

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1η Εργασία

1		2		3		4		5		6	
7		8		9		10		11		12	
13		14		15		16		17			

Να λυθούν 15 από τις ασκήσεις που ακολουθούν.

Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στην εργασία που θα παραδώσετε, αφού σημειώσετε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας, καθώς και με ✓ στον παραπάνω πίνακα τις ασκήσεις που λύσατε. Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγρατά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε.

Η εργασία μπορεί να παραδοθεί ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 5MB, στο email kmanes@unipi.gr.

Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι `ergasia1_pX.pdf`, όπου X ο αριθμός μητρώου σας.

Η εργασία είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Ημερομηνία παράδοσης: 3 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2021

Άσκηση 1. Σε ένα συρτάρι έχουμε 4 μαρκαδόρους, 2 γράφουν με μπλε χρώμα και 2 γράφουν με κόκκινο. Κατασκευάστε έναν δειγματικό χώρο για κάθε ένα από τα παρακάτω πειράματα:

1. Οι 4 μαρκαδόροι είναι διακεκριμένοι και αφαιρούμε στην τύχη έναν-έναν τους μαρκαδόρους, μέχρι να βρούμε έναν μπλε.
2. Οι 4 μαρκαδόροι είναι μη διακεκριμένοι και αφαιρούμε στην τύχη έναν-έναν τους μαρκαδόρους, μέχρι να βρούμε έναν μπλε.
3. Οι 4 μαρκαδόροι είναι διακεκριμένοι και αφαιρούμε στην τύχη έναν-έναν τους μαρκαδόρους, μέχρι να βρούμε και τους δύο μπλε.
4. Οι 4 μαρκαδόροι είναι μη διακεκριμένοι και αφαιρούμε στην τύχη έναν-έναν τους μαρκαδόρους, μέχρι να βρούμε και τους δύο μπλε.

Άσκηση 2. Ένας ασθενής, σύμφωνα με το γιατρό του, έχει ακριβώς μία από τρεις ασθένειες A, B, Γ, με την ίδια πιθανότητα. Ο ασθενής κάνει μια εξέταση με αποτέλεσμα θετικό ή αρνητικό. Το αποτέλεσμα είναι θετικό με πιθανότητα: 0.9 αν έχει την A, 0.5 αν έχει την B και 0.1 αν έχει την Γ. Αν το αποτέλεσμα βγήκε θετικό, ποια είναι η νέα πιθανότητα να έχει κάθε μια ασθένεια;

Άσκηση 3. Σε ένα τριαδικό κανάλι επικοινωνίας μεταδίδουμε τρία σύμβολα 0, 1 και 2. Τα σύμβολα 0, 1 και 2 εμφανίζονται στην είσοδο με πιθανότητα $1/4$, $1/4$ και $1/2$ αντίστοιχα. Λόγω θορύβου, κάθε σύμβολο μεταδίδεται σωστά με πιθανότητα $0 < p < 1$, ενώ, με πιθανότητα $1 - p$, το 2 μετατρέπεται σε 1, το 1 σε 0 και το 0 σε 2.

1. Με ποια πιθανότητα εμφανίζεται κάθε σύμβολο στην έξοδο;
2. Αν η έξοδος είναι 1, με ποια πιθανότητα η είσοδος ήταν 0; 1; 2;

Άσκηση 4. Στο σύνολο του πληθυσμού, το 1% των ατόμων έχουν το γενετικό στίγμα κάποιας κληρονομικής ασθένειας. Έστω ένα ζευγάρι με δύο παιδιά. Αν και οι δύο γονείς έχουν το στίγμα, τότε το κάθε παιδί τους το έχει με πιθανότητα 50%. Αν μόνο ο ένας γονιός έχει το στίγμα, τότε το κάθε παιδί τους το έχει με πιθανότητα 2%. Αν κανένας γονιός δεν έχει το στίγμα, τότε δεν το έχει κανένα παιδί τους.

1. Ποια η πιθανότητα και τα δύο παιδιά να έχουν το στίγμα, αν το έχει μόνο ο ένας γονιός;
2. Ποια η πιθανότητα και τα δύο παιδιά να έχουν το στίγμα, αν δεν γνωρίζουμε τίποτα για τους γονείς;
3. Ποια η πιθανότητα να το έχει ακριβώς ένας γονιός, αν το έχουν και τα δύο παιδιά;
4. Ποια η πιθανότητα να το έχουν και οι δύο γονείς, αν το έχουν και τα δύο παιδιά;

Άσκηση 5. Κάθε εβδομάδα, ένας μανάβης έχει X πελάτες που αγοράζουν από μία κολοκύθα, εφόσον υπάρχουν διαθέσιμες. Η τ.μ. X έχει την ακόλουθη πυκνότητα:

$$P(X = k) = \frac{9 - k}{10}, \quad k \in \{5, 6, 7, 8\}.$$

Στην αρχή της εβδομάδας, ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες με 2 ευρώ τη μια. Κατά τη διάρκεια της εβδομάδας, τις πουλά προς 4 ευρώ τη μια. Στο τέλος της εβδομάδας, πετάει όσες απέμειναν.

Πόσες κολοκύθες πρέπει να αγοράσει, ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του;

Άσκηση 6. Ένα δίκαιο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην k ρίψη, τότε κερδίζουμε 2^k ευρώ. Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού. Θα δίνετε 50 ευρώ για να παίξετε το παιχνίδι;

Άσκηση 7. Ένα νόμισμα ρίχνεται επανειλημμένα και η κορώνα έχει πιθανότητα εμφάνισης p σε κάθε ρίψη. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθεί η Κορώνα για δεύτερη φορά στην ρίψη k ;

Άσκηση 8. Ο Σταύρος έχει μεγάλη μύτη και η Μαρία έχει μεγάλα αυτιά. Κάνουν 5 παιδιά και κάθε ένα από αυτά κληρονομεί τα μεγάλα αυτιά με πιθανότητα $1/2$ και τη μεγάλη μύτη με πιθανότητα $1/2$ και ανεξάρτητα από τα άλλα παιδιά.

1. Αν X το πλήθος παιδιών που κληρονόμησαν και τα μεγάλα αυτιά και τη μεγάλη μύτη, ποια είναι η πιθανότητα $P(X = x)$;
2. Αν Y το πλήθος παιδιών που κληρονόμησαν είτε τα μεγάλα αυτιά, είτε τη μεγάλη μύτη (είτε και τα δύο), ποια είναι η πιθανότητα $P(Y = y)$;
3. Αν μια πλαστική επέμβαση για τη μύτη κοστίζει 2000 ευρώ και για τα αυτιά 4000 ευρώ, πόσα χρήματα αναμένεται να χρειαστούν ο Σταύρος και η Μαρία για να μικρύνουν τα μεγάλα αυτιά και τις μεγάλες μύτες των παιδιών τους;

Άσκηση 9. Το πλήθος συντριβών επιβατικών αεροσκαφών ανά ημέρα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ . Θεωρούμε ότι οι συντριβές μιας ημέρας συμβαίνουν ανεξάρτητα από τις συντριβές προηγούμενων ημερών. Ποια είναι η πιθανότητα σε 8 ημέρες να πέσουν ακριβώς 3 αεροπλάνα;

Άσκηση 10. Σε ένα πλήθος 2000 υπολογιστών σε ένα δίκτυο, οι 12 είναι ελαττωματικοί. Επιλέγουμε με επανατοποθέτηση 10 από αυτούς.

1. Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε τουλάχιστον 2 ελαττωματικούς;
2. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του πλήθους X των ελαττωματικών ανάμεσα σε αυτούς που επιλέξαμε;
3. Αν επιλέγουμε μέχρι να βρούμε τον πρώτο ελαττωματικό και Y το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων, ποια είναι η κατανομή, η μέση τιμή και η διακύμανση του Y ;

Άσκηση 11. Δίνονται X και Y ανεξάρτητες τ.μ. Bernoulli με παραμέτρους p και $1/2$ αντίστοιχα. Αν $Z = XY$, ποια είναι η μέση τιμή και η διακύμανση της Z ;

Άσκηση 12. Κάθε κλήση ενός υπολογιστή προς κάποιο δίκτυο αποτυγχάνει με πιθανότητα 0.2% και οι διαφορετικές κλήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

1. Αν ο υπολογιστής πραγματοποιεί 25 κλήσεις την ημέρα, ποιες είναι η μέση τιμή και η διακύμανση του πλήθους των αποτυχημένων κλήσεων σε 2 ημέρες;
2. Ποια είναι η πιθανότητα σε μία ημέρα να υπάρχει το πολύ μία αποτυχημένη κλήση;
3. Αν ο υπολογιστής πραγματοποιεί ασταμάτητα κλήσεις μέχρι να αποτύχει, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη αποτυχημένη κλήση να είναι η 100η; Ποιο είναι το μέσο πλήθος κλήσεων μέχρι την πρώτη αποτυχημένη κλήση;

Άσκηση 13. Σε έναν αγώνα μεταξύ των ομάδων Π και O , η Π κερδίζει με πιθανότητα 0.6 και χάνει με πιθανότητα 0.4 (δεν υπάρχει ισοπαλία). Διαδοχικοί αγώνες είναι ανεξάρτητοι.

1. Αν οι ομάδες παίξουν 10 αγώνες, ποιος είναι ο τύπος για την πιθανότητα να κερδίσει η Π περισσότερους αγώνες;

2. Αν οι ομάδες παίζουν διαδοχικούς αγώνες μέχρι να κερδίσει η O , ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν 6 αγώνες;
3. Αν οι ομάδες παίζουν διαδοχικούς αγώνες μέχρι να κερδίσει η O δύο αγώνες, ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν 5 αγώνες;
4. Αν οι ομάδες παίζουν διαδοχικούς αγώνες μέχρι να κερδίσει κάποια 4 συνολικά αγώνες, ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν 6 αγώνες;

Άσκηση 14. Από τους 125 εργαζόμενους σε μια επιχείρηση, 50 είναι γυναίκες. Έστω ότι για κάποια συγκεκριμένη εργασία επιλέγονται τυχαία 5 εργαζόμενοι. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως μεταξύ των 5 οι 2 είναι γυναίκες, χρησιμοποιώντας

1. την ακριβή κατανομή του αριθμού X των γυναικών μεταξύ των 5 και
2. κατάλληλη προσέγγιση της κατανομής αυτής.

Άσκηση 15. Έστω ότι ο αριθμός των θανάτων σε νοσοκομείο των Αθηνών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ ένας θάνατος είναι τετραπλάσια της πιθανότητας να συμβούν δύο ακριβώς θάνατοι σε ένα μήνα, να υπολογισθούν οι πιθανότητες

1. να μη συμβεί θάνατος σε ένα μήνα και
2. να συμβούν το πολύ δύο θάνατοι σε δύο μήνες.

Άσκηση 16. Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι 0.1% του πληθυσμού εμπλέκεται σε ένα τουλάχιστο δυστύχημα κάθε χρόνο. Αν η εταιρεία αυτή έχει ασφαλίσει 5000 άτομα, να υπολογισθούν οι πιθανότητες να εμπλακούν σε δυστύχημα

1. το πολύ 3 πελάτες της τον επόμενο χρόνο,
2. το πολύ 2 σε κάθε ένα από τα επόμενα δύο χρόνια και
3. το πολύ 4 στα επόμενα δύο χρόνια.

Άσκηση 17. Έστω ότι ένα βιβλίο 350 σελίδων περιέχει 42 τυπογραφικά λάθη. Αν τα λάθη αυτά είναι τυχαία κατανεμημένα στο βιβλίο, να υπολογισθούν οι πιθανότητες

1. μια σελίδα που επιλέγεται τυχαία να περιέχει x λάθη και
2. από 10 σελίδες που επιλέγονται τυχαία μόνο 3 δεν έχουν λάθος.