Δεσμευμένη πιθανότητα: Αν $A, B \subseteq \Omega$ και $B \neq \varnothing$, τότε $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα: $A, B \subseteq \Omega$ ανεξάρτητα ανν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

A, B υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του C ανν $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$

Τύπος ολικής πιθανότητας: Αν $A \subseteq \Omega$ και (B_i) διαμέριση του Ω, τότε $P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$

Τύπος Bayes: $P(B|A) = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$, $\qquad P(B_i|A) = \dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$, (B_i) διαμέριση του Ω

Μέση τιμή: $E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x)P(X = x)$ (διακριτή X) και $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$ (συνεχής X)

Διακύμανση: $V(X) := E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$

Συνδιακύμανση: $\mathrm{COV}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$, $V(aX+bY) = a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab\mathrm{COV}(X,Y)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow \mathrm{COV}(X,Y)=0$

$X \sim \mathrm{Bernoulli}(p) : S_X = \{0, 1\}, P(X=1) = p, P(X=0) = 1-p, \quad \mu = p, \sigma^2 = p(1-p)$ $(1 :$ επιτυχία, $0 :$ αποτυχία$)$

$X \sim \mathrm{Binom}(n, p) : S_X = \{0, 1, \ldots, n\}, P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \mu = np, \sigma^2 = np(1-p)$ (k επιτυχίες σε n επαναλήψεις)

$X \sim \mathrm{Geom}(p) : S_X = \{1, 2, \ldots\}, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \mu = \dfrac{1}{p}, \sigma^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$ (k επαναλήψεις μέχρι 1η επιτυχία)

$X \sim \mathrm{NBinom}(r, p) : S_X = \{r, r+1, \ldots\}, P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \mu = \dfrac{r}{p}, \sigma^2 = r\dfrac{1-p}{p^2}$ (k επαναλήψεις μέχρι r επιτυχία)

$X \sim \mathrm{HGeom(M,n,N)} : P(X=k) = \binom{n}{k}\binom{M-n}{N-k}/\binom{M}{N}, \mu = \dfrac{Nn}{M}, \sigma^2 = \dfrac{Nn(M-n)(M-N)}{M^2(M-1)}$, ($k$ επιτυχίες σε N επαναλήψεις χωρίς επανατοποθέτηση από πληθυσμό μεγέθους M που περιέχει n επιθυμητά και $M - n$ ανεπιθύμητα αντικείμενα)

$\mathrm{HGeom(M,n,N)} \to \mathrm{Binom}(N, p)$, αν $n/M \to p$ καθώς $M \to \infty$.

$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda) : S_X = \mathbb{N}, P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, \mu = \sigma^2 = \lambda$, $\mathrm{Binom(n,p)} \to \mathrm{Poisson}(\lambda)$, αν $np \to \lambda$ καθώς $n \to \infty$.

$X \sim U(a, b) : f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases} \quad \mu = \dfrac{a+b}{2}, \sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, $x \in [a, b] \Rightarrow F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$

$X \sim \Gamma(a, \theta), a, \theta > 0 : f(x) = \begin{cases} \theta^a x^{a-1} e^{-\theta x}/\Gamma(a), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \mu = \dfrac{a}{\theta}, \sigma^2 = \dfrac{a}{\theta^2}$

$X \sim E(\lambda), \lambda > 0 : f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \mu = \sigma = \dfrac{1}{\lambda}$, $x \geq 0 \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $P(X > t+s | X > s) = P(X > t) = e^{-\lambda t}$

$X \sim B(a, b), a, b > 0 : f(x) = \begin{cases} x^{a-1}(1-x)^{b-1}/B(a, b), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases} \quad \mu = \dfrac{a}{a+b}, \sigma^2 = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) : f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $E(X) = \mu, V(X) = \sigma^2$, $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{z^2}{2}\right)$, $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)dt$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Markov: $X \geq 0, c > 0 \Rightarrow P(X \geq c) \leq E(X)/c$ **Chernoff:** $t > 0 \Rightarrow P(X \geq c) \leq E(e^{tX})/e^{tc}$

Chebyshev: $c > 0 \Rightarrow P(|X - E(X)| \geq c) \leq V(X)/c^2$ **Cauchy-Schwarz:** $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

Ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες (iid) $X_1, X_2, \ldots, X_n$, με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2: $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} F(\mu, \sigma^2)$

Δειγματικός μέσος: $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, **Δειγματική διακύμανση:** $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

$E(\overline{X}) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{iid}{=} \mu, \qquad V(\overline{X}) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{COV}(X_i, X_j) \overset{iid}{=} \dfrac{\sigma^2}{n}$

ΚΟΘ: Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} F(\mu, \sigma^2)$, τότε $X_1 + \cdots + X_n \to N(n\mu, n\sigma^2)$, $\overline{X} \to N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$, $P(\overline{X} \leq x) \approx \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, τότε $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$, $\dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2_{n-1} = \Gamma(\dfrac{n-1}{2}, \dfrac{1}{2})$, $\overline{X}, S^2$ ανεξάρτητες, $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$(1-a)100\%$ **Δ.Ε. για τον μέσο μ κανονικού πληθυσμού από τυχαίο δείγμα** $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$**:**

$[\overline{X} \pm B]$, όπου $B = z_{a/2}\sigma/\sqrt{n}$, όταν σ γνωστό, $B = t_{n-1,a/2}S/\sqrt{n}$, όταν σ άγνωστο,

Αν $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathrm{Bernoulli}(p)$, τότε $\mu = p$ και $B \approx z_{,a/2}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}$

$(1-a)100\%$ **Δ.Ε. για την σ^2 κανονικού πληθυσμού από τυχαίο δείγμα** $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$**:**

$(n-1)S^2/\chi^2_{n-1,a/2} \leq \sigma^2 \leq (n-1)S^2/\chi^2_{n-1,1-a/2}$

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ανεξάρτητα δείγματα, τότε

$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 + \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{n})$, $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$, $T = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \to N(0, 1)$

$(1-a)100\%$ **Δ.Ε. τη διαφορά $\mu_1-\mu_2$ κανονικών πληθυσμών:** $[\overline{X}-\overline{Y}\pm B]$, όπου

$B=z_{a/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}$, όταν σ_1,σ_2 γνωστά, $B\approx z_{a/2}\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}$, όταν σ_1,σ_2 άγνωστα,

$B=t_{n_1+n_2-2,a/2}S_p\sqrt{1/n_1+1/n_2}$, όπου $S_p^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, όταν σ_1,σ_2 άγνωστα αλλά ίσα,

Όταν $X_1,\dots,X_{n_1}\overset{iid}{\sim}\text{Bernoulli}(\mu_1)$, $Y_1,\dots,Y_{n_2}\overset{iid}{\sim}\text{Bernoulli}(\mu_2)$, τότε $B\approx z_{a/2}\sqrt{\dfrac{\overline{X}_1(1-\overline{X}_1)}{n_1}+\dfrac{\overline{X}_2(1-\overline{X}_2)}{n_2}}$,

$(1-a)100\%$ **Δ.Ε. για τον λόγο $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ δύο κανονικών πληθυσμών:** $F_{n_2-1,n_1-1,1-a/2}\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\le\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le F_{n_2-1,n_1-1,a/2}\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

Έλεγχος για την μέση τιμή μ κανονικού πληθυσμού όταν σ^2 γνωστή: $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

$H1:\mu<\mu_0$: χωρίο απόρριψης $R=\{Z<-z_a\}$, κρίσιμη τιμή $x_c=\mu_0-z_a\sigma/\sqrt{n}$, p-value $=\Phi(Z)$
$H1:\mu>\mu_0$: $R=\{Z>z_a\}$, $x_c=\mu_0+z_a\sigma/\sqrt{n}$, p-value $=\Phi(-Z)$
$H1:\mu\neq\mu_0$: $R=\{|Z|>z_{a/2}\}$, $x_c=\mu_0\pm z_{a/2}\sigma/\sqrt{n}$, p-value $=2\Phi(-|Z|)$

Έλεγχος για την μέση τιμή μ κανονικού πληθυσμού όταν σ^2 άγνωστη: $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$

$H1:\mu<\mu_0$: $R=\{T<-t_{n-1,a}\}$, $x_c=\mu_0-t_{n-1,a}S/\sqrt{n}$, p-value $=t_{n-1}(T)$
$H1:\mu>\mu_0$: $R=\{T>t_{n-1,a}\}$, $x_c=\mu_0+t_{n-1,a}S/\sqrt{n}$, p-value $=t_{n-1}(-T)$
$H1:\mu\neq\mu_0$: $R=\{|T|>t_{n-1,a/2}\}$, $x_c=\mu_0\pm t_{n-1,a/2}S/\sqrt{n}$, p-value $=2t_{n-1}(-|T|)$

Έλεγχος για το ποσοστό p πληθυσμού: $X=\sum_{i=1}^n X_i\sim\text{Binom}(n,p)$, $Z_+=\dfrac{X-np_0+1/2}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$, $Z_-=\dfrac{X-np_0-1/2}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$

$H1:p<p_0$: p-value $=\text{Binom}(X;n,p_0)\approx\Phi(Z_+)$
$H1:p>p_0$: p-value $=1-\text{Binom}(X-1;n,p_0)\approx\Phi(-Z_-)$
$H1:p\neq p_0$: p-value $=2\min\{\text{Binom}(X;n,p_0),1-\text{Binom}(X-1;n,p_0)\}\approx2\min\{\Phi(Z_+),\Phi(-Z_-)\}$

Έλεγχος για την διακύμανση σ^2 κανονικού πληθυσμού: $X=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2_{n-1}$

$H1:\sigma<\sigma_0$: $R=\{X<\chi^2_{n-1,1-a}\}$, p-value $=\chi^2_{n-1}(X)$
$H1:\sigma>\sigma_0$: $R=\{X>\chi^2_{n-1,a}\}$, p-value $=1-\chi^2_{n-1}(X)$
$H1:\sigma\neq\sigma_0$: $R=\{X<\chi^2_{n-1,1-a/2}\}\cup\{X>\chi^2_{n-1,a/2}\}$, p-value $=2\min\{\chi^2_{n-1}(X),1-\chi^2_{n-1}(X)\}$

Έλεγχος για την διαφορά $\mu_1-\mu_2$ δύο πληθυσμών $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ και $N(\mu_2,\sigma_2^2)$:

- σ_1,σ_2 γνωστές: $Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$
  $H1:\mu_1-\mu_2<0$: $R=\{Z<-z_a\}$, p-value $=\Phi(Z)$
  $H1:\mu_1-\mu_2>0$: $R=\{Z>z_a\}$, p-value $=\Phi(-Z)$
  $H1:\mu_1-\mu_2\neq0$: $R=\{|Z|>z_{a/2}\}$, p-value $=2\Phi(-|Z|)$
- σ_1,σ_2 άγνωστες, αλλά ίσες: $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_p\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t_{n_1+n_2-2}$, όπου $S_p^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$
  $H1:\mu_1-\mu_2<0$: $R=\{T<-t_{n_1+n_2-2,a}\}$, p-value $=t_{n_1+n_2-2}(T)$
  $H1:\mu_1-\mu_2>0$: $R=\{T>t_{an_1+n_2-2,a}\}$, p-value $=t_{n_1+n_2-2}(-T)$
  $H1:\mu_1-\mu_2\neq0$: $R=\{|T|>t_{n_1+n_2-2,a/2}\}$, p-value $=2t_{n_1+n_2-2}(-|T|)$
- σ_1,σ_2 άγνωστες και άνισες: $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}\to t_d\to N(0,1)$, $d=\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2\left(\dfrac{s_1^4}{n_1^2(n_1-1)}+\dfrac{s_2^4}{n_2^2(n_2-1)}\right)^{-1}$
  $H1:\mu_1-\mu_2<0$: $R=\{T<-t_{d,a}\}\approx\{T<-z_a\}$, p-value $=t_d(T)\approx\Phi(T)$
  $H1:\mu_1-\mu_2>0$: $R=\{T>t_{d,a}\}\approx\{T>z_a\}$, p-value $=t_d(-T)\approx\Phi(-T)$
  $H1:\mu_1-\mu_2\neq0$: $R=\{|T|>t_{d,a/2}\}\approx\{|T|>z_{a/2}\}$, p-value $=2t_d(-|T|)\approx2\Phi(-|T|)$

Έλεγχος για την διαφορά p_1-p_2 των ποσοστών δύο πληθυσμών: $Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$, $\overline{P}=\dfrac{X+Y}{n_1+n_2}$.

$(X_1,\dots,X_{n_1})\overset{iid}{\sim}\text{Bernoulli}(p_1)$, $(Y_1,\dots,Y_{n_2})\overset{iid}{\sim}\text{Bernoulli}(p_2)$, $X=X_1+\dots+X_{n_1}$, $Y=Y_1+\dots+Y_{n_2}$
$H1:p_1<p_2$: p-value $=\text{HGeom}(X;M,n,N)\approx\Phi(Z)$, $M=n_1+n_2, n=n_1, N=X+Y$
$H1:p_1>p_2$: p-value $=1-\text{HGeom}(X-1;M,n,N)\approx\Phi(-Z)$
$H1:p_1\neq p_2$: p-value $=2\min\{\text{HGeom}(X;M,n,N),1-\text{HGeom}(X-1;M,n,N)\}\approx2\Phi(-|Z|)$

Έλεγχος για τον λόγο σ_1/σ_2 των διακυμάνσεων δύο κανονικών πληθυσμών: $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}$

$H1:\sigma_1<\sigma_2$: $R=\{X<F_{1-a}\}$, p-value $=F(X)$
$H1:\sigma_1>\sigma_2$: $R=\{X>F_a\}$, p-value $=1-F(X)$
$H1:\sigma_1\neq\sigma_2$: $R=\{X<F_{1-a/2}\}\cup\{X>F_{a/2}\}$, p-value $=2\min\{F(X),1-F(X)\}$
όπου F η CDF της F_{n_1-1,n_2-1} και F_a το άνω a-ποσοστιαίο σημείο αυτής.