Σήμερα: Ασκήσεις στις Διακριτές Κατανομές

Άσκηση 1

Είναι γνωστό ότι οι βίδες που παράγει μια συγκεκριμένη εταιρεία είναι ελαττωματικές με πιθανότητα 0.01, ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Η εταιρεία πουλάει τις βίδες σε συσκευασίες των 10 και προσφέρει εγγύηση επιστροφής χρημάτων αν υπάρχει πάνω από 1 ελαττωματική βίδα σε μια συσκευασία. Το ποσοστό των πουλημένων συσκευασιών πρέπει να αντικαταστήσει η εταιρεία;

Έστω X ο αριθμός των ελαττωματικών βιδών σε μια συσκευασία.

- Κάθε βίδα ανεξάρτητα από την άλλη είναι ελαττωματική με πιθανότητα $p=0.01$
- Υπάρχουν 10 βίδες σε κάθε συσκευασία.

Έστω $X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν η } i\text{-οστή βίδα είναι ελαττωματική} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ $\quad X_i \sim Bern(p)$

Άρα, η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $Binom(n,p)$

όπου $n=10$ και $p=0.01$

Η πιθανότητα μια συσκευασία να πρέπει να αντικατασταθεί ισούται με

$$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-P(X=1)-P(X=0)$$

Υπενθύμιση: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$$=1-\binom{10}{1}0.01^1\cdot 0.99^9-\binom{10}{0}0.01^0\cdot 0.99^{10}$$

$$=0.004$$

Άρα, με την πολιτική αυτή η εταιρεία θα χρειαστεί να αντικαταστήσει το 0.4% των συσκευασιών της (4 στις 1000)

Άσκηση 2

Στο λεγόμενο παιχνίδι του τροχού της τύχης ρίχνονται 3 αμερόληπτα ζάρια (ισοδύναμα περιστρέφεται ένας τρόχος όπου σε κάθε φέτα εμφανίζονται όλες οι πιθανές διατεταγμένες τριάδες αριθμών από το 1 έως το 6). Κάθε παίχτης στοιχηματίζει a χρηματικές μονάδες σε ένα αριθμό από το 1 έως το 6. Αν κανένα από τα ζάρια δεν φέρει αυτόν τον αριθμό τότε χάνει το ποσό που στοιχημάτισε, αλλιώς κερδίζει το ποσό ka όπου k είναι ο αριθμός των φορών που εμφανίστηκε στα 3 ζάρια ο αριθμός που στοιχημάτισε.
Να εξετασθεί αν το παιχνίδι είναι δίκαιο για τον παίχτη.

Έστω ότι ένας παίχτης στοιχηματίζει 1 ευρώ σε κάποιον αριθμό (από το 1 έως το 6)

Θεωρούμε την τ.μ. $X = \#$φορών που εμφανίστηκε ο αριθμός που ποντάραμε

Η X λαμβάνει τις τιμές $\{0,1,2,3\}$

- Κάθε ζάρι φέρνει τον αριθμό που ποντάραμε με πιθανότητα $p=\frac{1}{6}$
- Υπάρχουν 3 ανεξάρτητα ζάρια

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν το } i\text{-στό ζάρι φέρει τον αριθμό που ποντάραμε} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$X = X_1 + X_2 + X_3 \qquad X_i \sim Bern(\frac{1}{6})$

Άρα η $X \sim Binom(3, \frac{1}{6})$

οπότε

$$P(X=k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k} \qquad k=0,1,2,3$$

Έστω Y = το κέρδος του παίχτη τότε $Y = \underbrace{X\alpha}_{\text{αυτά που θα πάρουμε}} - \underbrace{\alpha}_{\text{αυτά που δώσαμε}}$

Εδώ $\alpha=1$ άρα

$$\boxed{Y = X-1}$$

οπότε το αναμενόμενο κέρδος ισούται

$$E(Y) = E(X-1) = E(X)-1 = n\cdot p - 1 = 3\frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Άρα, δεν συμφέρει να παίζουμε αυτό το παιχνίδι.

Άσκηση 3

Ένα ηλεκτρονικό κατάστημα παραλαμβάνει ένα φορτίο με 100 ηλεκτρονικές συσκευές. Ελέγχει 10 τυχαία επιλεγμένες από αυτές και αν βρει πάνω από μία ελαττωματική, τότε επιστρέφει το φορτίο στον προμηθευτή. Αν το φορτίο περιέχει 20 ελαττωματικές συσκευές, ποια είναι η πιθανότητα να μην επιστραφεί;

Λύση

Αν X είναι το πλήθος των μη ελαττωματικών από τις 10 που ελέγχονται, τότε, κατά τα γνωστά, $X \sim \mathrm{HGeom}(M, n, N)$, με $M = 100, n = 80, N = 10$.
Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(X \geq 9) = 1 - F_X(8) \approx 0.363$.

Το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να υπολογισθεί με οποιαδήποτε από τις παρακάτω εντολές:

```
1-stats.hypergeom.cdf(8, 100, 80, 10)
stats.hypergeom.sf(8, 100, 80, 10)
```

Εστω X ο αριθμος των μη ελλατωματικων συσκευων που περιεχονται σε ενα δειγμα 10 επιλεγμενων (απο 100 διαθεσιμες στις οποιες οι 20 ειναι ελαττωματικες)

Οι συσκευες χωριζονται σε "καλες" και "κακές"
"καλες" = μη ελαττωματικές
"κακες" = ελαττωματικες

Η X μετραει τον αριθμο των "καλων" μεσα σε ενα δειγμα που προερχεται απο "καλες" και "κακες"

Οποτε η X ακολουθει την υπεργεωμετρικη κατανομη $HGeom(M, n, N)$ οπου

$M = 100$ (αριθμος ολων των συσκευων)
$N = 10$ (το μεγεθος του δειγματος)
$n = 80$ (ο αριθμος των "καλων" συσκευων)

Το ζητουμενο ισουται με την πιθανοτητα:

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) \quad (\text{Python cdf})$$
$$= P(X=9) + P(X=10)$$
$$= 0.363$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{M-n}{N-k}}{\binom{M}{N}}$$

Άσκηση 4

Ένας έμπορος ηλεκτρικών εξαρτημάτων αγοράζει εξαρτήματα σε συσκευασίες των 10. Η πολιτική του είναι να επιθεωρεί τυχαία 3 εξαρτήματα από κάθε συσκευασία και να δέχεται να την αγοράσει αν και μόνο αν και τα 3 δεν είναι ελαττωματικά.
Αν το 30 τοις εκατό των συσκευασιών έχει ακριβώς 4 ελαττωματικά εξαρτήματα και 70 τοις εκατό έχει μόνο 1, τι πόσοστο συσκευασιών αναμένεται να απορρίψει ο έμπορος;

Έστω A το ενδεχόμενο να αποδεχτεί μια συσκευασία ο έμπορος
B_1 το ενδεχόμενο να επιλέξει μια συσκευασία με 4 ελαττωματικά
B_2 —"— 1 ελαττωματικό

Από τον τύπο της ολικής πιθανότητας:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

$X_1 = \#$ μη ελαττωματικών συσκευών που επιλέγονται από συσκευασίες με 4 ελαττωματικά

$X_2 = \#$ —"— επιλέγονται από συσκευασίες με 1 ελαττωματικό

$P(A|B_1) = P(X_1=3)$

$P(A|B_2) = P(X_2=3)$

(όλες αυτές που επιθεωρούνται πρέπει να είναι "καλές" — μη ελαττωματικές)

Οι X_1, X_2 ακολουθούν η καθεμία την υπεργεωμετρική κατανομή $HGeom(M, n, N)$ όπου

$M = 10$

$N = 3$

και για την X_1 το $n=6$ (# μη ελαττωματικών "καλές")

για την X_2 το $n=9$ (# μη ελαττωματικών —"—)

Άρα $P(A) = P(X_1=3)P(B_1) + P(X_2=3)\cdot P(B_2)$

$$= \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{3}{10} + \frac{\binom{9}{3}\binom{1}{0}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{7}{10} = \frac{54}{100}$$

Άρα, η πιθανότητα απόρριψης μιας συσκευασίας είναι 46%.

Άσκηση 5

Έστω ότι ο αριθμός των γκολ που πετυχαίνει η Εθνική ομάδα ποδοσφαίρου στα εκτός έδρας παιχνίδια ακολουθεί την κατανομή Poisson. Επίσης, είναι γνωστό ότι στα εκτός έδρας παιχνίδια η Εθνική έχει την ίδια πιθανότητα να πετύχει ένα ή δύο γκολ. Να βρεθεί η πιθανότητα στο επόμενο εκτός έδρας παιχνίδι η Εθνική να πετύχει τέσσερα γκολ.

X = # τερματα που πετυχαινει η Εθνικη...

Η X ακολουθει την κατανομη Poisson με παραμετρο λ

Γνωρίζουμε οτι η PMF της X δίδεται απο τον τύπο

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Γνωρίζουμε ότι $P(X=1) = P(X=2) \Leftrightarrow$

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Άρα $P(X=4) = e^{-2}\frac{2^4}{4!} = 0.09 = 9\%$.

Άσκηση 6

Υποθέστε ότι το πλήθος των τυπογραφικών λαθών σε μια σελίδα ενός μαθηματικού βιβλίου έχει κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$.
α) Υπολογίστε την πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα λάθος σε μια συγκεκριμένη σελίδα.
β) Υπολογίστε την πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 3 λάθη σε 2 σελίδες.

$X = \#$ λαθων σε μια σελιδα

$X \sim \text{Poisson}(2)$ δηλαδη $P(X=k) = e^{-2}\frac{2^k}{k!}$

α) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(0) = 1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 1 - e^{-2} = 0.84$

Υπενθυμίζεται ότι αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ τοτε $E(X) = \lambda$ δηλαδη λ ειναι ο μεσος αριθμος λαθων.

β) Γνωρίζουμε ότι ο μέσος αριθμός λαθών ανά σελίδα είναι 2

Άρα, ο μέσος αριθμός λαθών ανά 2 σελίδες είναι $2 \cdot 2 = 4$

Έστω $Y = \#$ λαθών σε 2 σελίδες

Για το βιβλίο αυτό η Y ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 4$

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2)$$

$$= 1 - P(Y=2) - P(Y=1) - P(Y=0)$$

$$= 1 - e^{-4}\left(\frac{4^2}{2!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^0}{0!}\right) = 1 - 13e^{-4}$$

$$= 0.76$$

Άσκηση 7

Το πλήθος των φορών που ένας άνθρωπος αρρωσταίνει το χρόνο με κρύωμα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$.
Ένα νέο φάρμακο μειώνει αυτή τη συχνότητα σε $\lambda = 2$ για το 75% του πληθυσμού, ενώ δεν έχει αποτέλεσμα στο υπόλοιπο 25%.
Αν ένας άνθρωπος που πήρε το φάρμακο αρρώστησε 0 φορές κατά τη διάρκεια του έτους, ποια η πιθανότητα να τον ωφέλησε το φάρμακο;

X = # φορών που αρρώστησε κάποιος από κρυολόγημα

A = το ενδεχόμενο να τον ωφέλησε το φάρμακο που πήρε

$P(A) = 0.75 \qquad P(\bar{A}) = 0.25$

$$P(X=k|A) = e^{-2}\frac{2^k}{k!} \qquad P(X=k|\bar{A}) = e^{-3}\frac{3^k}{k!}$$

Εδώ ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A|X=0)$

Από τον τύπο του Bayes έχουμε ότι

$$P(A|X=0) = \frac{P(X=0|A)P(A)}{P(X=0)}$$

Από τον τύπο της ολικής πιθανότητας έχουμε ότι

$$P(X=0) = P(A)\cdot P(X=0|A) + P(\bar{A})\cdot P(X=0|\bar{A})$$

$$= \frac{3}{4}\cdot e^{-2}\frac{2^0}{0!} + \frac{1}{4}\cdot e^{-3}\cdot\frac{3^0}{0!} = \frac{3}{4}\cdot e^{-2} + \frac{1}{4}\cdot e^{-3}$$

Οπότε

$$P(A|X=0) = \frac{\frac{3}{4}\cdot e^{-2}}{\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}\cdot e^{-3}} = 0.89 = 89\%$$

Άρα, αν κάποιος δεν αρρώστησε καθόλου κατά 89% αυτό οφείλεται ότι τον ωφέλησε το φάρμακο που πήρε.

Άσκηση 8

Ο Γιώργος και ο Δημήτρης είναι συγκάτοικοι και κάθε φορά που έχουν να πλύνουν πιάτα ρίχνουν ένα νόμισμα. Όποιος φέρει πρώτος κορώνα κερδίζει και ο άλλος πλένει τα πιάτα. Ο Γιώργος παρατήρησε ότι όταν ρίχνει πρώτος κερδίζει συχνότερα, ενώ όταν ξεκινάει δεύτερος καταλήγει συχνότερα στο νεροχύτη. Υπολογίστε τις πιθανότητες και στις δυο περιπτώσεις. Είναι ο ισχυρισμός του Γιώργου σωστός;

Λύση

Έστω X ο αριθμός ρίψεων μέχρι να έρθει κορώνα για πρώτη φορά. Η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/2$, οπότε

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p,$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Έστω $X = \#$ φορών που χρειάζεται να ρίξουμε ένα νόμισμα ώστε να έρθει <u>για πρώτη φορά ΚΟΡΩΝΑ</u>

Η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p=\frac{1}{2}$ και PMF

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}$$

Έστω A το ενδεχόμενο να κερδίσει ο πρώτος που ρίχνει

$$P(A) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) + \dots + P(2k+1) + \dots$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{5} + \dots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2k+1} + \dots$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{4} + \dots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2k} + \dots\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{2} + \dots + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k} + \dots\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Άρα, ο πρώτος κερδίζει με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και ο δεύτερος με πιθανότητα $1/3$. Δηλαδή, 2 στις 3 φορές ο δεύτερος πλένει τα πιάτα.