = \underline{\underline{\lambda \cdot t}}$$ **!**

Poisson

$$\sigma_X^2 = n \cdot p(1-p),$$ αν X κατανεμημένη διωνυμικά

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \lim_{n \to \infty} n \cdot \lambda \cdot \frac{t}{n}\left[1 - \lambda \cdot \frac{t}{n}\right] = \lambda \cdot t$$ **!**

Poisson

Παράδειγμα 1

Οι αφίξεις σε μηχάνημα ανάληψης χρημάτων τράπεζας (ATM): ακολουθούν κατανομή Poisson με μέση τιμή 5,5 αφίξεις την ώρα. α) Να βρεθεί η πιθανότητα να έχουμε 3αφίξεις σε μια ώρα β) μέχρι και τρεις αφίξεις σε μια ώρα γ)

Λύση

α) Εφόσον η μέση τιμή είναι 5,5 αφίξεις την ώρα έχουμε ότι $\lambda t=5{,}5$ όπου $t=1$ άρα $\lambda=5{,}5$

Επομένως

$$P(X(t)=3)=\frac{(\lambda\cdot t)^3}{3!}\cdot e^{-\lambda t}=\frac{(5{,}5\cdot 1)^3}{3!}\cdot e^{-5{,}5\cdot 1}=\frac{(5{,}5)^3}{6}e^{-5{,}5}=0{,}113$$

Λύση

β) Η πιθανότητα να έχουμε μέχρι και τρεις αφίξεις υπολογίζεται ως εξής:

$$P(X(t) \leq 3) = P(X(t) = 0) + P(X(t) = 1) + P(X(t) = 2) + P(X(t) = 3) =$$

$$\frac{(5{,}5)^0}{0!} \cdot e^{-5{,}5} + \frac{(5{,}5)^1}{1!} \cdot e^{-5{,}5} + \frac{(5{,}5)^2}{2!} \cdot e^{-5{,}5} + \frac{(5{,}5)^3}{3!} \cdot e^{-5{,}5} =$$

$$0{,}0041 + 0{,}0225 + 0{,}0618 + 0{,}1133 = 0{,}2017$$

γ) Η πιθανότητα άνω των τριών επιτυχιών υπολογίζεται ως εξής:

$$P(X(t) > 3) = 1 - P(X(t) \leq 3) = 1 - 0{,}2017 = 0{,}7983$$

Παράδειγμα 2

Οι πελάτες ενός καταστήματος, καταφθάνουν σύμφωνα με κατανομή *Poisson* με μέσο ρυθμό αφίξεως 8 πελάτες / ώρα. Να βρεθεί για μια συγκεκριμένη ώρα :

α) να φθάσουν ακριβώς 8 πελάτες

$$\lambda = 8 \text{ πελάτες / ώρα} \quad \Rightarrow \lambda \cdot t = 8 \text{ πελάτες}$$

t = 1 ώρα

$$P(X(t)=x) = \frac{(\lambda \cdot t)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow P(X(1 \text{ ώρα}) = 8) = \frac{8^8}{8!} \cdot e^{-8} = 0{,}1396$$

β) να φθάσουν τουλάχιστον 3 πελάτες

$$P(X(1 \text{ ώρα}) \geq 3) = 1 - P(X(1 \text{ ώρα}) < 3)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$\frac{8^0}{0!} \cdot e^{-8} \qquad \frac{8^1}{1!} \cdot e^{-8} \qquad \frac{8^2}{2!} \cdot e^{-8}$$

$$= 1 - 3{,}35 \cdot 10^{-4} - 2{,}68 \cdot 10^{-3} - 1{,}07 \cdot 10^{-2} = 0{,}986$$

Παράδειγμα

Σε κάποιο τύπο προγραμμάτων υπολογιστή εμφανίζονται κατά μέσο όρο 100 λάθη σε 10.000 εντολές. Ποιά η πιθανότητα κάποια ακολουθία 100 εντολών να έχει 5 λάθη ;

$$\lambda \cdot t = 100 \text{ λάθη} \Rightarrow \lambda = 10^{-2} / \text{ εντολή}$$

10.000 εντολές

$$P(X(t) = x) = \frac{(\lambda \cdot t)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda t}$$

$$P(X(100 \text{ εντολές}) = 5) = \frac{\left(10^{-2} \cdot 100\right)^5}{5!} \cdot e^{-10^{-2} \cdot 100} =$$

$$= \frac{1}{5!} \cdot e^{-1} = 0,003$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω q η πιθανότητα βλάβης κινητήρα αεροσκάφους κατά τη πτήση και ότι το αεροπλάνο μπορεί να πετάξει εάν πάθουν βλάβη το πολύ οι μισοί από τους κινητήρες του. Για ποιές τιμές του q προτιμάτε ένα δικινητήριο από ένα τετρακινητήριο ;

Έστω A : βλάβη κινητήρα με $P(A) = q$

X : πλήθος εμφάνισης του A σε n δοκιμές

Διωνυμική : $P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot q^{x}(1-q)^{n-x}$

Δικινητήριο : $(n=2)$

$$Q_2 = P(X\geq 2)= P(X=2)=\binom{2}{2}\cdot q^2\cdot(1-q)^0 =$$

πιθανότητα αστοχίας $= q^2$

Τετρακινητήριο (n = 4)

$$Q_4 = P(X>2) = P(X=3) + P(X=4) =$$

$\downarrow$

πιθανότητα αστοχίας

$$= \binom{4}{3} \cdot q^3 \cdot (1-q) + \binom{4}{4} \cdot q^4 \cdot (1-q)^0 =$$

$$= \frac{4!}{3!\ 1!} \cdot q^3 (1-q) + q^4 =$$

$$= 4 \cdot q^3 (1-q) + q^4 = \underline{4q^3 - 3q^4}$$

$$Q_2 \le Q_4 \Rightarrow \quad q^2 \le 4q^3 - 3q^4$$

$$q^2 - 4q^3 + 3q^4 \le 0$$

$$q^2 \left(\underbrace{3q^2 - 4q + 1}_{(q-1)(q-1/3)} \right) \le 0$$

Δικινητήριο προτιμάται αν : $q > 1/3$

Προφανώς για ρεαλιστικά q, το τετρακινητήριο πιο ασφαλές !

Άσκηση

5) Εργοστάσιο παράγει ελαττωματικά προϊόντα με πιθανότητα 0,0001. Για ποιο πλήθος προϊόντων η πιθανότητα ύπαρξης ελαττωματικού ξεπερνά το 10%.

Λύση

Έχουμε διωνυμική κατανομή με p=0,0001 Η πιθανότητα ύπαρξης ελαττωματικού μεγαλύτερη από 10% δίνεται από τη σχέση

$$1 - P(0) > 0{,}1 \Leftrightarrow$$

$$1 - \binom{\nu}{0} \cdot 0{,}0001^0 \cdot 0{,}9999^\nu > 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}9999^\nu < 0{,}9 \Leftrightarrow \ln 0{,}9999^\nu < \ln 0{,}9 \Leftrightarrow \nu \ln 0{,}9999 < \ln 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \nu > \frac{\ln 0{,}9}{\ln 0{,}9999} \Leftrightarrow \nu > 1053{,}55 \Rightarrow \nu = 1054$$

Κατανομή *Pascal* ή *αρνητική διωνυμική*

X : πλήθος δοκιμών μέχρι το A να εμφανιστεί r - φορές

πεδίο τιμών : r, r + 1, r + 2, ….

$$\{X = x\} = \left\{ \text{οι } \binom{x-1}{r-1} \text{ ακολουθίες } \underbrace{\bar{A}\,A \cdots \bar{A}}\cdot A \right\}$$

$(x-1)-$ στοιχεία

$(r-1)-$ φορές το A

$(x-1)-(r-1) = x-r$ φορές το $\bar{A}$

$$\Rightarrow P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^{r} (1-p)^{x-r}$$

Παράδειγμα

Η πιθανότητα να κερδίσει ένα κόμμα στις εκλογές είναι 0,3. Ποια η πιθανότητα να κερδίσει για πέμπτη φορά τις εκλογές στη δέκατη εκλογική αναμέτρηση ;

Εδώ A : το συγκεκριμένο κόμμα κερδίζει τις εκλογές

X : πλήθος εκλογικών αναμετρήσεων μέχρι το A να εμφανιστεί r φορές

$$P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^{r} \cdot (1-p)^{x-r}$$

όπου : $\underline{x = 10,}$ $\underline{r = 5,}$ $\underline{p = 0{,}3}$

$$\Rightarrow P(X=10) = \binom{9}{4} \cdot 0{,}3^{5} \cdot 0{,}7^{5} = 0{,}051$$

Παράδειγμα (*πρόβλημα Banach*)

Κάποιος έχει μαζί του 2 κουτιά σπίρτα με Ν σπίρτα το καθένα. Η επιλογή των κουτιών γίνεται τυχαία. Ποιά η πιθανότητα να μείνει χωρίς σπίρτα. Ποιά η πιθανότητα να επιλέξει ένα άδειο κουτί και το άλλο να έχει ακόμα κ σπίρτα.

Αν την πρώτη φορά που επιλέγεται ένα άδειο κουτί, το άλλο έχει κ σπίρτα, τότε έχουμε διαλέξει Ν + 1 φορές το άδειο και Ν - κ φορές το άλλο.

Α: επιλογή π.χ. του πρώτου κουτιού

Χ: πλήθος δοκιμών μέχρι της r - της εμφάνισης του Α

$$\Rightarrow \quad P(X=x) = \binom{x-r}{r-1} \cdot p^{r} \cdot (1-p)^{x-r}$$

$$x = 2N-\kappa+1; \quad r = N+1; \quad p = 1/2$$

$$\Rightarrow P(X=2N-\kappa+1) = \binom{2N-\kappa}{N} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-\kappa}$$

$$\Rightarrow P^{*} \underset{\text{συμμετρία}}{=} 2 \cdot P(X=2N-\kappa+1)$$

$$P^{*} = \binom{2N-\kappa}{N} \cdot 2^{\kappa - 2N}$$

$$\boxed{\text{Τύπος του Stirling :} \quad n! \cong e^{-n} \cdot n \cdot \sqrt{2\pi n}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \kappa = 0 & P^{*} = 0{,}08 \\ \kappa = 10 & P^{*} = 0{,}05 \\ \kappa = 20 & P^{*} = 0{,}007 \\ \kappa = 25 & P^{*} = 0{,}001 \\ \kappa = 30 & P^{*} \cong 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{για} \\ N = 50 \end{array}$$

Παράδειγμα

Για την κάλυψη τριών θέσεων λογιστών επιλέγονται τυχαία υποψήφιοι μέχρι να βρεθούν 3 ικανοί. Έστω ότι το 40% των υποψηφίων είναι ικανοί για τη θέση. Ποια η πιθανότητα οι θέσεις να καλυφθούν με τον πέμπτο εξεταζόμενο υποψήφιο ;

Εδώ A : ο συγκεκριμένος υποψήφιος είναι ικανός για τη θέση

X : πλήθος δοκιμών μέχρι το A να εμφανιστεί r φορές

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^r (1-p)^{x-r}$$

όπου : $\underline{\underline{x = 5,}}$ $\underline{\underline{r = 3,}}$ $\underline{\underline{p = 0,4}}$

$$\Rightarrow P(X = 5) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}138$$