

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

3η Εργασία

1		2		3		4		5		6	
7		8		9		10		11		12	
13		14		15		16		17			

Να λυθούν 15 από τις ασκήσεις που ακολουθούν.

Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στην εργασία που θα παραδώσετε, αφού σημειώσετε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας, καθώς και με ✓ στον παραπάνω πίνακα τις ασκήσεις που λύσατε. Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγρατά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε. Η εργασία μπορεί να παραδοθεί ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 5MB, στο email kmanes@unipi.gr.

Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι `ergasia3_pX.pdf`, όπου X ο αριθμός μητρώου σας.

Η εργασία είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Ημερομηνία παράδοσης: 16 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Άσκηση 1. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από πληθυσμό που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ . Να βρεθεί εκτιμήτρια για το θ με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Άσκηση 2. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από πληθυσμό που ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Να βρεθεί εκτιμήτρια για το σ^2 με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, όταν το μ είναι γνωστό. Ποια είναι η μέση τιμή της;

Άσκηση 3. Ένα σήμα με τιμή μ μεταδίδεται από την θέση A στη θέση B . Λόγω θορύβου, η τιμή που λαμβάνεται είναι $\mu + X$, όπου $X \sim N(0, 4)$. Προκειμένου να μειωθεί ο θόρυβος, η ίδια τιμή μ εκπέμπεται 9 φορές και λαμβάνονται αντίστοιχα οι τιμές

5, 8.5, 12, 15, 7, 9, 7.5, 6.5, 10.5.

Να κατασκευαστεί ένα 95% δ.ε. για την πραγματική τιμή του μ , της μορφής

i) $[a - \epsilon, a + \epsilon]$

ii) $(-\infty, b]$

iii) $[a, +\infty)$

Άσκηση 4. Να λυθεί η προηγούμενη άσκηση στην περίπτωση που $X \sim N(0, \sigma^2)$ και το σ είναι άγνωστο.

Άσκηση 5. Η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας σε ένα διαγώνισμα είναι 1.13. Αν ένα τυχαίο δείγμα 81 φοιτητών έχει δειγματικό μέσο 7.46, να δοθεί ένα 90% δ.ε. για το μέσο βαθμό όλων των φοιτητών.

Άσκηση 6. Έστω X_1, \dots, X_n, X_{n+1} τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό με άγνωστο μέσο μ και διακύμανση 1 και έστω $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$.

i) Ποια είναι η κατανομή της $X_{n+1} - \bar{X}$;

ii) Αν $\bar{X} = 4$, να δοθεί ένα 90% δ.ε. για την τιμή του X_{n+1} .

Άσκηση 7. Χρησιμοποιήστε τυχαίο δείγμα μεγέθους 100 από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0, 1)$ για να προσεγγίσετε την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = E(\sqrt{1-U^2}), \quad U \sim U(0, 1).$$

Δώστε ένα 95% δ.ε. για την τιμή του I . (Η πραγματική του τιμή είναι $\pi/4$.)

Άσκηση 8. Έστω (U_1, U_2, \dots) ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$ και έστω n τ.μ.

$$X = \min\{n : U_1 + \dots + U_n > 1\}$$

δηλαδή η X ισούται με το πλήθος των ομοιόμορφων τ.μ. που απαιτούνται ώστε το άθροισμα αυτών να ξεπερνά το 1. Χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς, κατασκευάστε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 36 από την κατανομή της X και, βάσει αυτού του δείγματος, κατασκευάστε ένα 95% δ.ε. για την $E(X)$.

Άσκηση 9. Δίνονται 2 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα

16, 17, 19, 20, 18 και 3, 4, 8

από δύο κανονικούς πληθυσμούς με την ίδια τυπική απόκλιση σ . Κατασκευάστε ένα 95% δ.ε. για την σ . (Υπενθυμίζεται ότι το άθροισμα ανεξάρτητων χ^2 τ.μ. ακολουθεί επίσης την κατανομή χ^2 , με βαθμούς ελευθερίας το άθροισμα των επιμέρους.)

Άσκηση 10. Οι ημερήσιες επισκέψεις σε δύο ιστοσελίδες A και B μετρήθηκαν σε ένα διάστημα 10 ημερών:

A : 481, 572, 506, 561, 527, 501, 661, 487, 501, 524

B : 526, 537, 511, 582, 556, 605, 542, 558, 491, 578

i) Να ευρεθεί ένα 99% δ.ε. για τη διαφορά των αναμενόμενων ημερήσιων επισκέψεων υποθέτοντας ότι οι επισκέψεις ακολουθούν κανονική κατανομή με την ίδια τυπική απόκλιση $\sigma_A = \sigma_B = \sigma$.

ii) Ομοίως, όταν $\sigma_A \neq \sigma_B$.

iii) Ομοίως, όταν $\sigma_A = 30$ και $\sigma_B = 20$.

Άσκηση 11. Μια αεροπορική εταιρεία θέλει να εκτιμήσει το ποσοστό των επιβατών της που ταξιδεύουν για επαγγελματικούς λόγους. Αν επιθυμεί επίπεδο εμπιστοσύνης 90% με σφάλμα $\pm 2\%$, ποιο είναι το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος;

Άσκηση 12. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση $H_0 : \mu \leq 100$, έναντι της $H_1 : \mu > 100$. Υποθέστε ότι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 20 έδωσε δειγματικό μέσο 105. Υπολογίστε την p -τιμή του ελέγχου όταν ο πληθυσμός είναι κανονικός με τυπική απόκλιση ίση με

i) 5, ii) 10, iii) 15.

Άσκηση 13. Ένα αυτοκίνητο, σύμφωνα με τους κατασκευαστές του, έχει κατανάλωση βενζίνης τουλάχιστον 150 χιλιόμετρα ανά λίτρο. Ένα τυχαίο δείγμα 10 δοκιμών έδωσε μετρήσεις

130, 120, 100, 125, 135, 125, 140, 150, 130, 165.

Να ελέγξετε τον ισχυρισμό των κατασκευαστών.

Άσκηση 14. Δίνονται τα ακόλουθα τυχαία δείγματα από δύο ανεξάρτητους πληθυσμούς A και B:

A : 122, 114, 130, 165, 144, 133, 139, 142, 150

B : 108, 125, 122, 140, 132, 120, 137, 128, 138

με μέσους μ_A και μ_B αντίστοιχα. Υπολογίστε την p -τιμή του ελέγχου για την υπόθεση $H_0 : \mu_A \leq \mu_B$ έναντι της $H_1 : \mu_A > \mu_B$, όταν οι πληθυσμιακές τυπικές αποκλίσεις είναι $\sigma_A = 10$ και

i) $\sigma_B = 5$, ii) $\sigma_B = 10$, iii) $\sigma_B = 20$.

Άσκηση 15. Σε ένα πείραμα για την αποτελεσματικότητα της ασπιρίνης στην πρόληψη εμφράγματος, 22.000 υγιείς μεσήλικες άντρες χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ισάριθμες ομάδες. Στην ομάδα A χορηγήθηκε ασπιρίνη σε ημερήσια βάση, ενώ στην ομάδα B χορηγήθηκε placebo. Το πείραμα ολοκληρώθηκε όταν 104 άτομα από την ομάδα A έπαθαν εμφραγμα, οπότε και τα εμφράγματα στην ομάδα B ήταν 189.

- i) Με βάση τα δεδομένα αυτά, να ελεγχθεί η υπόθεση ότι η ασπιρίνη δεν επηρεάζει την πιθανότητα εμφράγματος.
- ii) Αν επιπλέον 119 από την ομάδα A και 98 από την ομάδα B είχαν εγκεφαλικό επεισόδιο, τι συμπεραίνετε για την επίπτωση της ασπιρίνης στην πιθανότητα εγκεφαλικού επεισοδίου;

Άσκηση 16. Ένα φάρμακο για τη θεραπεία μιας μόλυνσης έχει μετρηθεί ότι είναι αποτελεσματικό σε ποσοστό $p = 72\%$ των περιπτώσεων. Ένα νέο φάρμακο βρέθηκε να είναι αποτελεσματικό σε 42 από 50 περιπτώσεις.

- i) Ποια είναι η p -τιμή του ελέγχου ότι το νέο φάρμακο είναι πιο αποτελεσματικό;
- ii) Με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$, είναι αποδεκτή η υπόθεση ότι τα δύο φάρμακα είναι εξίσου αποτελεσματικά, αν $p = 75\%$;
- iii) Ποιο είναι το αποτέλεσμα του προηγούμενου ελέγχου αν χρησιμοποιηθεί προσέγγιση από κανονική κατανομή;

Άσκηση 17. Ένα εντομοκτόνο σκοτώνει το 60% του πληθυσμού ενός είδους μύγας. Σε πόσες μύγες πρέπει να χορηγήσουμε το φάρμακο για να είμαστε κατά 95% σίγουροι ότι το ποσοστό των εντόμων που σκοτώθηκαν είναι μεταξύ 58% και 62%;