

Αρχές και Εφαρμογές Σημάτων και Συστημάτων

Σειρές και μετασχηματισμοί Fourier

Καθηγητής Χ. Δουληγέρης

E-mail: cdoulig@unipi.gr

Συντελεστές Σειρών Fourier για επιλεγμένες κυματομορφές

Περιοδική Κυματομορφή	Συμμετρία	F_n^*
<p>1. Συμμετρικό ορθογώνιο κύμα</p> $\begin{cases} +1 & t < T/4 \\ -1 & T/4 \leq t < T/2 \end{cases}$	άρτια	$\begin{cases} Sa(n\pi/2) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
<p>2. Ορθογώνιοι επαναλαμβανόμενοι παλμοί (τραίνο)</p> $\begin{cases} +1 & t < \tau/2 \\ -0 & \tau/2 \leq t < T/2 \end{cases}$	άρτια	$\frac{\tau}{T} Sa(n\pi\tau/T)$
<p>3. Συμμετρική τριγωνική κυματομορφή</p> $1 - 4 t /T, \quad t < T/2$	άρτια	$\begin{cases} Sa^2(n\pi/2) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$

* $Sa(x) = (\sin x)/x$

Περιοδική Κυματομορφή	Συμμετρία	F_n
<p>4. Συμμετρική Πριονωτή</p> <p>$2t/T, \quad t < T/2$</p>	περιττή	$\begin{cases} j(-1)^n / (n\pi) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
<p>5. Ημιανορθωμένη ημιτονοειδής</p> $\begin{cases} \sin\omega_0 t & 0 \leq t < T/2 \\ 0 & -T/2 \leq t < 0 \end{cases}$		$\begin{cases} \frac{1}{\pi(1-n^2)} & n \text{ even} \\ -j/4 & n = \pm 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$
<p>6. Πλήρως ανορθωμένη ημιτονοειδής</p> <p>$\sin\omega_0 t$</p>	άρτια	$\begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)} & n \text{ even} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πράξη	$f(t)$	$F(\omega)$
Γραμμικότητα (υπέρθθεση)	$a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)$	$a_1 \cdot F_1(\omega) + a_2 \cdot F_2(\omega)$
Συζυγής Μιγαδικός	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Κλιμάκωση	$f(\alpha \cdot t)$	$\frac{1}{ \alpha } \cdot F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Καθυστέρηση	$f(t - t_0)$	$e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot F(\omega)$
Αλλαγή Συχνότητας	$e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Διαμόρφωση Πλάτους	$f(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$	$\frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0)$

Πράξη	$f(t)$	$F(\omega)$
Χρονική συνέλιξη	$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) \cdot d\tau$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
Συνέλιξη συχνότητας	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega - u)$
Διαδικότητα: χρόνος - συχνότητα	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Συμμετρία: άρτιοι - περιττοί	$f_e(t)$ $f_o(t)$	$F_e(\omega)[real]$ $F_o(\omega)[imaginary]$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d}{dt} f(t)$	$j\omega \cdot F(\omega)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{\tau} f(\tau) \cdot d\tau$	$\frac{1}{j \cdot \omega} F(\omega) + \pi \cdot F(0) \cdot \delta(\omega),$ όπου $F(0) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot dt$

Επιλεγμένοι Μετασχηματισμοί Fourier

$f(t)$	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$
1. $e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)$
2. $te^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)^2$
3. $e^{-a t }$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
4. $e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
5. $\text{sgn}(t)$	$2/(j\omega)$
6. $j/(\pi t)$	$\text{sgn}(\omega)$
7. $u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/(j\omega)$
8. 1	$2\pi\delta(\omega)$
9. $\delta(t)$	1
10. $e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\mp \omega - \omega_0)$
11. $\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

$f(t)$	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$
12. $\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
13. $\text{rect}(t/\tau)$	$\tau \cdot \text{Sa}(\omega\tau/2)$
14. $\frac{W}{2\pi} \text{Sa}(Wt/2)$	$\text{rect}(\omega/W)$
15. $\frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt)$	$\text{rect}(\omega/(2W))$
16. $\Lambda(t/\tau)$	$\tau \cdot [\text{Sa}(\omega\tau/2)]^2$
17. $\frac{W}{2\pi} [\text{Sa}(Wt/2)]^2$	$\Lambda(\omega/W)$
18. $\cos(\pi t/\tau) \cdot \text{rect}(t/\tau)$	$\frac{2\tau}{\pi} \cdot \frac{\cos(\omega\tau/2)}{1 - (\omega\tau/\pi)^2}$
19. $\frac{2W}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(Wt)}{1 - (2Wt/\pi)^2}$	$\cos[\pi\omega/(2W)] \cdot \text{rect}[\omega/(2W)]$
20. $\delta_T(t)$	$\omega_0 \cdot \delta_{\omega_0}(\omega), \text{ όπου } \omega_0 = 2\pi/T$