ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff f_X(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[Probability Distribution Function]

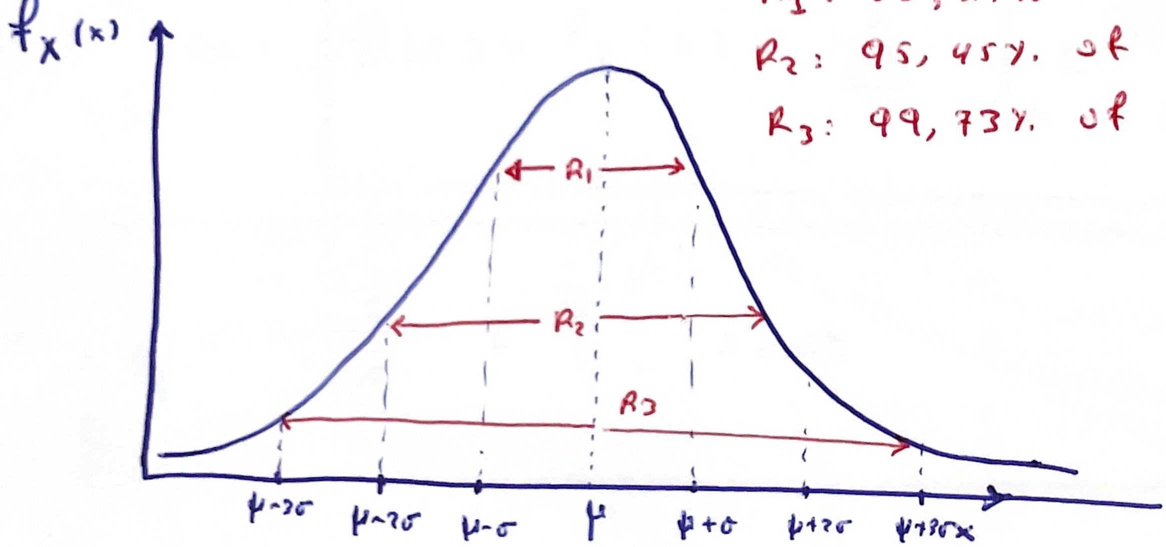
$$E[X] = \mu$$

$$Var[X] = \sigma^2$$

R_1: 68,27% of Probability Mass.

R_2: 95,45% of Probability Mass.

R_3: 99,73% of Probability Mass.



$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

[Cumulative Distribution Function]

S.O.S: Το ολοκλήρωμα της $F_X(x)$ δεν μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις συναρτήσεις. Οι τιμές της $F_X(x)$ υπολογίζονται προσεγγιστικά με αναγωγή στις τιμές της λεγόμενης τυπικής κανονικής κατανομής.

[#2]

Αν η τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$x = randn() \sim N(0,1)$ $x' \sim N(\mu, \sigma^2)$

$x' = \mu + \sigma x$

$N(0,1)$: Τυπική ή Τυποποιημένη (standardized)

Κανονική Κατανομή (Normal Distribution)

έχουμε ότι: $\boxed{\Phi(z) = F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}$

και $\boxed{\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot z^2}, \quad z \in \mathbb{R}}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>: Ν.Δ.Ο $\forall x \in R$, $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

<u>ΛΥΣΗ</u>: Για την CDF της X με $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ισχύει ότι:

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dt \quad (1)}$$

Κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού: $\boxed{z = \frac{t-\mu}{\sigma} \Rightarrow t = \mu + z\sigma \quad (2)}$

Επιπλέον, έχουμε ότι: $\boxed{dt = \sigma\, dz \quad (3)}$

ΓΙΑ $t = x \Rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

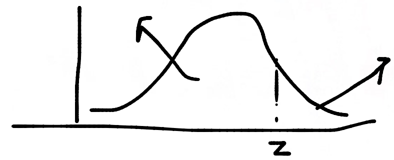
Από την (1), έχουμε ότι: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot \sigma \cdot dz \Rightarrow$

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (3)}$$

[#3]

ΑΣΚΗΣΗ 2: Να αποδειχθεί η συμπληρωματική ιδιότητα της $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$$



ΛΥΣΗ: Από τον ορισμό της συνάρτησης $\Phi(\cdot)$ έχουμε ότι:

$$\boxed{\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (1)}$$

Αντίστοιχα, έχουμε ότι:

$$\boxed{\Phi(-z) = \int_{-\infty}^{-z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (2)}$$

Εκμεταλλευόμενοι της συμμετρική ιδιότητα της PDF:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\boxed{\varphi(-t) = \varphi(t), \ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad (3)}$$

Για τον υπολογισμό της (2) κάνουμε χρήση του μετασχηματισμού:

$$\boxed{u = -t \Rightarrow du = -dt \quad (4)}$$

Για τον υπολογισμό των νέων ορίων ολοκλήρωσης έχουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{για } t = -z \Rightarrow u = z \\ \text{για } t \to -\infty \Rightarrow u \to +\infty \end{array} \right\}$$

Άρα, προκύπτει ότι:

$$\boxed{\Phi(-z) = \int_{\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot (-du) = \int_{z}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot du \quad (5)}$$

Το ολοκλήρωμα της (5), όμως, περιγράφει εξ' ορισμού την ποσότητα $1-\Phi(z)$. Επομένως, έχουμε ότι $\Phi(-z) = 1-\Phi(z)$ και $\boxed{\Phi(z)+\Phi(-z) = 1}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Ν.Δ.Ο $P(|X-\mu| \leq \kappa\sigma) = 2\Phi(\kappa)-1$

$$|X-\mu| \leq \kappa\sigma \Leftrightarrow -\kappa\sigma \leq X-\mu \leq +\kappa\sigma \Rightarrow \boxed{\mu-\kappa\sigma \leq X \leq \mu+\kappa\sigma \quad (1)}$$

Άρα, έχουμε ότι: $\boxed{P(|X-\mu| \leq \kappa\sigma) = P(\mu-\kappa\sigma \leq X \leq \mu+\kappa\sigma) \quad (2)}$

Από τον ορισμό της CDF, έχουμε ότι:

$$\boxed{P(\mu-\kappa\sigma \leq X \leq \mu+\kappa\sigma) = F_X(\mu+\kappa\sigma)-F_X(\mu-\kappa\sigma) \quad (3)}$$

$$\boxed{\text{Γνωρίζουμε, όμως, ότι: } F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

Επομένως, η (3) μπορεί να γραφεί ως:

$$P(\mu-\kappa\sigma \leq X \leq \mu+\kappa\sigma) = \Phi(\kappa)-\Phi(-\kappa) \xrightarrow{\Phi(-z)=1-\Phi(z)}$$

$$\Phi(\kappa)-(1-\Phi(\kappa)) = 2\Phi(\kappa)-1$$

ΑΣΚΗΣΗ 4: Να υπολογισθεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Τυποποιημένης κανονικής κατανομής $X \sim N(0,1)$.

ΛΥΣΗ: Γνωρίζουμε ότι η PDF της Τ.Μ. X δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (1)}$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μπορεί να υπολογισθεί ως:

$$\boxed{M_X(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx \quad (2)}$$

(★) Το ολοκλήρωμα (2) μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας το ακόλουθο τέχνασμα:

(i): Συγχώνευση των εκθετικών όρων

(ii): Συμπλήρωση τετραγώνου

$$\boxed{e^{tx} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{u} \quad (3)} \quad \text{όπου} \quad \boxed{u = -\frac{x^2}{2} + tx \quad (4)}$$

Ιδανικά, θα θέλουμε να εκφράσουμε την ποσότητα u ως:

$$u = \lambda(x+at)^2+\mu \quad \text{ή}$$

$$u = \lambda(x^2+2xat+a^2t^2)+\mu \Leftrightarrow$$

$$\boxed{u = \lambda x^2+2\lambda xat+\lambda a^2t^2+\mu \quad (5)}$$

Επιθυμούμε, όμως, $\boxed{\lambda x^2+2\lambda xat+\lambda a^2t^2+\mu = -\frac{x^2}{2}+tx}$

Η εξίσωση των δύο πολυωνύμων γίνεται εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων:

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ 2\lambda a = 1 \\ \mu+\lambda a^2t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = -\frac{1}{2} \quad (6)} \\ \boxed{a = \frac{1}{2\lambda} = -1 \quad (7)} \\ \boxed{\mu = -\lambda a^2t^2 = +\frac{1}{2}t^2 \quad (8)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = -\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{1}{2}t^2 \quad (9)}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες παραγωγίσεις, έχουμε ότι:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{1}{2}t^2}\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$x' \sim N(t, 1)$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}\,dx \Rightarrow$$

$$\boxed{M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} \cdot dx}_{=1} \quad (10)}$$

(*) : Το ολοκλήρωμα I που εμφανίζεται στην σχέση (10) αντιστοιχεί στην ολοκλήρωση της PDF μιας τυχαίας μεταβλητής $x' \sim N(t, 1)$ και είναι εξ' ορισμού ίσο με την μονάδα $(I = 1)$

Συνεπώς, καταλήγουμε στο ότι:

$$\boxed{M_x(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \quad (11)}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5</u> Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας Τ.Μ. X για την οποία ισχύει ότι: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

<u>ΛΥΣΗ:</u> Γνωρίζουμε ότι κάθε Τ.Μ. X για την οποία ισχύει ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, η X μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός μετασχηματισμός της Τ.Μ. Z η οποία $Z \sim N(0, 1)$ ως: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \boxed{X = \mu + \sigma Z}$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\boxed{M_x(t) = E[e^{tX}] = E[e^{t(\mu + \sigma Z)}] = E[e^{t\mu} \cdot e^{t\sigma Z}] \quad (1)}$$

(*) : Η ποσότητα $t\mu$, όμως, είναι ανεξάρτητη της Z και κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\boxed{M_x(t) = e^{t\mu} \cdot E[e^{t\sigma Z}] \quad (2)}$$

★: Στο σημείο αυτό κάνουμε χρήση της Ροπογεννήτριας συνάρτησης της Τ.Μ. Z:

$$\boxed{M_Z(s) = e^{\frac{1}{2}s^2} \quad (3)}$$

Εφαρμόζοντας του μετασχηματισμό: $\boxed{s = t\sigma \quad (4)}$ έχουμε ότι:

$$\boxed{E[e^{t\sigma Z}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \quad (5)}$$

Τελικά, από τις (2) και (5) προκύπτει ότι:

$$M_X(t) = e^{t\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad (6)}$$

THEORY (MGF of the Sum of Independent Random Variables)

★ If $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are independent random variables, the MGF of their sum $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ is given by the product of their individual MGFs as:

$$\boxed{M_S(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)}$$

★ Eq.(1) can be easily proved by considering:

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = E[e^{t(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}] \Rightarrow$$

$$M_S(t) = E[e^{tX_1}] \cdot E[e^{tX_2}] \cdot \ldots \cdot E[e^{tX_n}] \Rightarrow$$

$$\boxed{M_S(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6: Αν $X_\kappa \sim N(\mu_\kappa, \sigma_\kappa^2)$, $\forall \kappa \in [n]$ να βρεθεί η PDF της $S = \sum_{\kappa=1}^{n} X_\kappa$.

ΛΥΣΗ: Γνωρίζουμε ότι:

$$\boxed{M_{X_\kappa}(t) = e^{\mu_\kappa t + \frac{\sigma_\kappa^2 t^2}{2}}, \quad \forall \kappa \in [n] \quad (1)}$$

Γνωρίζουμε επιπλέον ότι: $M_S(t) = \prod_{\kappa=1}^{n} M_{X_\kappa}(t) \quad (2) \Rightarrow$

$$\boxed{M_S(t) = \prod_{\kappa=1}^{n} e^{\mu_\kappa t + \frac{\sigma_\kappa^2 t}{2}} \quad (3)}$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας:

$$e^{a} \cdot e^{\beta} = a^{a+\beta}$$

$$M_S(t) = \prod_{\kappa=1}^{n} e^{\mu_\kappa t} \cdot e^{\frac{\sigma_\kappa^2 t^2}{2}} = \prod_{\kappa=1}^{n} e^{\mu_\kappa t} \cdot \prod_{\kappa=1}^{n} e^{\frac{\sigma_\kappa^2 t^2}{2}} \Rightarrow$$

$$M_S(t) = e^{\left(\sum_{\kappa=1}^{n} \mu_\kappa\right) t} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\sum_{\kappa=1}^{n} \sigma_\kappa^2 t^2\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{M_S(t) = e^{\left(\sum_{\kappa=1}^{n} \mu_\kappa\right) t + \frac{1}{2}\left(\sum_{\kappa=1}^{n} \sigma_\kappa^2\right) t^2} \quad (4)}$$

Θέτοντας $\mu_S = \sum_{\kappa=1}^{n} \mu_\kappa$ (5) και $\sigma_S^2 = \sum_{\kappa=1}^{n} \sigma_\kappa^2$ (6), έχουμε ότι:

$$\boxed{M_S(t) = e^{\mu_S t + \frac{1}{2}\sigma_S^2 t^2} \quad (7)}$$

Από την (7), συνεπάγεται ότι:

$$\boxed{S \sim N(\mu_S, \sigma_S^2) \quad (8)}$$