ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
2η σειρά ασκήσεων

1		2		3		4		5		6	
7		8		9		10		11		12	
13		14		15		16		17			

Να λυθούν **14** από τις ασκήσεις που ακολουθούν.
Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στην εργασία που θα παραδώσετε, αφού σημειώσετε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας, καθώς και με ✓στον παραπάνω πίνακα τις ασκήσεις που λύσατε. Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγραφά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε.
Η εργασία μπορεί να παραδοθεί ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 5MB, στο email `jtas@unipi.gr`.
Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι probstat2_pX.pdf, όπου X ο αριθμός μητρώου σας.
Η εργασία είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

Ονοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Προθεσμία παράδοσης: **30 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2023**

Άσκηση 1 (Τυχαία μεταβλητή Ι). *Έστω συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f(x) = \begin{cases} c + x/4, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

i) *Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c;*

ii) *Ποια είναι η μέση τιμή $E(X)$;*

iii) *Ποια είναι η διακύμανση της X;*

Άσκηση 2 (Τυχαία μεταβλητή ΙΙ). *Έστω συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = ce^{-4|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Να υπολογισθούν:*

i) *Η τιμή της παραμέτρου c.*

ii) *Η μέση τιμή $E(X)$.*

iii) *Η διακύμανση* $\mathrm{Var}(X)$.

iv) *Η πιθανότητα $P(|X| > 1/2)$.*

v) *Το φράγμα Chebyshev για την πιθανότητα $P(|X| > 1/2)$.*

Άσκηση 3 (Αναμονή για τον προαστιακό). *Ο προαστιακός συρμός εκτελεί το δρομολόγιο που συνδέει το αεροδρόμιο με την πόλη κάθε 15 λεπτά.*

i) *Αν ο χρόνος αναμονής ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, ποια είναι η πιθανότητα κάποιος επιβάτης να περιμένει πάνω από 6 λεπτά για το τρένο;*

ii) *Δεδομένου ότι ένας επιβάτης ήδη περιμένει 8 λεπτά για το τρένο, ποια είναι η πιθανότητα να περιμένει άλλα 2 λεπτά;*

Άσκηση 4 (Χρόνος ζωής μπαταρίας). *Ο χρόνος ζωής X μια μπαταρίας τηλεφώνου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 4 χρόνια. Να υπολογισθεί*

α) Η διακύμανση του χρόνου ζωής της μπαταρίας.

β) Η πιθανότητα να αντέξει πάνω από 5 χρόνια.

γ) Η πιθανότητα μια μπαταρία να αντέξει τουλάχιστον 5 χρόνια με δεδομένο ότι λειτουργεί ήδη 4 χρόνια.

δ) να βρεθεί το c για το οποίο $P(X > c) = .25$.

Άσκηση 5 (Επίπεδα βροχόπτωσης). *Η (συνολική) ετήσια βροχόπτωση (σε εκατοστά) σε μια συγκεκριμένη περιοχή κατανέμεται ομοιόμορφα με μέση τιμή $\mu = 100$ και $\sigma = 20$. Να βρεθεί η πιθανότητα, ξεκινώντας από την φετινή χρονιά, να περάσουν πάνω από 10 χρόνια μέχρις ότου έχουμε πάνω από 127 εκατοστά βροχής σε μια χρονιά. Τι υποθέσεις κάνατε για τον υπολογισμό της απάντησης;*

Άσκηση 6 (Βάρη φοιτητών). *Το 90% των φοιτητών ενός Τμήματος έχουν βάρος μικρότερο ή ίσο των 90 κιλών και το 8% μικρότερο ή ίσο των 58 κιλών. Αν το βάρος των φοιτητών ακολουθεί την κανονική κατανομή, να βρεθεί*

α) το ποσοστό των φοιτητών με βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 80 κιλών.

β) το ποσοστό των φοιτητών με βάρος ανάμεσα στα 70 και 80 κιλά.

Άσκηση 7 (Ανάλυση κέρματος). *Ένα κέρμα φέρνει κορώνα με άγνωστη πιθανότητα* $p \in (0,1)$. *Να υπολογισθούν:*

i) *Πώς θα εκτιμούσατε το* p*;*

ii) *Πόσες ρίψεις απαιτούνται ώστε η εκτίμησή σας να έχει σφάλμα μεγαλύτερο του* 1% *με πιθανότητα μικρότερη του* 1%*; Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Chebyshev.*

Άσκηση 8 (Μέτρηση ρύπων). *Σε μια διαδικασία μέτρησης ρύπων συλλέγονται 5 δείγματα αέρα. Κάθε ένα από αυτά έχει ανεξάρτητα από τα άλλα περιεκτικότητα σε ρύπους που κατανέμεται ομοιόμορφα από 0 έως 12* $\mathrm{gr/m^3}$. *Το αποτέλεσμα είναι αρνητικό αν και τα 5 δείγματα έχουν περιεκτικότητα σε ρύπους μικρότερη των* $3.5\mathrm{gr/m^3}$. *Ποια η πιθανότητα να είναι θετικό το αποτέλεσμα;*

Άσκηση 9 (Έλεγχος δημοσκόπησης). *Θέλουμε να ελέγξουμε την ακρίβεια μιας δημοσκόπησης, κατά την οποία 100 τυχαία επιλεγμένοι πολίτες ερωτώνται αν συμφωνούν ή όχι με κάποιο μέτρο της κυβέρνησης. Έστω ότι το αληθινό ποσοστό αυτών που συμφωνούν είναι* $p = 30\%$ *(στον συνολικό πληθυσμό). Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το ποσοστό αυτό να βρεθεί στο δείγμα μεγαλύτερο του* 50%.

Άσκηση 10 (Φορτίο καρπουζιών). *Ένα φορτηγάκι μπορεί να αντέξει 3000 κιλά φορτίου πριν πάθει βλάβη. Το βάρος ενός καρπουζιού έχει μέση τιμή 15 κιλά με τυπική απόκλιση 1 κιλό. Να υπολογισθεί το μέγιστο πλήθος καρπουζιών που μπορούμε να φορτώσουμε στο φορτηγάκι, ώστε η πιθανότητα βλάβης να είναι μικρότερη από* 10^{-4}.

Άσκηση 11 (Κιμάς για μπιφτέκια). *Ένας μάγειρας θέλει να φτιάξει 100 μπιφτέκια βάρους 200 γραμμαριών. Πλάθοντας τα μπιφτέκια, αυτά καταλήγουν να έχουν βάρη που κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα* $[180, 220]$. *Να υπολογισθούν:*

i) *Η πιθανότητα να φτιάξει 100 μπιφτέκια, αν έχει στη διάθεσή του μείγμα βάρους* 20200 *γραμμαρίων.*

ii) *Το βάρος του διαθέσιμου μείγματος, ώστε η πιθανότητα να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια να είναι τουλάχιστον* 99%.

Άσκηση 12 (Τηλεφωνικό κέντρο). *Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, οι διάρκειες των κλήσεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση διάρκεια 40 δευτερόλεπτα. Να υπολογισθούν:*

i) *Η πιθανότητα η συνολική διάρκεια 250 κλήσεων να ξεπερνά τις 2 ώρες και 50 λεπτά.*

ii) *Η πιθανότητα από 250 κλήσεις, λιγότερες από 75 να έχουν διάρκεια μεγαλύτερη από 1 λεπτό.*

Άσκηση 13 (Έλεγχος αμεροληψίας νομίσματος). *Σε 10000 ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος, το νόμισμα έφερε την ένδειξη κορώνα* 5800 *φορές. Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το νόμισμα δεν είναι αμερόληπτο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

Άσκηση 14 (Μπλέ μάτια). *Περίπου το* 17 % *των ανθρώπων έχει μπλε μάτια. Ποια είναι η πιθανότητα να δείτε τουλάχιστον* 50 *άτομα με γαλανά μάτια μέσα σε ένα πλήθος* 350 *ατόμων; Διατυπώστε όσες υποθέσεις χρησιμοποιήσατε.*

Άσκηση 15 (Τετραγωνική ρίζα εκθετικής κατανομής). *Έστω* X *μια τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο* λ. *Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* $U = \sqrt{X}$.

Άσκηση 16 (Ανισότητες για αθροίσματα). *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{30}$ ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέση τιμή 1.*

Να βρεθεί ένα φράγμα για την πιθανότητα $P(\sum_{i=1}^{30} X_i > 35)$.

α) Με τη χρήση της ανισότητας Markov.

β) Με τη χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

Άσκηση 17 (Επαρκή αποθέματα). *Ένα εξάρτημα είναι κρίσιμο για την λειτουργία ενός συστήματος και πρέπει άμεσα να αντικαθίσταται σε περίπτωση βλάβης του. Αν ο μέσος χρόνος ζωής αυτού του τύπου εξαρτήματος είναι 100 ώρες με τυπική απόκλιση 30 ώρες και το σύστημα λειτουργεί με ακριβώς ένα τέτοιο εξάρτημα, πόσα εξαρτήματα πρέπει να έχουμε σε απόθεμα ώστε με πιθανότητα 0.95 να επαρκέσουν για αδιάκοπη λειτουργία του συστήματος τις επόμενες 3000 ώρες;*