Βασικές έννοιες

Πιθανότητες και Στατιστική

Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

2024-2025

Πληροφορίες για το μάθημα

Διδάσκοντες

- Κ. Λιαγκούρας (kliagk@unipi.gr)
- Δ. Σωτηρόπουλος (dsotirop@unipi.gr)
- Ι. Τασούλας (jtas@unipi.gr)

Ώρες διαλέξεων και φροντιστηρίων

- Διαλέξεις: Δευτέρα 2-3 (103), Δευτέρα 3-4 (002), Παρασκευή 10-12 (201).
- Φροντιστήρια: Τρίτη 10-12 (Teams, κωδικός εγγραφής: **ybkj2wv**)

Πληροφορίες για το μάθημα

Τρόπος εξέτασης

- Γραπτή εξέταση στο τέλος του εξαμήνου με κλειστά βιβλία. Μαζί με τα θέματα δίνεται τυπολόγιο με όλους τους βασικούς τύπους Πιθανοτήτων και Στατιστικής
- 3 σειρές ασκήσεων κατά την διάρκεια του εξαμήνου με συγκεκριμένες ημερομηνίες παράδοσης.
  Η επίλυση είναι ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ και δίνει bonus +0.5 μονάδες για κάθε σειρά.
- Τελικός βαθμός = Min(10, Βαθμός Γραπτού + Βαθμός σειρών ασκήσεων)

Σύγγραμμα μαθήματος:

Ε. Φούντας, Κ.Πατσάκης, Χ. Φούντας, Πιθανότητες - Στατιστική και Εφαρμογές, Εκδόσεις Βαρβαρήγου (2016).

Εναλλακτικό σύγγραμμα στον Εύδοξο:

Φ. Γεωργιακώδης, Ι. Τριανταφύλλου, Στοιχεία Πιθανοτήτων και Στατιστικής

Βιβλιογραφία

Συμπληρωματική βιβλιογραφία:

1. Ι. Κοντογιάννης, Σ. Τουμπής, Στοιχεία Πιθανοτήτων με εφαρμογές στη στατιστική και την πληροφορικη, Λήψη
2. Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Χαραλαμπίδης, Εισαγωγή στις πιθανότητες και τη στατιστική, Λήψη

Άλλα συγγράμματα, διαθέσιμα στο Internet:

1. Dimitri P. Bertsekas, John N. Tsitsiklis, Introduction to Probability, Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
2. Sheldon M. Ross, Introduction to probability and statistics for engineers and scientists, 5th edition Academic Press, 2014.

Σελίδα μαθήματος

`https://thales.cs.unipi.gr/courses/TMB125/`

- Ανακοινώσεις
- Έγγραφα

Πείραμα τύχης

Η θεωρία πιθανοτήτων μελετά τα τυχαία φαινόμενα τα οποία, στα πλαίσια της θεωρίας, ονομάζονται και **πειράματα τύχης**. Κάθε εκτέλεση ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δοκιμή** (trial) και το αποτέλεσμά της δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων.

Κατηγορίες πειραμάτων:

- Πείραμα (πχ. ρίχνω ζάρια, διαλέγω αριθμό στο $\{1, 2, \ldots, n\}$).
- Φαινόμενο (πχ. θερμοκρασία, χρόνος παράδοσης email, χρόνος τηλεφωνικής συνδιάλεξης).

Βασική υπόθεση:

Δυνατότητα επανάληψης (δοκιμής) κάτω από τις ίδιες συνθήκες (αν δεν υπάρχει, την υποθέτουμε).

Δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα

- **Δειγματικός χώρος** Ω (sample space): Το σύνολο **όλων** των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.
  Ζάρι $\to \Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$,
  Χρόνος τηλεφωνικής συνδιάλεξης $\to \Omega = [0, +\infty)$
- Ο δειγματικός χώρος Ω μπορεί να είναι:
  - **πεπερασμένος** (π.χ. $\{1, 2, \ldots, 6\}$),
  - **αριθμήσιμος** (ισοδύναμος του $\mathbb{N}$, π.χ. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$), ή
  - **υπεραριθμήσιμος** (π.χ $\mathbb{R}$, $[0, 1]$).
- **Ενδεχόμενο** (event): Ένα υποσύνολο $A \subseteq \Omega$ του δειγματικού χώρου Ω.
- **Απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο**: Ένα ενδεχόμενο της μορφής $\{\omega\}$, όπου $\omega \in \Omega$.
- **Πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου**: Όταν το πείραμα οδηγεί σε αποτέλεσμα (απλό ενδεχόμενο) που περιέχεται στο ενδεχόμενο (**ευνοϊκό ενδεχόμενο**).
- Δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$ ονομάζονται **ξένα** αν και μόνο αν $A \cap B = \varnothing$.

Ορισμός πιθανότητας

Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις της έννοιας "πιθανότητα". Ο κλασικός τρόπος προσέγγισής της είναι να υπολογίσουμε τον λόγο του αριθμού των ευνοϊκών περιπτώσεων ενός ενδεχομένου προς τον αριθμό των δυνατών περιπτώσεων.

Ορισμός κλασικής πιθανότητας (De Moivre 1711, Laplace 1812)

Αν A είναι ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω, τότε

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών για το } A \text{ αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}}$$

Μειονεκτήματα κλασικού ορισμού:

- Απαιτεί πεπερασμένο πλήθος στοιχείων δειγματοχώρου.
- Απαιτεί ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα.

Πλεονεκτήματα κλασικού ορισμού:

- Χρήσιμος στην πράξη.
- Η πιθανότητα υπολογίζεται εκ των προτέρων.

Ορισμός πιθανότητας

Η στατιστική προσέγγιση στηρίζεται στην έννοια της συχνότητας πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου σε μια μεγάλη σειρά δοκιμών.

Στατιστικός ορισμός πιθανότητας (όριο σχετικής συχνότητας)

Αν $N_n(A)$ είναι το πλήθος πραγματοποιήσεων του ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου Ω, μετά από n δοκιμές, τότε

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

Πολλές επαναλήψεις, μεγάλα μεγέθη $\Rightarrow$ σύγκλιση σε μια τιμή (πιθανότητα).

Μειονεκτήματα στατιστικού ορισμού:

- Πρέπει να γίνουν πολλές δοκιμές.
- Η πιθανότητα δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων.

Πλεονεκτήματα στατιστικού ορισμού:

- Χρήσιμος στην πράξη.

Ορισμός πιθανότητας

Παράδειγμα

Ένα δοχείο περιέχει 3 κόκκινες και 3 μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε 3 μπάλες στην τύχη (δηλαδή όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα). Ποια είναι η πιθανότητα να διαλέξαμε ακριβώς 2 κόκκινες μπάλες.

Λύση

Αρχικά, θα πρέπει να προσδιορίσουμε και να αναπαραστήσουμε τον δειγματικό χώρο Ω. Έστω $R = \{1, 2, 3\}$ το σύνολο των κόκκινων μπαλών και έστω $B = \{4, 5, 6\}$ το σύνολο των μαύρων μπαλών. Κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο είναι μια (μη διατεταγμένη) τριάδα από στοιχεία του $R \cup B$, άρα

$$\Omega = \{\{x, y, z\} : x, y, z \in R \cup B\} = \{S \subseteq R \cup B : |S| = 3\}.$$

Το ενδεχόμενο να διαλέξουμε ακριβώς 2 κόκκινες μπάλες είναι το

Λύση (συνέχεια)

$$A = \{\{x, y, z\} : x, y \in R, z \in B\} = \{\{x, y\} \cup \{z\} : \{x, y\} \subseteq R, z \in B\}.$$

Με απλές γνώσεις Συνδυαστικής, βρίσκουμε ότι

$$|\Omega| = \binom{6}{3} = 20 \quad \text{και} \quad |A| = \binom{3}{2}\binom{3}{1} = 3 \cdot 3 = 9,$$

επομένως, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό, είναι
$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{9}{20} = 0.45.$
(Παρατήρηση: Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα θεωρώντας τις τριάδες διατεταγμένες. Τότε όμως, θα πρέπει να αναπαραστήσουμε τα Ω, A διαφορετικά.)

Για το προηγούμενο παράδειγμα, σύμφωνα με τον στατιστικό ορισμό, μπορούμε να εκτελέσουμε πολλές φορές το πείραμα της επιλογής μιας τριάδας και να πάρουμε μια προσέγγιση για την πιθανότητα $P(A)$. Ο επόμενος κώδικας υλοποιεί αυτή την εκτέλεση.

```
import random
import time
r, b, k, d = 3, 3, 3, 2 #number of red, black, selected and
    desired red balls
N = 10000 #number of trials
R = [i for i in range(1,r+1)] #list of red balls
B = [i for i in range(r+1,r+b+1)] #list of black balls
RB = R+B #concatenate
```

```python
succ = 0 # number of successful trials. Success = exactly d
     red balls selected
start = time.time()
for i in range(N): #perform N trials
    s = random.sample(RB, k) #s: random sample of k
    distinct balls
    red = 0
    for j in range(len(s)): #scan sample to count red balls
        if s[j] <= r: red += 1 #red ball found
    if red == d: succ += 1
end = time.time()
print("Success rate:", succ/N) #print success ratio
print("Simulation time (seconds):", end-start)
```

Output:

```
Success rate: 0.4529
Simulation time (seconds): 0.13151121139526367
```

Ορισμός πιθανότητας

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας (Kolmogorov 1930)

Έστω συνάρτηση $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Η P ονομάζεται **συνάρτηση πιθανότητας** ή **μέτρο πιθανότητας** αν και μόνο αν

- $P(A) \geq 0$, για κάθε $A \subseteq \Omega$.
- $P(\Omega) = 1$.
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, για κάθε (αριθμήσιμη) οικογένεια $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω.

Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ονομάζεται **χώρος πιθανότητας**, ή **μοντέλο πιθανότητας**.

Πλεονεκτήματα αξιωματικού ορισμού

- Λειτουργεί και για δειγματικούς χώρους με άπειρο (αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο) πλήθος ενδεχομένων (π.χ. ύψος ανθρώπου).
- Λειτουργεί και για μη ισοπίθανα ενδεχόμενα (π.χ. κάλπικο νόμισμα).
- Ταυτίζεται με τον κλασσικό ορισμό, όταν ο δειγματοχώρος είναι πεπερασμένος και τα ενδεχόμενα ισοπίθανα.
- Κάθε ενδεχόμενο προκύπτει ως ένωση στοιχειωδών ενδεχομένων. Στους πεπερασμένους ή αριθμήσιμους χώρους, αν γνωρίζουμε την πιθανότητα για τα στοιχειώδη ενδεχόμενα τότε γνωρίζουμε και την πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο.

Παράδειγμα

Ρίχνουμε 2 ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 3 ή 7.

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : 1 \leq x, y \leq 6\},$$

οπότε $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$. Αν A είναι το ζητούμενο ενδεχόμενο, τότε $A = A_3 \cup A_7$, όπου A_3 (αντ. A_7) το ενδεχόμενο οι ενδείξεις των δύο ζαριών να αθροίζουν στο 3 (αντ. στο 7). Έχουμε ότι

$$A_3 = \{(1, 2), (2, 1)\} \quad \text{και} \quad A_7 = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (4, 3), (3, 4)\}.$$

Λύση (συνέχεια)

Δεδομένου ότι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, προκύπτει ότι

$$P(A_3) = \frac{2}{36} \text{ και } P(A_7) = \frac{6}{36}$$

οπότε, αφού τα A_3, A_7 είναι ξένα μεταξύ τους

$$P(A) = P(A_3) + P(A_7) = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = 0.222.$$

Ορισμός πιθανότητας

Παράδειγμα

Έστω ότι ένα ζάρι δεν είναι αμερόληπτο αλλά έχει τις παρακάτω πιθανότητες εμφάνισης των στοιχείων του:

$$\begin{array}{lll} P(1) = 1/6 & P(2) = 1/4 & P(3) = 1/3 \\ P(4) = 1/8 & P(5) = 1/16 & P(6) = 1/16 \end{array}$$

Να βρεθεί η πιθανότητα το ζάρι να φέρει άρτιο αριθμό.

Λύση

Το ενδεχόμενο A το ζάρι να φέρει άρτιο αριθμό είναι η ένωση των (ξένων) ενδεχομένων:
A_2 : το ζάρι φέρνει 2, A_4 : το ζάρι φέρνει 4, A_6 : το ζάρι φέρνει 6
Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με
$P(A) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = 1/4 + 1/8 + 1/16 = 7/16$.

Παρατήρηση: Με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας δεν θα μπορούσαμε να βρούμε την απάντηση!

Ιδιότητες αξιωματικού ορισμού πιθανότητας

Αν $A, B, C \subseteq \Omega$, τότε

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(A) \leq 1$
4. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
7. $P(A \cup B \cup C) =$
$P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

Κατηγορίες ενδεχομένων

- Δύο ενδεχόμενα A, B ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα** αν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου.
  Ισοδύναμα, $A, B \subseteq \Omega$ **ασυμβίβαστα** $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
- Το ενδεχόμενο A ονομάζεται **υποενδεχόμενο** (αντ. **υπερενδεχόμενο**) του B αν η πραγματοποίηση (αντ. μη πραγματοποίηση) του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση (αντ. μη πραγματοποίηση) του B.
  Ισοδύναμα, A υποενδεχόμενο του $B \Rightarrow A \subseteq B$ (αντ. A υπερενδεχόμενο του $B \Rightarrow B \subseteq A$).
- Τα ενδεχόμενα A, B ονομάζονται **αντίθετα** ή **συμπληρωματικά** αν η πραγματοποίηση του ενός συνεπάγεται την μη πραγματοποίηση του άλλου και αντιστρόφως.
  Ισοδύναμα, $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$. Ισοδύναμα, $A = \overline{B}$.
- **Ένωση ενδεχομένων** A, B: Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα δύο.
- **Τομή ενδεχομένων** A, B: Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται και τα δύο ενδεχόμενα.

Πρόταση (Ιδιότητα υποαθροισιμότητας).

i) Για οποιαδήποτε n-άδα ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ ισχύει ότι

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

ii) Για οποιαδήποτε αριθμήσιμη οικογένεια ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ ισχύει ότι $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Απόδειξη.

(i) (Άσκηση).

(ii) Παρατηρήστε ότι $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, όπου $B_i = A_i \cap \overline{\left(\bigcup\limits_{k=1}^{i-1} A_k\right)}$ και επιπλέον ότι τα B_i είναι ξένα ανά δύο με $B_i \subseteq A_i$. Επομένως,

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \qquad \square$$

Επιπλέον ιδιότητες της πιθανότητας

Πρόταση.

Αν για μια ακολουθία ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) < +\infty$, τότε $P(\limsup A_n) = 0$.

Απόδειξη.

Θέτουμε $B_n := \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$, $S_n := \bigcap_{j=1}^{n} B_j$ και $S := \limsup A_n$. Εξ ορισμού είναι $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Επιπλέον, θέτουμε $p_n := \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. Επειδή $p := \lim\limits_{n\to\infty} p_n \in [0, +\infty)$, έπεται ότι για $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 > 1$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει
$\sum_{i=n}^{\infty} P(A_i) = p - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) \leq |p - p_{n-1}| < \epsilon$.
Από την άλλη, προφανώς είναι $S \subseteq S_n \subseteq B_n$, οπότε
$P(S) \leq P(S_n) \leq P(B_n) = P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i) < \epsilon$,
άρα $P(S) < \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$, δηλαδή $P(S) = 0$. $\square$

Επιπλέον ιδιότητες της πιθανότητας

Πρόταση.

Αν μια ακολουθία ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσα, δηλαδή ισχύει ότι $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, τότε

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = P\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Απόδειξη.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το σύνολο A_n γράφεται ως ξένη ένωση συνόλων ως εξής: $A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1})$.
Επίσης, αντίστοιχα

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots = A_1 \cup \bigcup_{j=2}^{\infty} (A_j \setminus A_{j-1}).$$

Επομένως, $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} P(A_j \setminus A_{j-1}) =$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(P(A_1) + \textstyle\sum_{j=2}^{n} P(A_j \setminus A_{j-1})\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \qquad \square$$

Πόρισμα.

Αν μια ακολουθία ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, είναι φθίνουσα δηλαδή ισχύει ότι $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, τότε $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Απόδειξη.

Παρατηρήστε ότι η ακολουθία $(\overline{A_n})$ είναι αύξουσα, επομένως, από την προηγούμενη πρόταση και τον κανόνα του De Morgan ισχύει ότι

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - P(\overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)}) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n})$$
$$= \lim_{n\to\infty} (1 - P(\overline{A_n})) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \qquad \square$$

Ορισμός - Πιθανότητα σε υπεραριθμήσιμους χώρους.

Έστω Ω ένας υπεραριθμήσιμος δειγματικός χώρος οριζόμενος από μια περιοχή του (μοναδιάστατου ή διδιάστατου ή τρισδιάστατου) χώρου στην οποία οποιεσδήποτε στοιχειώδεις περιοχές είναι εξίσου πιθανές. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A οριζόμενου από μια περιοχή του δειγματικού χώρου Ω δίδεται από την σχέση

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

όπου $\mu(A)$ και $\mu(\Omega)$ είναι το μέτρο (μήκος, ή εμβαδόν, ή όγκος) των περιοχών A και Ω αντίστοιχα.

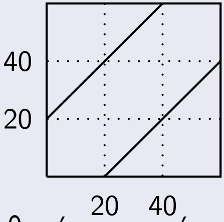
Παράδειγμα

Δύο φίλοι Χ και Υ συμφωνούν να συναντηθούν στην πλατεία Κοραή κάποια στιγμή στο διάστημα μεταξύ 5:00 μ.μ. και 6:00 μ.μ. Ο καθένας τους φτάνει κάποια τυχαία στιγμή, περιμένει για 20 λεπτά, και αν δεν έρθει ο άλλος φεύγει. Ποια η πιθανότητα να συναντηθούν;

Λύση

Αν $x \in [0, 60]$ είναι η χρονική στιγμή άφιξης του Χ στο διάστημα 5:00 μέχρι 6:00 και $y \in [0, 60]$ είναι η χρονική στιγμή άφιξης του Υ, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ως δειγματικό χώρο το σύνολο των σημείων του τετραγώνου $[0, 60] \times [0, 60]$.
Οι δύο φίλοι θα συναντηθούν ανν $|x - y| \leq 20$, επομένως το ενδεχόμενο A οι δύο φίλοι να συναντηθούν αντιστοιχεί στα σημεία του χωρίου με $|x - y| \leq 20$, το οποίο περιγράφεται στο σχήμα:

Λύση (συνέχεια).



Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το πηλίκο των εμβαδόν των δύο χωρίων:

$$P(A) = \frac{60^2 - 2\frac{1}{2}40^2}{60^2} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \simeq 0.55.$$

Άσκηση

Ρίχνουμε τρία αμερόληπτα ζάρια. Να βρεθεί τι είναι πιο πιθανό: οι ενδείξεις να αθροίζουν στο 11 ή στο 12;

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από τις διατεταγμένες τριάδες των ενδείξεων των τριών ζαριών, δηλαδή $\Omega = \{(x,y,z) : 1 \leq x,y,z \leq 6\}$, οπότε $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$.
Έστω A το ενδεχόμενο τα τρία ζάρια να αθροίζουν στο 11 και B το ενδεχόμενο τα τρία ζάρια να αθροίζουν στο 12.
Το ενδεχόμενο A αποτελείται από τις 27 παρακάτω ισοπίθανες τριάδες:

(6, 4, 1)	(6, 3, 2)	(6, 2, 3)	(6, 1, 4)	(5, 5, 1)	(5, 4, 2)	(5, 3, 3)	(5, 2, 4)	(5, 1, 5)
(4, 6, 1)	(4, 5, 2)	(4, 4, 3)	(4, 3, 4)	(4, 2, 5)	(4, 1, 6)	(3, 6, 2)	(3, 5, 3)	(3, 3, 5)
(3, 4, 4)	(3, 2, 6)	(2, 6, 3)	(2, 5, 4)	(2, 4, 5)	(2, 3, 6)	(1, 6, 4)	(1, 5, 5)	(1, 4, 6)

Επομένως, $P(A) = \dfrac{27}{6^3}$.

Λυμένες ασκήσεις

Λύση (συνέχεια)

Το ενδεχόμενο B αποτελείται από τις 25 παρακάτω ισοπίθανες τριάδες:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(6,5,1) & (6,4,2) & (6,3,3) & (6,2,4) & (6,1,5) & (5,6,1) & (5,5,2) & (5,4,3) & (5,3,4) \\
(5,2,5) & (5,1,6) & (4,6,2) & (4,5,3) & (4,4,4) & (4,3,5) & (4,2,6) & (3,6,3) & (3,5,4) \\
(3,4,5) & (3,3,6) & (2,6,4) & (2,5,5) & (2,4,6) & (1,6,5) & (1,5,6) & &
\end{array}$$

Επομένως, $P(B) = \dfrac{25}{6^3}$.

Επομένως, είναι πιο πιθανό να φέρουμε 11 από ότι 12.

Παρατήρηση: Με γνώσεις Συνδυαστικής, ο πληθάριθμος $|A|$ μπορεί να υπολογιστεί ως ο συντελεστής του x^{11} στην γεννήτρια συνάρτηση (πολυώνυμο)

$$
\begin{aligned}
&(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3 = x^3(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3 \\
=&x^3\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3 \\
=&x^3+3x^4+6x^5+10x^6+15x^7+21x^8+25x^9+27x^{10}+27x^{11} \\
&+25x^{12}+21x^{13}+15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}.
\end{aligned}
$$

Απάντηση

Παρατήρηση: Το ερώτημα αυτό είχε τεθεί στον Pascal από τον Chevalier de Mere, ο οποίος ενώ εμπειρικά γνώριζε ότι το 11 εμφανίζεται συχνότερα από το 12, εν τούτοις προσπαθώντας να υπολογίσει τις αντίστοιχες πιθανότητες θεωρούσε (**εσφαλμένα**) ως δειγματικό χώρο τις μη διατεταγμένες τριάδες, όπου στο ενδεχόμενο A αντιστοιχούν οι 6 τριάδες:

$$\{6,4,1\} \quad \{6,3,2\} \quad \{5,5,1\} \quad \{5,4,2\} \quad \{5,3,3\} \quad \{4,4,3\}$$

ενώ στο ενδεχόμενο B αντιστοιχούν οι 6 τριάδες:

$$\{6,5,1\} \quad \{6,4,2\} \quad \{6,3,3\} \quad \{5,5,2\} \quad \{5,4,3\} \quad \{4,4,4\}$$

οπότε σύμφωνα με τον Chevalier de Mere οι πιθανότητες θα έπρεπε να είναι ίσες.

Άσκηση

Έστω A_1, A_2, A_3 τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι $P(A_1) = \frac{1}{3}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$, $P(A_3) = \frac{1}{4}$. Να εξετασθεί αν τα A_1, A_2, A_3 είναι ανά δύο ξένα.

Λύση

Έστω ότι τα A_1, A_2, A_3 είναι ανά δύο ξένα. Τότε,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4+6+3}{12} > 1.$$

Επομένως, τα A_1, A_2, A_3 δεν είναι ανά δύο ξένα.

Άσκηση

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Αν $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A\cap B)$, $P(A\cap \overline{B})$ και $P(\overline{A}\cap \overline{B})$.

Λύση

Ισχύει ότι

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}.$$

$$P(A\cap \overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{6}{12}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}.$$

$$P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

Άσκηση

Αν $P(A \cup B) = P(A \cap B)$, όπου A, B είναι δύο μη κενά υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω, να δειχθεί ότι

i) $P(A) = P(B)$

(*ii*) $A = B$.

Λύση

(*i*) Προφανώς, $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ και $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ οπότε

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$

και

$$P(A \cap B) \leq P(B) \leq P(A \cup B).$$

Επειδή, $P(A \cap B) = P(A \cup B)$, έπεται ότι

$$P(A \cap B) = P(A) = P(B) = P(A \cup B).$$

Λύση (συνέχεια)

(ii) Γενικά ισχύει ότι

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$

επειδή $P(A \cap B) = P(A \cup B)$ έπεται ότι

$$P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0 \Leftrightarrow P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = 0$$

Λόγω μη αρνητικότητας της πιθανότητας έπεται ότι $P(A \setminus B) = P(B \setminus A) = 0$, οπότε $A \setminus B = \varnothing$ και $B \setminus A = \varnothing$, δηλαδή $B \subseteq A$ και $A \subseteq B$, άρα $A = B$.

Άσκηση

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{3}{8}$, να δειχθεί ότι $\frac{3}{8} \leq P(A \cup B) \leq \frac{17}{24}$.

Λύση

Επειδή $A, B \subseteq A \cup B$ έπεται ότι $P(A \cup B) \geq P(A)$ και $P(A \cup B) \geq P(B)$, οπότε

$$P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\} = \max\{\frac{1}{3}, \frac{3}{8}\} = \frac{3}{8}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{17}{24}.$$

Άσκηση

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$ να δειχθεί ότι $\frac{5}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{2}{3}$.

Λύση

Ισχύει ότι $P(A \cap B) \leq P(A)$ και $P(A \cap B) \leq P(B)$ επομένως

$$P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\} = \min\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Επιπλέον,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{5}{12}.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $P(A \cup B) \leq 1$, η οποία μας έδωσε χρήσιμη πληροφορία διότι είχαμε $P(A) + P(B) > 1$.

Άσκηση (Ανισότητα Bonferroni)

i) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B ισχύει ότι

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

ii) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ισχύει ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1)$$

Λύση

(i) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$, διότι $P(A \cup B) \leq 1$.

Λύση (συνέχεια)

(ii) Από τους κανόνες του De Morgan έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= P(\overline{(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n})}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}) \\
&\geq 1 - P(\overline{A_1}) - P(\overline{A_2}) - \cdots - P(\overline{A_n}) \\
&= 1 - (1 - P(A_1)) - \cdots - (1 - P(A_n)) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - n + 1
\end{aligned}$$

Ανεξαρτησία

Ορισμός (Δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα)

Τα ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Παράδειγμα

- Οι διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού είναι ανεξάρτητες (το ζάρι δεν έχει μνήμη!)
- Η θερμοκρασία στην Αθήνα σήμερα και η θερμοκρασία στην Αθήνα αύριο δεν είναι ανεξάρτητες.

Παρατηρήσεις:

- Η έννοια της ανεξαρτησίας μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πιθανότητες που αλλιώς θα ήταν πολύ δύσκολο να τις υπολογίσουμε!
- Η έννοια της ανεξαρτησίας σχετίζεται με την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας που εισάγεται στην επόμενη ενότητα.

Ανεξαρτησία

Πρόταση.

Αν τα ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$ είναι ανεξάρτητα, τότε τα ενδεχόμενα

i) $A, \overline{B}$ είναι ανεξάρτητα.

ii) $\overline{A}, \overline{B}$ είναι ανεξάρτητα.

Απόδειξη.

Απόδειξη (i) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}). \end{aligned}$$

(ii) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) - P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) - P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B}) \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα

Ρίχνουμε 3 φορές ένα αμερόληπτο νόμισμα.

i) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.

ii) Να βρεθεί το ενδεχόμενο A να μην εμφανισθεί κορώνα σε καμία από τις 3 ρίψεις.

iii) Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A)$.

Λύση

(i) $\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$, $|\Omega| = 2^3 = 8$.

(ii) $A = \{\Gamma\Gamma\Gamma\}$.

(iii) Αφού όλα τα $\omega \in \Omega$ είναι ισοπίθανα, $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{8}$.

(2ος τρόπος) Κάθε ρίψη του νομίσματος είναι ανεξάρτητη από τις άλλες. Το A πραγματοποιείται αν δεν έρθει κορώνα ούτε στην 1η, ούτε στην 2η, ούτε στην 3η ρίψη, οπότε $P(A) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Παράδειγμα (Κορώνα ή γράμματα με μεροληπτικό νόμισμα)

Ένα νόμισμα δεν είναι αμερόληπτο, αλλά εμφανίζει κορώνα με πιθανότητα p και γράμματα με πιθανότητα $q = 1 - p$, με $p \in (0, 1)$. Να βρεθεί ένας τρόπος να χρησιμοποιήσουμε το νόμισμα αυτό με δίκαιο τρόπο (δηλαδή να επιλέξουμε ανάμεσα σε δύο ενδεχόμενα με πιθανότητα $1/2$ το καθένα).

Λύση του Von Neumann

Ρίχνουμε το νόμισμα 2 φορές:
- Αν φέρει κορώνα και μετά γράμματα, θεωρούμε ότι έφερε κορώνα.
- Αν φέρει γράμματα και μετά κορώνα, θεωρούμε ότι έφερε γράμματα.
- Αν φέρει δύο ίδια αποτελέσματα, τότε ξαναρίχνουμε από την αρχή.

Λύση (συνέχεια)

Επειδή το ζάρι δεν έχει μνήμη:
Η πιθανότητα να φέρει πρώτα κορώνα και μετά γράμματα είναι $p \cdot q$.
Η πιθανότητα να φέρει πρώτα γράμματα και μετά κορώνα είναι $q \cdot p$.
Η πιθανότητα να φέρει 2 φορές γράμματα είναι q^2.
Η πιθανότητα να φέρει 2 φορές κορώνα είναι p^2.
Άρα, ο τρόπος αυτός είναι δίκαιος, αφού έχει την ίδια πιθανότητα.

Παρατήρηση: Η μέθοδος αυτή, που ονομάζεται **τέχνασμα του Von Neumann**, έχει το μειονέκτημα ότι ανάλογα με τα p, q μπορεί να χρειαστεί να επαναλάβουμε τις ρίψεις πολλές φορές. Συγκεκριμένα, η πιθανότητα επιτυχίας είναι $2pq$ και, με βάση την γεωμετρική κατανομή που θα δούμε αργότερα, ο αναμενόμενος αριθμός επαναλήψεων μέχρι την πρώτη επιτυχία είναι $\frac{1}{2pq}$.

Παρατήρηση: Δεν είναι πάντα προφανές αν δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο τετράεδρο ζάρι δύο φορές για το οποίο τα 16 δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $1/16$.

i) Να εξετασθεί αν τα ενδεχόμενα
A: Η 1η ρίψη είναι 1.
B: Το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι 5.
είναι ανεξάρτητα ή όχι.

ii) Να εξετασθεί αν τα ενδεχόμενα
A: Το μέγιστο των δύο ρίψεων είναι 2.
B: Το ελάχιστο των δύο ρίψεων είναι 2.
είναι ανεξάρτητα ή όχι.

Λύση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο $\Omega = \{(i, j) : i, j \in [4]\}$.
Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cap B)$.

(*i*) $A = \{(1, j) : j = 1, 2, 3, 4\} = \{11, 12, 13, 14\}$. Άρα, $P(A) = \dfrac{1}{4}$.

$B = \{(i, j) : i + j = 5\} = \{14, 23, 32, 41\}$. Άρα, $P(B) = \dfrac{1}{4}$.

$A \cap B = \{14\}$. Άρα, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{16} = P(A) \cdot P(B)$, δηλαδή τα A, B είναι ανεξάρτητα.

(*ii*) $A = \{(i, j) : \max(i, j) = 2\} = \{12, 21, 22\}$. Άρα, $P(A) = \dfrac{3}{16}$.

$B = \{(i, j) : \min(i, j) = 2\} = \{22, 23, 24, 32, 42\}$. Άρα, $P(B) = \dfrac{5}{16}$.

$A \cap B = \{22\}$. Άρα, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{16}$.

Οπότε, $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{3}{16} \cdot \dfrac{5}{16} \neq \dfrac{1}{16} = P(A \cap B)$, δηλαδή τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

Ανεξαρτησία

Η ανεξαρτησία n ενδεχομένων ορίζεται ως εξής:

Ορισμός (n ανεξάρτητα ενδεχόμενα)

Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ ονομάζονται (πλήρως) ανεξάρτητα αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ του $[n]$, όπου $2 \leq k \leq n$, ισχύει ότι

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Παράδειγμα (Ο νόμος του Murphy)

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ανεξάρτητα ‘‘όχι και τόσο ευχάριστα’’ ενδεχόμενα που μπορούν να μας συμβούν με μικρές πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_n$ το καθένα.
Να βρεθεί η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από αυτά.

Ανεξαρτησία

Λύση

Είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε την συμπληρωματική πιθανότητα να μην συμβεί κανένα από αυτά τα ενδεχόμενα. Επειδή τα A_1, A_2, ..., A_n είναι ανεξάρτητα έπεται ότι και τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι επίσης ανεξάρτητα.

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n}) \\
&= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n))
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα $1 + x \leq e^x$ έπεται ότι $(1 - P(A_i)) \leq e^{-P(A_i)}$ για κάθε $i \in [n]$, άρα

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &\geq 1 - e^{-P(A_1)} e^{-P(A_2)} \ldots e^{-P(A_n)} \\
&= 1 - e^{-(P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n))}
\end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Άρα,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \geq 1 - e^{-(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να συμβεί κάθε ένα από τα ενδεχόμενα αυτά είναι αρκετά μικρή, για παράδειγμα $p = \frac{1}{1000}$ η ανισότητα που βρήκαμε μας λέει πως αν υπάρχουν πολλά τέτοια σπάνια ''όχι τόσο ευχάριστα ενδεχόμενα'' για παράδειγμα έστω ότι υπάρχουν 100 τέτοια ενδεχόμενα, τότε η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα είναι μεγαλύτερη ή ίση από

$$1 - e^{-\frac{100}{1000}} = 1 - e^{-\frac{1}{10}} = 0.0951 = 9.5\%,$$

με άλλα λόγια αν υπάρχουν πολλά πράγματα που μπορούν ''να πάνε στραβά'' (π.χ. 100) ακόμα και με μικρή πιθανότητα το καθένα (π.χ 1 στις 1000) τότε περίπου 1 στις 10 μέρες τουλάχιστον ένα πράγμα θα ''πηγαίνει στραβά'' (μια εκδοχή του **νόμου του Murphy**.)

Ανεξαρτησία

Επίσης, η ανεξαρτησία αριθμήσιμου πλήθους ενδεχομένων ορίζεται ως εξής:

Ορισμός (Άπειρα ανεξάρτητα ενδεχόμενα).

Τα ενδεχόμενα $A_i \subseteq \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, ονομάζονται (πλήρως) ανεξάρτητα αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα.

Πρόταση.

Αν (A_n), $n \in \mathbb{N}^*$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty,$$

τότε

$$P(\limsup A_n) = 1.$$

Άσκηση

Ένας επιστήμονας έστειλε τα αποτελέσματα της έρευνάς του για δημοσίευση σε ένα από τα γνωστά διεθνή περιοδικά. Η εργασία του φτάνει σε 3 ανεξάρτητους κριτές, οι οποίοι αξιολογούν θετικά με πιθανότητες $6/11$, $3/7$ και $4/9$ αντίστοιχα. Ποια είναι η πιθανότητα η πλειοψηφία των κριτών να αξιολογήσει θετικά την εργασία του επιστήμονα, οπότε αυτή να δημοσιευθεί;

Λύση

Έστω A_1, A_2 και A_3 το ενδεχόμενο η εργασία να γίνει αποδεκτή από τον 1ο, 2ο και 3ο κριτή αντίστοιχα και A το ενδεχόμενο η εργασία να γίνει δεκτή από το περιοδικό. Τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι ανεξάρτητα.
Για να γίνει δεκτή η εργασία υπάρχουν 4 ξένες ανά δύο περιπτώσεις, που αντιστοιχούν στους παρακάτω όρους του αθροίσματος:

Λύση (συνέχεια)

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \\
&\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) \\
&\quad + P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\
&= \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{11 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{6 \cdot 4 \cdot 4}{11 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{11 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{6 \cdot 3 \cdot 4}{11 \cdot 7 \cdot 9} \\
&= \frac{106}{231} = 0.4588 = 45.88\%
\end{aligned}$$

Άσκηση

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός ατόμων που πρέπει να ρωτήσουμε αν έχουν γενέθλια σήμερα, ώστε η πιθανότητα ένα τουλάχιστον άτομο να έχει γενέθλια σήμερα να είναι τουλάχιστον $\frac{1}{2}$. (Υποθέτουμε ότι τα γενέθλια κάθε ατόμου είναι ανεξάρτητα.)

Λύση

Έστω ότι ρωτάμε n άτομα και A το ενδεχόμενο ένα τουλάχιστον από τα άτομα αυτά να έχει γενέθλια σήμερα.
Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\overline{A}$ (κανένα από τα άτομα αυτά να μην έχει γενέθλια σήμερα).

$$P(\overline{A}) = \underbrace{\frac{364}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdots \frac{364}{365}}_{n \text{ φορές}} = \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

Ψάχνουμε το ελάχιστο n ώστε

Λύση (συνέχεια)

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{A}) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{364}{365}\right)^n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq \left(\frac{365}{364}\right)^n$$
$$\Leftrightarrow \ln 2 \leq n \ln \frac{365}{364} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln 365 - \ln 364} = 252.652.$$

Άρα, ο ελάχιστος αριθμός ατόμων που πρέπει να ρωτήσουμε είναι $n = 253$.

Άσκηση

i) Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός ρίψεων δύο ζαριών ώστε η πιθανότητα να έρθουν ''εξάρες'' σ' αυτές τις ρίψεις να είναι μεγαλύτερη ή ίση του $1/2$·

ii) Αν διπλασιάσουμε τον αριθμό των ρίψεων του προηγούμενου ερωτήματος, θα διπλασιαστεί η πιθανότητα να έρθουν ''εξάρες'';

Λύση

(*i*) Έστω ότι ρίχνουμε τα δύο ζάρια n φορές και A_n το ενδεχόμενο μια τουλάχιστον φορά στις n ρίψεις να φέρουμε ''εξάρες''. Ψάχνουμε το ελάχιστο n ώστε $P(A_n) \geq \frac{1}{2}$. Θα υπολογίσουμε το ενδεχόμενο $\overline{A_n}$: Καμία φορά στις n ρίψεις να μην φέρουμε ''εξάρες''. Ισχύει ότι

$$P(\overline{A_n}) = \underbrace{\frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdots \frac{35}{36}}_{n \text{ φορές}} = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

Λύση (συνέχεια)

Επομένως,

$$P(A_n) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{A_n}) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq \left(\frac{36}{35}\right)^n$$
$$\Leftrightarrow \ln 2 \leq n \ln \frac{36}{35} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} = 24.605.$$

Άρα, απαιτούνται τουλάχιστον 25 ρίψεις των δύο ζαριών για να φέρουμε ‘‘εξάρες’’ με πιθανότητα τουλάχιστον $\frac{1}{2}$.
(ii) Όχι, η πιθανότητα να έρθουν ‘‘εξάρες’’ δεν είναι γραμμική συνάρτηση του αριθμού n των ρίψεων. Συγκεκριμένα, με $2 \cdot 25 = 50$ ρίψεις, η αντίστοιχη πιθανότητα είναι

$$P(A_{50}) = 1 - P(\overline{A_{50}}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{50} = 0.755 = 75.5\%$$

Άσκηση

Κατά την ρίψη 3 ζαριών οι ενδείξεις τους αθροίζουν στο 7. Να βρεθεί η πιθανότητα τουλάχιστον μια από τις ενδείξεις να ισούται με 1.

Λύση

Δεδομένου ότι κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο είναι ισοπίθανο και το άθροισμα των ενδείξεων αθροίζει στο 7, μπορούμε να υπολογίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα απαριθμώντας όλες τις περιπτώσεις (ευνοϊκές και μη).

Οι τριάδες που αθροίζουν στο 7 είναι οι εξής: 115, 124, 133, 142, 151, 214, 223, 232, 241, 313, 322, 331, 412, 421, 511. Άρα, υπάρχουν 15 τέτοιες τριάδες.

Από τις παραπάνω, οι τριάδες που δεν περιέχουν 1 είναι οι εξής: 223, 232, 322. Άρα, υπάρχουν 12 τριάδες που περιέχουν 1.

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $\frac{12}{15} = 0.8$.

Δεσμευμένη πιθανότητα

Μερικές φορές σε κάποιο δειγματικό χώρο Ω υπάρχουν ενδεχόμενα A, B τα οποία δεν είναι ανεξάρτητα. Για παράδειγμα, έστω ο δειγματικός χώρος Ω που περιλαμβάνει (όλα) τα γεγονότα που μπορούν να συμβούν στη ζωή μας σήμερα! Θεωρήστε τα ενδεχόμενα:

- A: Σήμερα το πρωί, οι δρόμοι θα έχουν μποτιλιάρισμα.
- B: Θα αργήσω να φτάσω στη δουλειά μου το πρωί.

Η πραγματοποίηση ή μη του ενδεχόμενου A μπορεί να επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου B. Προκειμένου να χειριστούμε τέτοιες περιπτώσεις θα εισάγουμε την έννοια της δεσμεύμενης πιθανότητας.

Ορισμός - Δεσμευμένη πιθανότητα

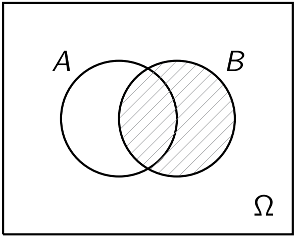
Η **δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου** A **δεδομένου του ενδεχομένου** $B \neq \varnothing$ συμβολίζεται με $P(A|B)$ και ορίζεται ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Δεσμευμένη πιθανότητα

Η συνάρτηση της δεσμευμένης πιθανότητας είναι συνάρτηση πιθανότητας, δηλαδή ικανοποιεί τα αξιώματα του ορισμού της πιθανότητας:

- $P(A|B) \geq 0$, για κάθε $A \subseteq \Omega$. Πράγματι,
$$P(A \cap B) \geq 0, P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0.$$
- $P(\Omega|B) = 1$. Πράγματι, $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.
- $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i|B)$, για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω. Πράγματι, τα σύνολα $A_i \cap B$, $i \in \mathbb{N}^*$, είναι προφανώς ανά δύο ξένα, οπότε
$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{P((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_i \cap B))}{P(B)}$$
$$= \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i|B).$$



Διαισθητικά, όταν είναι δεδομένο το B, τότε αυτό αποτελεί τον νέο, συρρικνωμένο, δειγματικό χώρο που περιλαμβάνει όλα τα δυνατά αποτελέσματα.
Εξάλλου, είναι $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \Omega)/P(\Omega) = P(A|\Omega)$, δηλαδή και η πιθανότητα $P(A)$ μπορεί να θεωρηθεί ως δεσμευμένη, με δεσμό το Ω. Επομένως, η συνάρτηση της δεσμευμένης πιθανότητας ικανοποιεί και τις ιδιότητες της πιθανότητας.

Ιδιότητες δεσμευμένης πιθανότητας

Αν $A, B, C, D \subseteq \Omega$, με $D \neq \varnothing$ τότε

1. $P(\overline{A}|D) = 1 - P(A|D)$
2. $P(\varnothing|D) = 0$
3. $P(A|D) \leq 1$
4. $P(A \setminus B|D) = P(A \cap \overline{B}|D) = P(A|D) - P(A \cap B|D)$
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A|D) \leq P(B|D)$
6. $P(A \cup B|D) = P(A|D) + P(B|D) - P(A \cap B|D)$
7. $P(A \cup B \cup C|D) = P(A|D) + P(B|D) + P(C|D) - P(A \cap B|D) - P(A \cap C|D) - P(B \cap C|D) + P(A \cap B \cap C|D)$

Δεσμευμένη πιθανότητα

Παράδειγμα

Έστω ένα αμερόληπτο ζάρι. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
A: Το ζάρι φέρνει 1.
B: Το ζάρι φέρνει περιττό αριθμό.
C: Το ζάρι δεν φέρνει 5.
Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(B|C)$, $P(C|B)$.

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Επίσης

$$A = \{1\},\ B = \{1, 3, 5\},\ C = \{1, 2, 3, 4, 6\},\ A \cap B = \{1\},\ B \cap C = \{1, 3\}$$

Επειδή τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, έχουμε ότι

$$P(A) = \frac{1}{6},\ P(B) = \frac{3}{6},\ P(C) = \frac{5}{6},\ P(A \cap B) = \frac{1}{6},\ P(B \cap C) = \frac{2}{6},$$

οπότε

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}, \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1,$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{5}, \qquad P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{2}{3}.$$

Πολλές φορές είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου A δεδομένου του B, από ότι την πιθανότητα της τομής $A \cap B$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

προκύπτει ο χρήσιμος τύπος

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Επιπλέον, κάθε σύνολο A εκφράζεται ως ξένη ένωση των συνόλων $A \cap B, A \cap \overline{B}$, για οποιοδήποτε σύνολο $B \subseteq \Omega$, δηλαδή

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

Τύπος ολικής πιθανότητας

Γενικότερα, αν τα $B_1, B_2, \ldots, B_n$ διαμερίζουν το Ω, τότε τα $A \cap B_1, A \cap B_2, \ldots, A \cap B_n$ διαμερίζουν το A, δηλαδή

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap B_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i).$$

Με βάση τους προηγούμενους τύπους, προκύπτει ο τύπος της ολικής πιθανότητας:

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

Αν τα (μη κενά) σύνολα της οικογένειας $(B_i)_{i\in[n]}$, $n \in \mathbb{N}^*$, αποτελούν διαμέριση του Ω, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Τύπος ολικής πιθανότητας

Παράδειγμα

Σε ένα διήγημα της Αγκάθα Κρίστι ο ντετέκτιβ Πουαρό έχει συγκεντρώσει τους 7 εξίσου υπόπτους (μεταξύ των οποίων και η ανιψιά του δολοφονηθέντος) σε ένα κυκλικό τραπέζι ενώ ο ίδιος στέκεται όρθιος δίπλα τους. Ποια είναι η πιθανότητα η ανιψιά να κάθεται δίπλα στον δολοφόνο;

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο η ανιψιά να είναι δολοφόνος και B το ενδεχόμενο η ανιψιά να κάθεται δίπλα στον δολοφόνο. Τότε $P(A) = 1/7$, $P(B|A) = 0$, $P(B|\overline{A}) = 2/6$ (διότι υπάρχουν 6 θέσεις για να καθίσει ο δολοφόνος και εκ των οποίων δύο είναι δίπλα στην ανιψιά). Από τον τύπο της ολικής πιθανότητας έχουμε ότι

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = 0 \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{6}\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{7}.$$

Τύπος ολικής πιθανότητας

Παράδειγμα

Σε ένα τουρνουά σκάκι υπάρχουν 3 κατηγορίες παιχτών: A, B, Γ.
Οι πιθανότητες να κερδίσουμε κάποιον από τις τρεις κατηγορίες A, B, Γ, είναι 0.3, 0.4, 0.5 αντίστοιχα.
Η πιθανότητα κάποιος παίχτης να ανήκει στην κατηγορία A είναι 0.5, στην B είναι 0.25 και στην Γ είναι 0.25.
Ποια είναι η πιθανότητα να παίξουμε με ένα τυχαίο παίχτη του τουρνουά και να κερδίσουμε;

Λύση

Έστω W το ενδεχόμενο να κερδίσουμε και A, B, Γ το ενδεχόμενο να παίξουμε με κάποιο παίχτη που ανήκει στην κατηγορία A, B, Γ αντίστοιχα. Από τον τύπο της ολικής πιθανότητας, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(W) &= P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) + P(W|\Gamma)P(\Gamma) \\ &= 0.3 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.25 = 0.375. \end{aligned}$$

Τύπος του Bayes

Για τα ενδεχόμενα $A, B \neq \varnothing$, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε ότι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{και} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \qquad \text{και} \qquad P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των δύο τελευταίων τύπων, προκύπτει ο (διάσημος) τύπος του Bayes (Μπέιζ):

Τύπος του Bayes

Για κάθε $A, B \subseteq \Omega$, με $A, B \neq \varnothing$, ισχύει ότι

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Τύπος του Bayes

Επίσης, χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, σύμφωνα με το οποίο είναι

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j),$$

όταν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ διαμερίζουν το Ω, ο τύπος του Bayes μπορεί να γραφεί ως εξής:

Τύπος του Bayes

Αν η οικογένεια $(A_i)_{i\in[n]}$, $n \in \mathbb{N}^*$, αποτελεί διαμέριση του Ω, τότε για κάθε μη κενό ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ και για κάθε $i \in [n]$ ισχύει

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Παράδειγμα

Ένας χρήστης έχει παρατηρήσει ότι, από τα email που λαμβάνει καθημερινά, το 60% είναι γραμμένα στα Αγγλικά και το υπόλοιπο 40% στα Ελληνικά. Επίσης, έχει παρατηρήσει ότι, από τα email στα Αγγλικά, το 90% είναι ανεπιθύμητα (spam) και, από τα email στα Ελληνικά, το 30% είναι ανεπιθύμητα.

Να βρεθεί η πιθανότητα ένα email που διαβάζει ο χρήστης να είναι spam.

Να βρεθεί η πιθανότητα ένα spam email που διαβάζει ο χρήστης να είναι γραμμένο στα Ελληνικά.

Λύση

Θέτουμε A το ενδεχόμενο το email να είναι γραμμένο στα Αγγλικά, E το ενδεχόμενο το email να είναι γραμμένο στα Ελληνικά και S το ενδεχόμενο το email να είναι spam.
Από τα δεδομένα της εκφώνησης, έχουμε ότι

$$P(A) = 0.6, \quad P(E) = 0.4, \quad P(S|A) = 0.9, \quad P(S|E) = 0.3.$$

Επιπλέον, από τον τύπο ολικής πιθανότητας, είναι

$$P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|E)P(E) = 0.9 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.66.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο του Bayes, είναι

$$P(E|S) = \frac{P(S|E)P(E)}{P(S)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.66} = 0.1818.$$

Παράδειγμα

Έστω ότι μια πάθηση του αίματος εμφανίζεται με συχνότητα 2 φορές στα 1000 άτομα. Υπάρχει ένα τεστ για την πάθηση αυτή το οποίο έχει ποσοστό σφάλματος 5%, τόσο στους υγιείς, όσο και στους ασθενείς. Να βρεθεί η πιθανότητα κάποιος άνθρωπος X να πάσχει από αυτήν την πάθηση δεδομένου ότι το τεστ βγήκε θετικό.

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο ο X να έχει την πάθηση αυτή και Θ το ενδεχόμενο το τεστ να βγει θετικό. Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A|\Theta)$. Γνωρίζουμε (από την εκφώνηση) ότι

$$P(A) = 0.002,$$

$$P(\Theta|A) = P(\overline{\Theta}|\overline{A}) = 0.95,$$

$$P(\overline{\Theta}|A) = P(\Theta|\overline{A}) = 0.05.$$

Λύση (συνέχεια)

Από τον τύπο του Bayes, έχουμε ότι $P(A|\Theta) = \dfrac{P(\Theta|A)P(A)}{P(\Theta)}$.

Επιπλέον, επειδή κάθε άνθρωπος ή πάσχει ή δεν πάσχει από την πάθηση, έπεται ότι τα $A, \overline{A}$ αποτελούν διαμέριση του Ω, οπότε, από τον τύπο της ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(\Theta) &= P(\Theta|A)P(A) + P(\Theta|\overline{A})P(\overline{A}) = 0.95 \cdot 0.002 + 0.05 \cdot 0.998 \\ &= 0.0518. \end{aligned}$$

Άρα,

$$P(A|\Theta) = \frac{P(\Theta|A)P(A)}{P(\Theta)} = \frac{0.95 \cdot 0.002}{0.0518} = 0.03667 \approx 3.67\%$$

Τύπος του Bayes

Το αποτέλεσμα του τεστ ονομάζεται

- ψευδώς ή αληθώς αρνητικό (False Negative - FN, True Negative - TN), όταν προκύπτει αρνητικό σε ασθενή ή υγιή άνθρωπο αντίστοιχα και
- ψευδώς ή αληθώς θετικό (False Positive - FP, True Positive - TP), όταν προκύπτει θετικό σε υγιή ή ασθενή άνθρωπο αντίστοιχα.

Οι δείκτες

- ευαισθησία (sensitivity - TPR),
- εξειδίκευση (specificity - TNR),
- θετική προβλεπτική αξία (positive predictive value - PPV),
- αρνητική προβλεπτική αξία (negative predictive value - NPV) και
- ακρίβεια (accuracy - ACC)

ορίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα (όπου οι ποσότητες TP, TN, FP, FN αναφέρονται σε πλήθος αποτελεσμάτων, κατόπιν διεξαγωγής του τεστ σε όλον τον πληθυσμό):

Error Rate = (FP+FN)/ (TP+TN+FP+FN)

Recall or True positive rate

False positive rate = FP/ (FP+TN)

		Predicted Class		
		Positive	**Negative**	
Actual Class	**Positive**	True Positive (TP)	False Negative (FN) **Type II Error**	**Sensitivity** $\frac{TP}{(TP+FN)}$
	Negative	False Positive (FP) **Type I Error**	True Negative (TN)	**Specificity** $\frac{TN}{(TN+FP)}$ True negative rate
		Precision $\frac{TP}{(TP+FP)}$ Positive Predicted value	**Negative Predictive Value** $\frac{TN}{(TN+FN)}$	**Accuracy** $\frac{TP+TN}{(TP+TN+FP+FN)}$

Τύπος του Bayes

Ερμηνεύοντας τη συχνότητα εμφάνισης κάθε αποτελέσματος ως πιθανότητα, οι παραπάνω δείκτες σχετίζονται με τις δεσμευμένες πιθανότητες ως εξής:

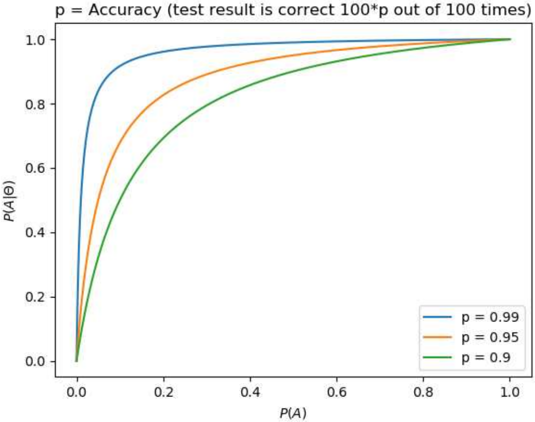
- $P(A|\Theta) = \dfrac{P(A\cap\Theta)}{P(A\cap\Theta)+P(\overline{A}\cap\Theta)} = \dfrac{TP}{TP+FP} = PPV$
- $P(\overline{A}|\overline{\Theta}) = \dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{\Theta})}{P(\overline{A}\cap\overline{\Theta})+P(A\cap\overline{\Theta})} = \dfrac{TN}{TN+FN} = NPV$
- $P(\overline{\Theta}|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{\Theta})}{P(\overline{A}\cap\overline{\Theta})+P(\overline{A}\cap\Theta)} = \dfrac{TN}{TN+FP} = TNR$ (specificity)
- $P(\Theta|A) = \dfrac{P(A\cap\Theta)}{P(A\cap\Theta)+P(A\cap\overline{\Theta})} = \dfrac{TP}{TP+FN} = TPR$ (sensitivity)
- $P((\Theta\cap A)\cup(\overline{\Theta}\cap\overline{A})) = P(\Theta\cap A)+P(\overline{\Theta}\cap\overline{A}) = P(\Theta|A)P(A)+P(\overline{\Theta}|\overline{A})P(\overline{A}) = ACC$

Παρατηρήστε ότι, όταν $TPR = TNR$ (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα), τότε είναι $TPR = TNR = ACC$. Γενικά όμως, είναι $TPR \neq TNR$ και η ακρίβεια ACC είναι ένας σταθμισμένος μέσος των TPR και TNR (όπως προκύπτει από τον τελευταίο τύπο).

Η πιθανότητα $P(A|\Theta)$ που υπολογίσθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα ισούται με την PPV, δηλαδή αν γίνει το τεστ σε όλον τον πληθυσμό, αναμένεται το 3.67% των θετικών να είναι πραγματικά ασθενείς. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό, δηλαδή που η πιθανότητα $P(A|\Theta)$ είναι πολύ μικρότερη της πιθανότητας 0.95 ορθού αποτελέσματος του τεστ ($\mathrm{ACC} = 95\%$), είναι ότι το ποσοστό $P(A) = 0.002$ των ασθενών στον πληθυσμό είναι πολύ μικρό. Έτσι το πλήθος των FP είναι πολύ μεγάλο (το 5% των υγιών) σε σχέση με τα TP (το 95% των ασθενών).
Αν και η πιθανότητα ασθένειας μετά το τεστ είναι μικρή (3.67%), ωστόσο είναι πολύ μεγαλύτερη από την πιθανότητα πριν το τεστ (0.2%), δηλαδή το τεστ έδωσε ένα σημαντικό ποσό πληροφορίας. Το επόμενο ερώτημα είναι το ποια θα είναι η πιθανότητα ασθένειας μετά από ένα δεύτερο θετικό τεστ. Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, χρειαζόμαστε την έννοια της ανεξαρτησίας υπό συνθήκη που παρουσιάζεται παρακάτω (βλ. Παράδειγμα 87).

Τύπος του Bayes

Στην επόμενη γραφική παράσταση, φαίνεται η εξέλιξη της τιμής της $P(A|\Theta)$, καθώς αυξάνει το ποσοστό $P(A)$ ασθένειας στον πληθυσμό, για διάφορες τιμές ACC.



Τύπος του Bayes

Το προηγούμενο σχήμα παράγεται με τον ακόλουθο κώδικα:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

p = [0.99, 0.95, 0.9] #accuracy: test result is correct 100*p out of 100 times
def f(p,x): #implementation of Bayes' rule
    return p*x/(p*x + (1-p)*(1-x)) #0<=x<=1 is the percentage of sick people

x = np.linspace(0,1,1001) #1001 evenly spaced values from 0 to 1
y = np.zeros((len(p), len(x))) #len(p) rows and len(x) columns filled with zeros
for i in range(len(p)):
    y[i] = f(p[i],x) #1001 results
    plt.plot(x, y[i], label = "p = %s"%(p[i]))

plt.title("p = Accuracy (test result is correct 100*p out of 100 times)")
plt.xlabel("$P(A)$")
plt.ylabel("$P(A|\Theta)$")
plt.legend()
plt.show()
```

Παράδειγμα

Σε κάποιο μάθημα εξετάστηκαν 250 άτομα, τα οποία τοποθετήθηκαν σε 3 αίθουσες A, B, Γ: 70 στην A, 90 στην B και τα υπόλοιπα στην Γ. Προβιβάσιμο βαθμό πήρε το 80% των γραπτών της αίθουσας A, το 88% της B και το 72% της Γ.

i) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν εξεταζόμενο ποια είναι η πιθανότητα το γραπτό του να βαθμολογήθηκε κάτω από τη βάση;

ii) Αν πάρουμε ένα γραπτό που έχει βαθμολογηθεί πάνω από τη βάση, ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από την αίθουσα A;

Λύση

Θέτουμε F το ενδεχόμενο να επιλεχθεί εξεταζόμενος που πήρε βαθμό κάτω από την βάση και A, B, Γ τα ενδεχόμενα να προέρχεται από την αίθουσα A, B, Γ αντίστοιχα.
(i) Από τον τύπο της ολικής πιθανότητας προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|\Gamma)P(\Gamma) \\ &= 0.2 \cdot \frac{70}{250} + 0.12 \cdot \frac{90}{250} + 0.28 \cdot \frac{90}{250} = 0.2 \end{aligned}$$

(ii) Από τον τύπο του Bayes έχουμε ότι

$$P(A|\overline{F}) = \frac{P(\overline{F}|A)P(A)}{P(\overline{F})} = \frac{P(\overline{F}|A)P(A)}{1 - P(F)} = \frac{0.8 \cdot \frac{70}{250}}{1 - 0.2} = 0.28.$$

Κανόνας του πολλαπλασιασμού

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ο τύπος του Bayes δίνει άλλον έναν χαρακτηρισμό της ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων: Επειδή

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) \qquad \text{και} \qquad P(B|A) = P(A \cap B)/P(A),$$

προκύπτει ότι τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν είναι $P(A|B) = P(A)$ (ή, ισοδύναμα, $P(B|A) = P(B)$).

Πρόταση.

Δύο ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$P(A|B) = P(A) \qquad \text{ή} \qquad P(B|A) = P(B).$$

Κανόνας του πολλαπλασιασμού

Στην περίπτωση που τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου δεν είναι κατ΄ ανάγκη ανεξάρτητα, ο παρακάτω τύπος είναι πολύ χρήσιμος.

Πρόταση.

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ με $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Τότε

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Απόδειξη.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \\
&= P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})} \\
&= P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n).
\end{aligned}$$

□

Κανόνας του πολλαπλασιασμού

Παράδειγμα - Έλεγχος ποιότητας

Ένας ελεγκτής ποιότητας εξετάζει μια παρτίδα με 100 τεμάχια ενός προϊόντος επιλέγοντας 5 τεμάχια (χωρίς επανατοποθέτηση). Αν κανένα από τα τεμάχια δεν είναι ελαττωματικό, τότε η παρτίδα γίνεται αποδεκτή, αλλιώς υποβάλλεται σε περαιτέρω ελέγχους. Να βρεθεί η πιθανότητα μια παρτίδα που περιέχει 5 ελαττωματικά τεμάχια να γίνει αποδεκτή.

Λύση

Έστω A_i το ενδεχόμενο το i-στό τεμάχιο που ελέγχεται να μην είναι ελαττωματικό, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Μια παρτίδα γίνεται δεκτή αν πραγματοποιηθούν και τα 5 ενδεχόμενα, επομένως μας ενδιαφέρει η πιθανότητα $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$.
Από τον κανόνα του πολλαπλασιασμού έχουμε ότι

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_5) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot P(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Λύση (συνέχεια)

Επίσης,

$P(A_1) = \frac{95}{100}$, $P(A_2|A_1) = \frac{94}{99}$, $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{93}{98}$,

$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{92}{97}$, $P(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{91}{96}$.

Επομένως,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = 0.76959.$$

Αν είχαμε επανατοποθέτηση των τεμαχίων, το πρόβλημα θα λυνόταν πιο εύκολα:

$P(A_1) = P(A_2|A_1) = P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{95}{100}$.

Επομένως,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \left(\frac{95}{100}\right)^5 = 0.773781.$$

Ανεξαρτησία υπό συνθήκη

Επειδή η δεσμευμένη πιθανότητα είναι συνάρτηση πιθανότητας μπορούμε να μιλάμε και για ανεξαρτησία ενδεχομένων υπό συνθήκη (conditional independence).

Ορισμός - Ανεξαρτησία υπό συνθήκη.

Έστω $\varnothing \neq C \subseteq \Omega$. Τα $A, B \subseteq \Omega$ ονομάζονται **υπό συνθήκη** ή **υπό δέσμευση ανεξάρτητα δεδομένου του** C αν και μόνο αν

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C).$$

Παρατηρήστε ότι γενικά

$$\begin{aligned} P(A \cap B|C) &= P(A \cap B \cap C)/P(C) = P(C)P(B|C)P(A|B \cap C)/P(C) \\ &= P(B|C)P(A|B \cap C). \end{aligned}$$

Για να είναι τα A, B υπο συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του C πρέπει

$$P(A|B \cap C) = P(A|C)$$

δηλαδή αν είναι γνωστό ότι το C έχει συμβεί, η επιπλέον πληροφορία ότι το B έχει επίσης συμβεί να μην αλλάζει την πιθανότητα του A.

Ανεξαρτησία υπό συνθήκη

Παράδειγμα

Για το παράδειγμα 72, να βρεθεί η πιθανότητα κάποιος άνθρωπος να πάσχει από αυτή την πάθηση, δεδομένου ότι υποβλήθηκε σε δύο διαδοχικά τεστ, τα οποία βγήκαν θετικά.

Λύση

Υπενθυμίζεται ότι το ποσοστό του πληθυσμού που έχει την πάθηση είναι $x = 0.002$ και ότι το τεστ δίνει σωστό αποτέλεσμα με πιθανότητα $p = P(\Theta|A) = P(\overline{\Theta}|\overline{A}) = 0.95$. Συμβολίζουμε με Θ_1 και Θ_2 τα ενδεχόμενα να βγουν θετικά το πρώτο και το δεύτερο τεστ αντίστοιχα. Τα ενδεχόμενα Θ_1 και Θ_2 δεν είναι ανεξάρτητα, αλλά είναι ανεξάρτητα δεδομένου του A, δηλαδή $P(\Theta_1 \cap \Theta_2|A) = P(\Theta_1|A)P(\Theta_2|A) = p^2$. Με απλά λόγια, αν κάποιος που είναι ασθενής υποβληθεί σε διαδοχικά τεστ, το κάθε ένα από αυτά θα βγαίνει θετικό με πιθανότητα $p = 0.95$ και ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

Λύση (συνέχεια)

Ζητάμε την πιθανότητα $P(A|\Theta_1 \cap \Theta_2)$ και χρησιμοποιώντας τους τύπους του Bayes και της υπό συνθήκη ανεξαρτησίας, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
P(A|\Theta_1 \cap \Theta_2) &= \frac{P(\Theta_1 \cap \Theta_2|A)P(A)}{P(\Theta_1 \cap \Theta_2)} \\
&= \frac{P(\Theta_1 \cap \Theta_2|A)P(A)}{P(\Theta_1 \cap \Theta_2|A)P(A) + P(\Theta_1 \cap \Theta_2|\overline{A})P(\overline{A})} \\
&= \frac{P(\Theta_1|A)P(\Theta_2|A)P(A)}{P(\Theta_1|A)P(\Theta_2|A)P(A) + P(\Theta_1|\overline{A})P(\Theta_2|\overline{A})P(\overline{A})} \\
&= \frac{p^2 \cdot x}{p^2 \cdot x + (1-p)^2(1-x)} \approx 0.42.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Από το σύνολο των γυναικών που κάνουν τεστ εγκυμοσύνης, μόνο το 12% είναι έγκυες. Έστω ότι ένα τεστ εγκυμοσύνης έχει τις εξής πιθανότητες:

$$P(\text{ΘΕΤΙΚΟ}|\text{ΟΧΙ ΕΓΚΥΟΣ}) = 1\%, \quad P(\text{ΑΡΝΗΤΙΚΟ}|\text{ΕΓΚΥΟΣ}) = 3\%.$$

i) Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι έγκυος μια γυναίκα που κάνει το τεστ και βγαίνει θετικό.

ii) Ποια είναι η αντίστοιχη πιθανότητα να είναι έγκυος για μια γυναίκα που κάνει το τεστ 2 ανεξάρτητες φορές και την πρώτη φορά βγαίνει θετικό ενώ την δεύτερη φορά αρνητικό;

Λύση

Θέτουμε E το ενδεχόμενο να είναι έγκυος και Θ το ενδεχόμενο το τεστ να βγει θετικό.
(i) Από τον τύπο της ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(\Theta) &= P(\Theta|E)P(E) + P(\Theta|\overline{E})P(\overline{E}) \\ &= 0.97 \cdot 0.12 + 0.01 \cdot 0.88 = 0.1252 = 12.52\% \end{aligned}$$

Επομένως,

$$P(\mathrm{E}|\Theta) = \frac{P(\Theta|E)P(\mathrm{E})}{P(\Theta)} = \frac{0.97 \cdot 0.12}{0.1252} = 0.9297$$

(ii) Έστω Θ_1, Θ_2 τα ενδεχόμενα την πρώτη και δεύτερη φορά το τεστ να βγει θετικό αντίστοιχα. Από τον τύπο του Bayes ισχύει ότι

Ανεξαρτησία υπό συνθήκη

Λύση (συνέχεια)

$$P(E|\Theta_1 \cap \overline{\Theta_2}) = \frac{P(\Theta_1 \cap \overline{\Theta_2}|E)P(E)}{P(\Theta_1 \cap \overline{\Theta_2})}$$

Λόγω ανεξαρτησίας των Θ_1, $\overline{\Theta_2}$ δεδομένου του E, έπεται ότι

$$P(\Theta_1 \cap \overline{\Theta_2}|E) = P(\Theta_1|E)P(\overline{\Theta_2}|E) = 0.97 \cdot 0.03 = 0.0291.$$

Επίσης, από τον τύπο της ολικής πιθανότητας, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(\Theta_1 \cap \overline{\Theta_2}) &= P(\Theta_1 \cap \overline{\Theta_2}|E)P(E) + P(\Theta_1 \cap \overline{\Theta_2}|\overline{E})P(\overline{E}) \\ &= P(\Theta_1|E)P(\overline{\Theta_2}|E)P(E) + P(\Theta_1|\overline{E})P(\overline{\Theta_2}|\overline{E})P(\overline{E}) \\ &= 0.97 \cdot 0.03 \cdot 0.12 + 0.01 \cdot 0.99 \cdot 0.88 = 0.012204. \end{aligned}$$

Άρα, $P(E|\Theta_1 \cap \overline{\Theta_2}) = \dfrac{0.0291 \cdot 0.12}{0.012204} = 0.286136 = 28.6\%$.

Άσκηση

Ο Κώστας απαντάει σε ένα τεστ με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, το οποίο περιέχει 30 ερωτήσεις με 5 επιλογές, μία σωστή και τέσσερεις λάθος. Ο Κώστας γνωρίζει την απάντηση σε κάποιες από αυτές, ενώ τις υπόλοιπες τις απαντάει στην τύχη. Η πιθανότητα να γνωρίζει μια απάντηση δεδομένου ότι απάντησε σωστά στην ερώτηση είναι 0.9.

i) Να υπολογισθεί πόσες από τις 30 ερωτήσεις αναμένεται να γνώριζε ο Κώστας.
(Υπόδειξη: Να βρεθεί η πιθανότητα p ο Κώστας να γνωρίζει την απάντηση σε μια ερώτηση.)

ii) Να υπολογισθεί σε πόσες από τις 30 ερωτήσεις απάντησε σωστά ο Κώστας.

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο ο Κώστας να γνωρίζει την απάντηση σε μια ερώτηση και έστω B το ενδεχόμενο να απαντήσει σωστά στην ερώτηση. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι

$$P(B|A) = 1, \quad P(B|\overline{A}) = 1/5 = 0.2, \quad P(A|B) = 0.9$$

i) Έστω $P(A) = p$, οπότε $P(\overline{A}) = 1 - p$. Από τον τύπο του Bayes έχουμε ότι

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})}.$$

Αντικαθιστώντας από τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει ότι

$$0.9 = \frac{p \cdot 1}{1 \cdot p + 0.2 \cdot (1-p)} \Leftrightarrow 0.9 \cdot (0.8 \cdot p + 0.2) = p \Leftrightarrow p = 0.64$$

Λύση (συνέχεια)

Άρα, ο Κώστας αναμένεται να γνώριζε την απάντηση σε $30 \cdot 0.64 = 19.2$ ερωτήσεις.
ii) Έστω $P(B) = q$. Από τον τύπο της ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = 1 \cdot 0.64 + 0.2 \cdot 0.36 = 0.712$$

Άρα, ο Κώστας αναμένεται να απαντήσει σωστά σε $30 \cdot 0.712 = 21.36$ ερωτήσεις.

Άσκηση

Δέκα ελικόπτερα χρησιμοποιούνται για την αναζήτηση ενός αγνοούμενου ορειβάτη, ο οποίος μπορεί να βρίσκεται σε μία από δύο πιθανές περιοχές με πιθανότητες 0.7 και 0.3 αντίστοιχα. Κάθε ελικόπτερο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μία μόνο περιοχή και έχει πιθανότητα 0.2 να βρει τον αγνοούμενο, αν αυτός βρίσκεται στην περιοχή που ερευνά.

Να βρεθεί πόσα ελικόπτερα πρέπει να σταλούν σε κάθε περιοχή, ώστε η πιθανότητα να βρεθεί ο αγνοούμενος να είναι η μέγιστη δυνατή. Ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί ο αγνοούμενος σε αυτή την περίπτωση;

(Υπόδειξη: Υποθέστε ότι k ελικόπτερα κατανέμονται στην πρώτη περιοχή και $10 - k$ ελικόπτερα στην δεύτερη περιοχή.)

Λύση

Θέτουμε A το ενδεχόμενο να βρεθεί ο ορειβάτης από κάποιο ελικόπτερο, B_1 το ενδεχόμενο ο ορειβάτης να βρίσκεται στην πρώτη περιοχή και B_2 το ενδεχόμενο να βρίσκεται στην δεύτερη περιοχή.
Γνωρίζουμε ότι $P(B_1) = 0.7$ και $P(B_2) = 0.3$.
Αν κατανέμονται k ελικόπτερα στην πρώτη περιοχή και $10 - k$ ελικόπτερα στην δεύτερη, τότε

$$P(A|B_1) = 1 - P(\overline{A}|B_1) = 1 - 0.8^k \quad \text{και}$$
$$P(A|B_2) = 1 - P(\overline{A}|B_2) = 1 - 0.8^{10-k}.$$

Επομένως, από τον τύπο της ολικής πιθανότητας, έχουμε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \\ &= (1 - 0.8^k) \cdot 0.7 + (1 - 0.8^{10-k}) \cdot 0.3 \\ &= 1 - 0.7 \cdot 0.8^k - 0.3 \cdot 0.8^{10-k} \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Οι τιμές της $P(A)$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ δίνονται στον επόμενο πίνακα:

k	0	1	2	3	4	5
$P(A)$	0.267	0.399	0.501	0.578	0.634	0.672
k	6	7	8	9	10	
$P(A)$	0.693	0.699	0.690	0.666	0.624	

από όπου προκύπτει ότι η $P(A)$ μεγιστοποιείται όταν 7 ελικόπτερα κατανέμονται στην πρώτη περιοχή (και 3 στη δεύτερη) και η αντίστοιχη πιθανότητα να βρεθεί ο ορειβάτης είναι $0.699 \approx 70\%$.

Άσκηση

Ο Πάνος και η Ελένη σχεδιάζουν χωριστά και μυστικά ο ένας από τον άλλον να πάρουν δώρο για την επέτειό τους. Σκοπεύουν να πληρώσουν με κάρτα από τον κοινό τους λογαριασμό για έκτακτες αγορές, που έχει υπόλοιπο 500 ευρώ. Αν ο καθένας σχεδιάζει να πάρει δώρα οποιασδήποτε αξίας από 100 μέχρι 300 ευρώ, να υπολογισθεί η πιθανότητα

i) να μην φτάσουν τα χρήματα στον ένα από τους δύο,

ii) να μείνουν τουλάχιστον 100 ευρώ για δείπνο σε εστιατόριο.

Λύση

Θέτουμε X, Y τα ποσά που θα ξοδεύσει ο Πάνος και η Μαρία αντίστοιχα. Το ζεύγος (X, Y) μπορεί να θεωρηθεί ως τυχαίο σημείο στο τετράγωνο $[100, 300] \times [100, 300]$.

i) Για μην φθάσουν τα χρήματα, θα πρέπει $X + Y > 500$, το οποίο συμβαίνει για όλα τα σημεία $(X, Y) \in [300, 300]$ που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $X + Y = 500$, οπότε

$$P(X + Y > 500) = \frac{100 \cdot 100/2}{200^2} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

ii) Για να μείνουν τουλάχιστον 100 ευρώ για δείπνο, θα πρέπει $X + Y \leq 400$, το οποίο συμβαίνει για όλα τα σημεία $(X, Y) \in [300, 300]$ που βρίσκονται όχι πάνω από την ευθεία $X + Y = 400$.

$$P(X+Y \leq 400) = 1 - P(X+Y > 400) = 1 - \frac{200 \cdot 200/2}{200^2} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5.$$

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση

Έχουμε n δοχεία, καθένα εκ των οποίων περιέχει a λευκές και b μαύρες μπάλες. Μια μπάλα επιλέγεται τυχαία από το πρώτο δοχείο και μεταφέρεται στο δεύτερο, στην συνέχεια μια μπάλα επιλέγεται τυχαία από το δεύτερο δοχείο και μεταφέρεται στο τρίτο, κ.ο.κ. Στο τέλος, μια μπάλα επιλέγεται τυχαία από το τελευταίο δοχείο. Να βρεθεί η πιθανότητα η μπάλα που επιλέχθηκε να είναι λευκή.

Λύση

Θέτουμε A_1 το ενδεχόμενο να μεταφέρθηκε λευκή μπάλα από το πρώτο στο δεύτερο δοχείο και A_2 το ενδεχόμενο να επιλεγεί μια λευκή μπάλα από το δεύτερο δοχείο μετά την πρώτη μεταφορά. Ισχύει ότι

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b}, \qquad P(\overline{A_1}) = \frac{b}{a+b} \quad \text{και}$$
$$P(A_2|A_1) = \frac{a+1}{a+b+1}, \qquad P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{a}{a+b+1}$$

Λύση (συνέχεια)

Αφού τα A_1, $\overline{A_1}$ διαμερίζουν τον δειγματικό χώρο, από τον τύπο της ολικής πιθανότητας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) \\ &= \frac{a+1}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+1} \cdot \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a(a+1+b)}{(a+b+1)(a+b)} = \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

Άρα, η πιθανότητα να επιλεγεί μια λευκή μπάλα από το δεύτερο δοχείο μετά από την μεταφορά είναι η ίδια όπως και πριν την μεταφορά. Συνεπώς, και η αντίστοιχη πιθανότητα να επιλεγεί μια λευκή μπάλα από το τρίτο δοχείο είναι επίσης ίδια με πριν, ομοίως για το τέταρτο κ.ο.κ., όπως και για το τελευταίο. Άρα, η πιθανότητα να επιλεγεί μια λευκή μπάλα από το n-οστό δοχείο ισούται με $a/(a+b)$.

Άσκηση

Δύο διαφορετικοί αριθμοί επιλέγονται τυχαία από το σύνολο $[n]$. Να βρεθεί η πιθανότητα η διαφορά ανάμεσα στον πρώτο και στον δεύτερο αριθμό να είναι μεγαλύτερη ή ίση με m, όπου $m > 0$.

Λύση

Έστω H_k το ενδεχόμενο ο πρώτος αριθμός να είναι το k. Προφανώς, $P(H_k) = 1/n$. Επιπλέον, θέτουμε A το ενδεχόμενο η διαφορά ανάμεσα στον πρώτο αριθμό k και τον δεύτερο αριθμό (έστω t) να είναι μεγαλύτερη ή ίση με m (δηλαδή $k - t \geq m$). Ισχύει ότι

$$P(A|H_k) = \begin{cases} \dfrac{k-m}{n-1}, & \text{αν } k = m+1, \ldots, n \\ 0, & \text{αν } k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

αφού στην πρώτη περίπτωση ο αριθμός t πρέπει να ανήκει στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, k-m\}$, ενώ στην δεύτερη περίπτωση δεν υπάρχει τέτοιος t.

Λύση (συνέχεια)

Τα ενδεχόμενα $H_1, H_2, \dots, H_n$ αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου, οπότε από το θεώρημα ολικής πιθανότητας, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)P(H_k) = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{k-m}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=m+1}^{n} (k-m) \overset{\lambda=k-m}{=} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\lambda=1}^{n-m} \lambda \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-m)(n-m+1)}{2}. \end{aligned}$$

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση

Δύο φίλοι κάθονται σε μια σειρά ανθρώπων, ο πρώτος στην αρχή της σειράς και ο δεύτερος στο τέλος της. Ανάμεσά τους κάθονται n άτομα $L_1, L_2, \ldots, L_n$, τα οποία έχουν την τάση να λένε ψέμματα. Αν ακούσουν ΝΑΙ τότε με πιθανότητα $p < 1$ μεταφέρουν στον επόμενο ΟΧΙ και με πιθανότητα $1 - p$ μεταφέρουν ΝΑΙ, και αν ακούσουν ΟΧΙ τότε με πιθανότητα p μεταφέρουν ΝΑΙ και με πιθανότητα $1 - p$ μεταφέρουν ΟΧΙ. Να βρεθεί η πιθανότητα p_n ο L_n να πει στον δεύτερο φίλο ΝΑΙ δεδομένου ότι ο πρώτος φίλος είπε στον L_1 ΝΑΙ.

Λύση

Θέτουμε p_i την πιθανότητα ο L_i να πει ΝΑΙ (ανεξαρτήτως τι άκουσε), οπότε $p_1 = 1 - p$ και, για κάθε $i = 2, 3, \ldots, n$,

$$p_i = p_{i-1}(1 - p) + (1 - p_{i-1})p = (1 - 2p)p_{i-1} + p.$$

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, η ακολουθία (p_i) ικανοποιεί την γραμμική αναγωγική σχέση

$$p_i - (1-2p)p_{i-1} = p \text{ για } i \geq 2, \qquad p_1 = 1-p.$$

Από την χαρακτηριστική εξίσωση $x-(1-2p)=0$, προκύπτει ότι η λύση της ομογενούς είναι η $q_i = c(1-2p)^i$. Επιπλέον, επειδή p είναι σταθερά που δεν εξαρτάται από το i, η μερική λύση είναι μια σταθερά A. Αντικαθιστώντας στην αναγωγική σχέση της p_i, έχουμε ότι

$$A-(1-2p)A = p \Leftrightarrow A = 1/2.$$

Επομένως, η γενική λύση είναι $p_i = q_i + A = c(1-2p)^i + \frac{1}{2}$. Για $i=1$, έχουμε ότι $c(1-2p) + \frac{1}{2} = 1-p \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$, άρα τελικά ισχύει ότι $p_i = \frac{1}{2}((1-2p)^i + 1)$.

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$p_n = \frac{1}{2}\left(\left(1-2p\right)^n + 1\right).$$

Καθώς $n \to \infty$ η πιθανότητα $p_n \to 1/2$, δηλαδή καθώς αυξάνει το n χάνεται η πληροφορία που μεταφέρουν οι ενδιάμεσοι αφού στο τέλος όλα είναι ισοπίθανα.

Άσκηση

Έστω ότι κάποια άτομα μιας ομάδας συμπληρώνουν επώνυμα ένα ερωτηματολόγιο και έστω ότι θέλουμε να μάθουμε το ποσοστό των ατόμων της ομάδας τα οποία έχουν μια ιδιότητα, αλλά είτε λόγω προσωπικών δεδομένων είτε επειδή η ερώτηση είναι αδιάκριτη, δεν μπορούμε να ρωτήσουμε ευθέως κάθε άτομο. Μια λύση στο πρόβλημα δίνεται από το παρακάτω πρωτόκολλο, το οποίο βασίζεται στην τυχαιότητα: Κάθε άτομο ρίχνει μυστικά ένα νόμισμα.

- Αν έρθει Κορώνα, τότε πρέπει να απαντήσει ειλικρινώς αν έχει ή όχι την ιδιότητα, με ΝΑΙ ή ΟΧΙ.
- Αν έρθει Γράμματα, τότε ξαναρίχνει το νόμισμα και αν έρθει Κορώνα απαντάει ΝΑΙ, ενώ αν έρθει Γράμματα απαντάει ΟΧΙ.

Να δειχθεί ότι, με βάση τον συνολικό αριθμό των απαντήσεων ΝΑΙ και ΟΧΙ, μπορούμε κατά προσέγγιση να βρούμε το ποσοστό των ανθρώπων που έχουν την ιδιότητα, χωρίς να γνωρίζουμε για κάθε άτομο αν την έχει ή όχι.

Λύση

Θέτουμε A το ενδεχόμενο ένα άτομο να έχει την ιδιότητα, N το ενδεχόμενο ένα άτομο να απάντησε ΝΑΙ, K_1 το ενδεχόμενο το νόμισμα να φέρει την πρώτη φορά Κορώνα, K_2 το ενδεχόμενο το νόμισμα να φέρει την δεύτερη φορά Κορώνα, Γ_1 το ενδεχόμενα το νόμισμα να φέρει την πρώτη φορά Γράμματα, Γ_2 το ενδεχόμενο το νόμισμα να φέρει την δεύτερη φορά Γράμματα.
Το ενδεχόμενο κάποιο άτομο να απαντήσει ΝΑΙ πραγματοποιείται όταν το άτομο ρίξει ΚΟΡΩΝΑ και έχει την ιδιότητα A, ή όταν το άτομο ρίξει ΓΡΑΜΜΑΤΑ και μετά ξαναρίξει ΚΟΡΩΝΑ. Προφανώς, τα ενδεχόμενα A και K_1 είναι ανεξάρτητα, όπως και τα ενδεχόμενα Γ_1 και K_2. Επομένως, η πιθανότητα $P(N)$ να απαντήσει ΝΑΙ ακολουθώντας τους κανόνες του πρωτοκόλλου είναι

Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
P(N) &= P(K_1 \cap A) + P(\Gamma_1 \cap K_2) = P(A)P(K_1) + P(\Gamma_1)P(\Gamma_1) \\
&= P(A) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

και προφανώς είναι συνάρτηση της άγνωστης πιθανότητας $P(A)$.
Επίσης, έστω ότι x άτομα απάντησαν ΝΑΙ και y άτομα απάντησαν ΟΧΙ, οπότε $\dfrac{x}{x+y} \approx P(N)$. (Οι αριθμοί x και y θα διαφέρουν σε διαδοχικές επαναλήψεις του πειράματος, αλλά το κλάσμα $x/(x+y)$ περιμένουμε να είναι πάντα σχετικά κοντά στην πραγματική άγνωστη πιθανότητα $P(N)$.)
Επομένως, λύνοντας ως προς το $P(A)$, προκύπτει ότι

$$
P(A) = \frac{4P(N) - 1}{2} \approx \frac{3x - y}{2(x+y)} = \frac{4x - n}{2n}, \qquad \text{όπου } n = x + y.
$$

Για παράδειγμα, έστω ότι χρησιμοποιούμε το πρωτόκολλο αυτό και ρωτάμε 100 άτομα. Αν απαντήσουν ΝΑΙ $x = 63$ άτομα (και άρα $y = 37$ απαντήσουν ΟΧΙ), τότε,

$$P(A) \approx \frac{3 \cdot 63 - 37}{200} = \frac{152}{200} = \frac{76}{100},$$

δηλαδή περίπου το 76% των ατόμων έχουν την ιδιότητα αυτή.
Παρατήρηση: Ο αριθμός x που απάντησαν ΝΑΙ σχηματίζεται ως εξής: Τα μισά περίπου άτομα θα φέρουν την πρώτη φορά ΓΡΑΜΜΑΤΑ και μετά τα μισά από αυτά θα φέρουν ΚΟΡΩΝΑ και τα μισά περίπου άτομα θα φέρουν την πρώτη φορά ΚΟΡΩΝΑ και από αυτά ποσοστό $P(A) \cdot 100\%$ θα απαντήσουν ΝΑΙ. Άρα,
$x = \frac{x+y}{4} + \frac{x+y}{2} P(A) \Leftrightarrow P(A) = \frac{3x - y}{2(x+y)}$.

Λυμένες ασκήσεις

Ο ακόλουθος κώδικας (σε Python) προσομοιώνει το πρωτόκολλο αυτό σε ένα σύνολο N ανθρώπων, εκ των οποίων m έχουν την συγκεκριμένη ιδιότητα.

```python
import random
N = 10000 #population size
m = 4320  #number of individuals having property P
a = m*[1] + (N-m)*[0] #list of true answers, m Yes and N-m No
x = 0 #number of Yes answers
h, th = 0, 0
for i in range(len(a)):
    if random.choice([0,1]) == 1: #if 1: heads
        h += 1; x += a[i] #then answer the truth
    elif random.choice([0,1]) == 1: #if heads after tails
        th += 1; x += 1 #then answer yes
print("Actual number of people having P: %s"%(m))
print("Estimated number of people having P: %s"%((4*x-N)/2))
print("true answers rate: %s, forced yes answers rate: %s"%(h/N,
    th/N))
```

Output:

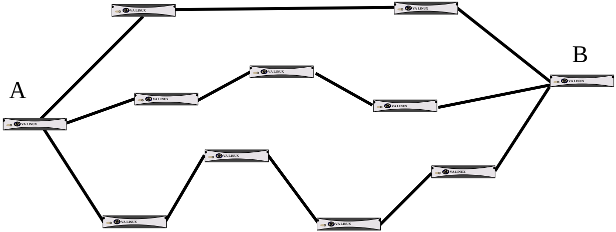
```
Actual number of people having P: 4320
Estimated number of people having P: 4400.0
true answers rate: 0.4988, forced yes answers rate: 0.2497
```

1. Μια εργαζόμενη ζήτησε από τον προϊστάμενό της μια συστατική επιστολή για μια καινούργια δουλειά. Εκτιμά ότι έχει 80% πιθανότητα να προσληφθεί αν η συστατική είναι καλή, 40% πιθανότητα αν η επιστολή είναι μέτρια, και 10% πιθανότητα αν η επιστολή είναι κακή. Επιπλέον, εκτιμά ότι οι πιθανότητες να είναι η συστατική καλή, μέτρια ή κακή είναι 0.7, 0.2 και 0.1 αντίστοιχα.
   α) Πόσο σίγουρη είναι ότι θα προσληφθεί στην νέα δουλειά;
   β) Με δεδομένο ότι προσλαμβάνεται, πόσο πιθανό είναι να έλαβε καλή, μέτρια, ή κακή συστατική επιστολή;
   γ) Με δεδομένο ότι δεν προσλαμβάνεται, πόσο πιθανό είναι να έλαβε καλή, μέτρια ή κακή συστατική επιστολή;

2. Σε ένα μεγάλο δείγμα ποδοσφαιρόφιλων διαπιστώθηκε ότι 20% υποστηρίζουν την Α.Ε.Κ., 35% τον Π.Α.Ο. και 45% τον Ο.Σ.Φ.Π. Από τους συγκεριμένους φιλάθλους της Α.Ε.Κ. υπάρχει ποσοστό 4% που υποστηρίζει ως δεύτερη προτίμηση τον Πανιώνιο, το 2% των φιλάθλων του Π.Α.Ο. υποστηρίζει ως δεύτερη ομάδα επίσης τον Πανιώνιο και το 3% των φιλάθλων του Ο.Σ.Φ.Π. υποστηρίζει ως δεύτερη επιλογή τον Πανιώνιο.
Επιλέγουμε τυχαία ένα φίλαθλο:
α) Να προσδιορισθεί η πιθανότητα να υποστηρίζει τον Πανιώνιο.
β) Να βρεθεί ποια είναι η πιο πιθανή ομάδα που υποστηρίζει δεδομένου ότι δηλώνει ότι δεν είναι φίλαθλος του Πανιώνιου.

Ασκήσεις προς επίλυση

3. Ανάμεσα σε δύο υπολογιστές A και B ενός δικτύου υπάρχουν 3 διαφορετικά μονοπάτια δρομολόγησης πακέτων με μήκη 3, 4, 5 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Για την επικοινωνία μεταξύ τους, ο υπολογιστής A επιλέγει να χρησιμοποιήσει ένα από τα 3 μονοπάτια με πιθανότητα $1/2$, $1/3$ και $1/6$ αντίστοιχα.
Σε κάθε δεσμό που συνδέει δύο κόμβους των μονοπατιών υπάρχει πιθανότητα p να χαθεί το πακέτο που μεταφέρεται.
Να υπολογισθεί, συναρτήσει του p, η πιθανότητα ένα πακέτο που αποστέλλεται από τον υπολογιστή A να φτάσει στον υπολογιστή B.

Ασκήσεις προς επίλυση

4. Για μια ομάδα ατόμων έχουμε συλλέξει τα παρακάτω δεδομένα

age	income	student	credit rating	buys computer
≤ 30	high	no	fair	no
≤ 30	high	no	excellent	no
31..40	high	no	fair	yes
> 40	medium	no	fair	yes
> 40	low	yes	fair	yes
> 40	low	yes	excellent	no
31..40	low	yes	excellent	yes
≤ 30	medium	no	fair	no
≤ 30	low	yes	fair	yes
> 40	medium	yes	fair	yes
≤ 30	medium	yes	excellent	yes
31..40	medium	no	excellent	yes
31..40	high	yes	fair	yes
> 40	medium	no	excellent	no

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα που θα κατηγοριοποιούσαμε ένα άτομο με τα παρακάτω χαρακτηριστικά

age	income	student	credit rating	buys computer
> 40	high	no	excellent	?