Εφαρμοσμένη Συνδυαστική - Προβλήματα απαρίθμησης

Οι γεννήτριες συναρτήσεις (ΓΣ) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απαρίθμηση των διαφορετικών σχηματισμών (configurations) αντικειμένων σε πρακτικές εφαρμογές. Όταν δεν έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων του σχηματισμού, οι σχηματισμοί αυτοί μπορούν να περιγραφούν ως ταξινομημένες λέξεις (πολυσύνολα) και χρησιμοποιούμε τις συνήθεις ΓΣ. Αν η σειρά έχει σημασία, τότε οι σχηματισμοί περιγράφονται ως λέξεις (ακολουθίες) και χρησιμοποιούμε τις εκθετικές ΓΣ.

Σχηματισμοί χωρίς διάταξη

Παράδειγμα 1. Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων επιλογής 7 μπαλών από ένα σύνολο με 3 κόκκινες, 4 άσπρες και 5 μπλε μπάλες, όταν οι μπάλες ίδιου χρώματος δεν είναι διακεκριμένες.

Λύση. Υπάρχουν $k = 3$ διαθέσιμα χρώματα. Συνολικά, έχουμε $u = 3 + 4 + 5 = 12$ μπάλες και θέλουμε να διαλέξουμε $n = 7$ από αυτές. Συμβολίζουμε με $1, 2, 3$ τα χρώματα κόκκινο, άσπρο και μπλε αντίστοιχα. Μπορούμε να διαλέξουμε από κάθε χρώμα $i \in [k]$ ένα πλήθος μπαλών n_i, όπου $\ell_i \leq n_i \leq u_i$ και οι περιορισμοί ℓ_i και u_i αντιπροσωπεύουν τον ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα δυνατό αριθμό επιλεγμένων αντικειμένων από το χρώμα i και γενικά προκύπτουν από την διατύπωση του προβλήματος. Εδώ είναι $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 0$ και $u_1 = 3, u_2 = 4, u_3 = 5$.

Συμβολίζουμε με x_i κάθε μπάλα χρώματος $i \in [3]$, οπότε ένας πιθανός σχηματισμός είναι π.χ. η n-άδα $x_3x_1x_2x_3x_2x_3x_1$. Η σειρά των x_i δεν έχει σημασία, οπότε θεωρούμε τα x_i σαν μεταβλητές που αντιμετατίθενται, άρα $x_3x_1x_2x_3x_2x_3x_1 = x_1^2x_2^2x_3^3$. Το μονώνυμο $x_1^2x_2^2x_3^3$ είναι ταυτόχρονα και μια ταξινομημένη λέξη με γράμματα $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$. Γενικά, κάθε σχηματισμός αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό μονώνυμο-λέξη $c = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$. Η κενή λέξη είναι η $x_1^0x_2^0\cdots x_k^0 = 1$. Το *μήκος* (length) της λέξης c είναι το $|c| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Για την απαρίθμηση όλων των $c = x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$ μήκους $n_1 + n_2 + n_3 = 7$, σκεφτόμαστε ως εξής: Το άθροισμα όλων των μονωνύμων $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$ που ικανοποιούν τους περιορισμούς $\ell_i \leq n_i \leq u_i$ είναι ένα πολυώνυμο των x_1, x_2, x_3, έστω $p(x_1, x_2, x_3)$ και, λόγω της αντιμετάθεσης, το πολυώνυμο αυτό είναι ίσο με

$$p(x_1,x_2,x_3) = (x_1^{\ell_1} + x_1^{\ell_1+1} + \cdots + x_1^{u_1})(x_2^{\ell_2} + x_2^{\ell_2+1} + \cdots + x_2^{u_2})(x_3^{\ell_3} + x_3^{\ell_3+1} + \cdots + x_3^{u_3}),$$

αφού εκτελώντας όλους τους πολλαπλασιασμούς, θα προκύψει το αρχικό άθροισμα όλων των μονωνύμων. Τα μονώνυμα του αθροίσματος αυτού είναι όλοι οι έγκυροι σχηματισμοί οποιουδήποτε μήκους. Κάθε μπάλα συνεισφέρει με τον ίδιο τρόπο, κατά 1, στον σχηματισμό, οπότε θέτοντας $x_1 = x_2 = x_3 = x$ προκύπτει το ακόλουθο πολυώνυμο του x, βαθμού u:

$$F(x) = p(x,x,x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell+1}x^{\ell+1} + \cdots + a_u x^u, \qquad \text{όπου } \ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3, u = u_1 + u_2 + u_3,$$

στο οποίο ο συντελεστής a_n του x^n ισούται με το πλήθος των $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$ με $n_1 + n_2 + n_3 = n$ (διότι η αλλαγή μεταβλητής μετέτρεψε κάθε ένα από τα μονώνυμα αυτά στο x^n). Επομένως, το ζητούμενο πλήθος είναι ο συντελεστής του x^7 στο πολυώνυμο αυτό. Για τις συγκεκριμένες τιμές των ℓ_i, u_i, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F(x) = p(x,x,x) &= (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) = \frac{1-x^4}{1-x}\frac{1-x^5}{1-x}\frac{1-x^6}{1-x} \\ &= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 17x^5 + 18x^6 + 17x^7 + 14x^8 + 10x^9 + 6x^{10} + 3x^{11} + x^{12}. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, το ζητούμενο πλήθος τρόπων ισούται με $[x^7]F(x) = 17$. ☐

Σημειώνεται ότι το πολυώνυμο $F(x)$ απαντά στο παραπάνω πρόβλημα για οποιοδήποτε μήκος $n \leq u = 12$, διότι κατασκευάστηκε από όλα τα μονώνυμα που αντιστοιχούν σε έγκυρους σχηματισμούς και μόνο αυτά, Επίσης, σημειώνεται ότι ο συντελεστής $[x^n]F(x)$ ισούται και με το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n, \qquad \ell_i \leq n_i \leq u_i, i \in [k],$$

διότι κάθε λύση $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε έναν έγκυρο σχηματισμό $c = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$.

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να συμπληρώσουμε το ποσό των 300 ευρώ χρησιμοποιώντας χαρτονομίσματα των 5, 10, 20 και 50 ευρώ.

Λύση. Υπάρχουν $k = 4$ διαθέσιμα είδη χαρτονομισμάτων, χωρίς περιορισμό στο πλήθος τους, οπότε, ακολουθώντας τον συμβολισμό του προηγούμενου παραδείγματος, μπορούμε να θέσουμε $\ell = \ell_i = 0$ και $u = u_i = +\infty$, για κάθε $i \in [k]$. Συμβολίζουμε με x_1, x_2, x_3, x_4 τα χαρτονομίσματα των $5, 10, 20, 50$ ευρώ αντίστοιχα. Το πρόβλημα αυτό διαφέρει από αυτό του προηγούμενου παραδείγματος στο ότι τώρα κάθε χαρτονόμισμα έχει διαφορετικό μέγεθος (αξία) και δεν συνεισφέρει το ίδιο στον τελικό σχηματισμό. Ορίζουμε το *μέγεθος* (size) ως μια απεικόνιση $s : [k] \to \{5, 10, 20, 50\}$ από το σύνολο των ειδών χαρτονομίσματος στο σύνολο των δυνατών αξιών αυτών, δηλαδή $s_1 = s(x_1) = 5$, $s_2 = s(x_2) = 10$, $s_3 = s(x_1) = 20$, $s_4 = s(x_1) = 50$. Επιπλέον, ορίζουμε το *βάρος* (weight) του χαρτονομίσματος είδους i ως $w_i = w(x_i) = x^{s_i}$. Ένας έγκυρος σχηματισμός είναι ένα μονώνυμο-λέξη $c = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$, με $n_i \in \mathbb{N}$, που για συντομία συμβολίζεται ως $\mathbf{x}^{\mathbf{v}(c)}$, όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ και $\mathbf{v}(c) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Το διάνυσμα $\mathbf{v}(c)$ ονομάζεται *τύπος* του c. Ορίζουμε το *μέγεθος* του τύπου $\mathbf{v}(c)$ ως $s(\mathbf{v}(c)) = s_1 n_1 + s_2 n_2 + \cdots + s_k n_k$ και το μέγεθος του c ως $s(c) := s(\mathbf{v}(c))$. Το απαιτούμενο ποσό είναι $n = 300$, οπότε ζητάμε το πλήθος a_n των σχηματισμών c μεγέθους $s(c) = n$, δηλαδή με τύπο $\mathbf{v}(c) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$s_1 n_1 + s_2 n_2 + \cdots + s_k n_k = n, \qquad n_i \in \mathbb{N}, i \in [k].$$

Προφανώς, είναι $a_n = |s^{-1}(n)|$ (η αντίστροφη εικόνα της απεικόνισης s με πεδίο ορισμού όλους τους έγκυρους σχηματισμούς). Το βάρος του c ορίζεται ως $w(c) = x^{s(c)}$, οπότε η ΓΣ του συνόλου των c ως προς την παράμετρο s είναι η

$$F(x) := \sum_c x^{s(c)} = \sum_c w(c) = \sum_{n \geq 0} \sum_{c \in s^{-1}(n)} x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

οπότε το ζητούμενο πλήθος a_n ισούται με $a_n = [x^n]F(x)$. Επειδή κάθε σχηματισμός c αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε έναν τύπο $\mathbf{v}(c) \in \mathbb{N}^k$ και $s(c) = s(\mathbf{v}(c))$, έχουμε ότι

$$F(x) = \sum_{\mathbf{v} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k} x^{s(\mathbf{v})} = \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{n_k \in \mathbb{N}} x^{n_1 s_1 + \cdots + n_k s_k} = \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} x^{n_1 s_1} \cdots \sum_{n_k \in \mathbb{N}} x^{n_k s_k} = \prod_{i=1}^{k} \sum_{n_i \in \mathbb{N}} x^{n_i s_i} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - x_i^{s_i}}$$

Επειδή μας ενδιαφέρει ο συντελεστής του x^{300}, μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους που δίνουν μονώνυμα βαθμού μεγαλύτερου του 300, παίρνοντας το συνεπτυγμένο (truncated) άθροισμα

$$T(x) = (1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{300})(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{300})(1 + x^{20} + x^{40} + \cdots + x^{300})(1 + x^{50} + x^{100} + \cdots + x^{300})$$

και βρίσκοντας τελικά ότι $[x^{300}]F(x) = [x^{300}]T(x) = 680$ (με τη βοήθεια υπολογιστή). □

Python:

```python
import sympy as sp
x = sp.symbols ('x')
F = 1/(1-x**5)/(1-x**10)/(1-x**20)/(1-x**50)
print("[x^300] F(x) =", sp.poly(F.series(x,0,301)).coeff_monomial(x**300))
```

Sage:

```
R.<x> = PowerSeriesRing(ZZ, 'x', default_prec=301)
f = 1/(1-x^5)/(1-x^10)/(1-x^20)/(1-x^50)
print(f[300])
```

Αν επιπλέον, θέσουμε στο προηγούμενο παράδειγμα τον περιορισμό ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ακριβώς μ χαρτονομίσματα, τότε απλώς αλλάζουμε το βάρος του χαρτονομίσματος σε $w_i = yx^{s_i}$ και παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο μια ΓΣ δύο μεταβλητών $F(x, y) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - yx^{s_i}}$. Το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με $[x^{300} y^{\mu}]F(x, y)$. Ο συντελεστής αυτός υπολογίζεται για $\mu = 20$ από τον ακόλουθο κώδικα Sage:

1ος τρόπος:

```
R.<x, y> = PowerSeriesRing(ZZ, default_prec=361)
f = 1/(1-y*x^5)/(1-y*x^10)/(1-y*x^20)/(1-y*x^50)
print(f.coefficients()[x^300*y^20]) #a dictionary where each key is a monomial
```

2ος τρόπος:

```
#P.<y> = PolynomialRing(ZZ)
P.<y> = PowerSeriesRing(ZZ, default_prec=61)
R.<x> = PowerSeriesRing(P, default_prec=301)
f = 1/(1-y*x^5)/(1-y*x^10)/(1-y*x^20)/(1-y*x^50)
print(f[300])
print("coef:", f[300][20])
```

Στον πρώτο τρόπο, ορίζουμε τον δακτύλιο $R = \mathbb{Z}[[x, y]]$ των δυναμοσειρών των μεταβλητών x, y με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$. Στον δεύτερο τρόπο, ορίζουμε το R ως τον (ισόμορφο) δακτύλιο $P[[x]]$ των δυναμοσειρών της μεταβλητής x με συντελεστές στο P, όπου $P = \mathbb{Z}[[y]]$ ο δακτύλιος των δυναμοσειρών της μεταβλητής y με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$. Έτσι, ο συντελεστής $[x^n]F(x, y)$ είναι μια δυναμοσειρά του y. Για την ακρίβεια, είναι ένα πολυώνυμο (γιατί;), οπότε το P μπορεί να οριστεί και ως δακτύλιος πολυωνύμων. Το πλεονέκτημα είναι ότι έτσι έχουμε εύκολη πρόσβαση στο πολυώνυμο αυτό, στο οποίο ο συντελεστής του $[y^\mu]$ δίνει την απάντηση για οποιοδήποτε μ.

Γενική μορφή: Συνοψίζοντας, το πρόβλημα στη γενική του μορφή είναι η απαρίθμηση των μη διατεταγμένων σχηματισμών από n_i αντικείμενα κατηγορίας i, για κάθε $i \in [k]$, όταν υπάρχουν k κατηγορίες και τα αντικείμενα επιλέγονται σύμφωνα με κάποιους περιορισμούς, έτσι ώστε να ισχύει

$$s_1 n_1 + s_2 n_2 + \cdots + s_k n_k = n, \qquad n_i \in N_i, i \in [k],$$

όπου s_i το μέγεθος ενός αντικειμένου κατηγορίας i και N_i το σύνολο δυνατών τιμών του n_i σύμφωνα με τους περιορισμούς. Συμβολίζουμε με A_i το σύνολο αντικειμένων κατηγορίας i και με C_i το σύνολο επιλογών από το A_i. Οι σχηματισμοί μπορούν να θεωρηθούν ως ταξινομημένες λέξεις (τα γράμματα είναι σε αύξουσα σειρά), δηλαδή τα A_i είναι ολικά διατεταγμένα αλφάβητα και η ολική διάταξη επεκτείνεται ώστε κάθε γράμμα του A_i προηγείται από κάθε γράμμα του A_j όταν $i < j$. Επομένως, κάθε C_i μπορεί να θεωρηθεί ως σύνολο λέξεων στο αλφάβητο A_i και το σύνολο των σχηματισμών συμβολίζεται ως C και ισούται με το καρτεσιανό γινόμενο $C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_k$. Κάθε γράμμα έχει μήκος 1 αλλά μπορεί να έχει διαφορετικό μέγεθος, ανάλογα με τη συνάρτηση μεγέθους s που έχει ορισθεί. Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις για τον σχηματισμό αυτών των λέξεων:

i) Τα αντικείμενα της ίδιας κατηγορίας είναι μη διακεκριμένα (όμοια). Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $A_i = \{x_i\}$ και ότι επιλέγουμε $n_i \in N_i$ φορές από το (αλφάβητο) A_i με επανατοποθέτηση. Το γράμμα x_i έχει μέγεθος $s(x_i) = s_i$ και βάρος $w(x_i) = w_i = x^{s_i}$. Η επιλογή j αντικειμένων από το A_i είναι η λέξη x_i^j, μήκους $|x_i^j| = j$, μεγέθους $s(x_i^j) = js_i$ και βάρους $w(x_i^j) = x^{js_i}$. Το σύνολο επιλογών C_i είναι το σύνολο λέξεων στο αλφάβητο $A_i = \{x_i\}$ με μήκος στο N_i, δηλαδή $C_i = \{x_i^j : j \in N_i\}$. Επομένως, η ΓΣ του συνόλου C_i είναι η

$$F_i(x) = \sum_{c \in C_i} w(c) = \sum_{c \in C_i} x^{s(c)} = \sum_{j \in N_i} x^{js_i}. \tag{1}$$

ii) Τα αντικείμενα ίδιας κατηγορίας είναι διακεκριμένα και επιλέγονται χωρίς επανατοποθέτηση. Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $A_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,u_i}\}$, όπου $u_i = |A_i|$, και ότι το (αλφάβητο) A_i είναι ολικά διατεταγμένο, με $x_{i,1} < x_{i,2} < \cdots < x_{i,u_i}$. Κάθε γράμμα στο A_i έχει το ίδιο μέγεθος s_i και το ίδιο βάρος x^{s_i}. Η επιλογή n_i αντικειμένων κατηγορίας i είναι μια λέξη με n_i γράμματα του A_i σε αύξουσα σειρά, με το κάθε ένα να εμφανίζεται μία φορά, δηλαδή $C_i = \{\mathbf{x}_i^{\mathbf{v}} : \mathbf{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,u_1}), \mathbf{v} \in \{0,1\}^{u_i}, |\mathbf{x}_i^{\mathbf{v}}| \in N_i\}$. Ορίζουμε η επιλογή $c \in C_i$ να έχει μέγεθος $s(c) = |c|s_i$ και βάρος $w(c) = x^{|c|s_i}$, οπότε η ΓΣ του συνόλου C_i ως προς το βάρος των στοιχείων του είναι η

$$F_i(x) = \sum_{c \in C_i} w(c) = \sum_{n_i \in N_i} \sum_{c \in C_i : |c| = n_i} x^{n_i s_i} = \sum_{n_i \in N_i} \binom{u_i}{n_i} x^{n_i s_i}. \tag{2}$$

$iii)$ Τα αντικείμενα της ίδιας κατηγορίας είναι διακεκριμένα και επιλέγονται με επανατοποθέτηση. Η περίπτωση αυτή είναι όπως η $ii)$, με τη διαφορά ότι εδώ είναι $C_i = \{\mathbf{x}_i^{\mathbf{v}} : \mathbf{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,u_1}), \mathbf{v} \in \mathbb{N}^{u_i}, |\mathbf{x}_i^{\mathbf{v}}| \in N_i\}$, οπότε η ΓΣ του C_i είναι η

$$F_i(x) = \sum_{c \in C_i} w(c) = \sum_{n_i \in N_i} \sum_{c \in C_i : |c| = n_i} x^{n_i s_i} = \sum_{n_i \in N_i} \sum_{\substack{(j_1, j_2, \ldots, j_{u_i}) \in \mathbb{N}^{u_i} \\ j_1 + j_2 + \cdots + j_{u_i} = n_i}} x^{n_i s_i} = \sum_{n_i \in N_i} \binom{u_i + n_i - 1}{n_i} x^{n_i s_i}. \tag{3}$$

Υπενθυμίζεται ότι ο τελευταίος συνδυασμός ισούται με το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $j_1 + j_2 + \cdots + j_{u_i} = n_i$, ή, ισοδύναμα, με το πλήθος των επιλογών n_i στοιχείων από u_i με επανατοποθέτηση.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, κάθε σχηματισμός $c \in C$ είναι μια ταξινομημένη λέξη, οπότε το σύνολο σχηματισμών C μπορεί να θεωρηθεί ως το καρτεσιανό γινόμενο $C = C_1 \times \cdots \times C_k$. Η λέξη c έχει τύπο $\mathbf{v}(c) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, μήκος $|c| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, μέγεθος $s(c) = s(\mathbf{v}(c)) = s_1 n_1 + s_2 n_2 + \cdots + s_k n_k$ και βάρος $w(c) = x^{s(c)}$, οπότε η ΓΣ του συνόλου C ως προς την παράμετρο s είναι η

$$F(x) := \sum_{c \in C} x^{s(c)} = \sum_{c \in C} w(c) = \prod_{i=1}^{k} F_i(x). \tag{4}$$

Πράγματι, επειδή η παράμετρος του μεγέθους είναι αθροιστική (και άρα η συνάρτηση βάρους είναι πολλαπλασιαστική), δηλαδή ισχύει $s(c_1, \ldots, c_k) = s(c_1) + \cdots + s(c_k)$, έπεται ότι

$$F(x) = \sum_{c \in C} w(c) = \sum_{(c_1, \ldots, c_k) \in C} x^{s(c_1, \ldots, c_k)} = \sum_{c_1 \in C_1} x^{s(c_1)} \cdots \sum_{c_k \in C_k} x^{s(c_k)},$$

ή ισοδύναμα, με ΓΣ ακολουθιών, ότι

$$F(x) = \sum_{n_1 \in N_1} a_{1,n_1} x^{s_1 n_1} \cdots \sum_{n_k \in N_k} a_{k,n_k} x^{s_k n_k} = \sum_{n} \sum_{\substack{(n_1 \ldots, n_k) \in N_1 \times \cdots \times N_k : \\ s_1 n_1 + \cdots + s_k n_k = n}} a_{1,n_1} \cdots a_{k,n_k} x^n,$$

όπου a_{i,n_i} το πλήθος επιλογών n_i αντικειμένων κατηγορίας i. Επομένως, ο συντελεστής $[x^n]F(x)$ ισούται με το πλήθος των σχηματισμών μεγέθους n που ικανοποιούν τους περιορισμούς, το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Παρατήρηση: Όλα τα παραπάνω στηρίζονται σε 3 βασικές ιδιότητες-προϋποθέσεις:

- Η παράμετρος s πρέπει να είναι βασική, δηλαδή το σύνολο αντικειμένων c με $s(c) = n$ πρέπει να είναι πεπερασμένο, για κάθε n. Αυτό εξασφαλίζει ότι οι ΓΣ ορίζονται ακόμα και όταν είναι άπειρα αθροίσματα.
- Το σύνολο αντικειμένων πρέπει να εκφράζεται ως καρτεσιανό γινόμενο. Εδώ είναι $C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_k$.
- Η παράμετρος s πρέπει να είναι αθροιστική στο καρτεσιανό γινόμενο, δηλαδή $s(c) = s(c_1) + \cdots + s(c_k)$, όταν $c = (c_1, \ldots, c_k)$. Οι δύο τελευταίες ιδιότητες εξασφαλίζουν ότι η ΓΣ του C είναι το γινόμενο των ΓΣ των C_i.

Τα παραπάνω ισχύουν και όταν ορίσουμε περισσότερες παραμέτρους και μεταβλητές. Τότε θα έχουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{s}$ παραμέτρων που θα πρέπει να είναι βασικό και αθροιστικό, και ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ αντίστοιχων μεταβλητών, οπότε η συνάρτηση βάρους θα είναι η $w(c) = \mathbf{x}^{\mathbf{s}(c)}$ και θα είναι πάλι πολλαπλασιαστική.

Άσκηση 1. Δίνεται ένα σύνολο u σε πλήθος ερωτήσεων. Οι ερωτήσεις αυτές είναι χωρισμένες σε 4 επίπεδα δυσκολίας. Κάθε επίπεδο $i \in [4]$ περιέχει u_i ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση επιπέδου $i \in [4]$ δίνει i μονάδες. Κάθε επιλογή ερωτήσεων σχηματίζει ένα ερωτηματολόγιο (τεστ). Η σειρά εμφάνισης των ερωτήσεων στο τεστ δεν έχει σημασία. Ένα τεστ λέμε ότι έχει τύπο (n_1, n_2, n_3, n_4), όταν για κάθε $i \in [4]$ περιέχει n_i ερωτήσεις επιπέδου i.

1. Πόσοι δυνατοί τύποι τεστ υπάρχουν για ένα τεστ συνολικού βαθμού n;
2. Να βρεθεί η ΓΣ για το πλήθος των τεστ με n μονάδες και k ερωτήσεις, όταν κάθε ερώτηση επιλέγεται το πολύ μία φορά και
   - $i)$ δεν υπάρχουν άλλοι περιορισμοί,
   - $ii)$ επιλέγεται τουλάχιστον μια ερώτηση από κάθε επίπεδο.
   - $iii)$ Αν επιλέγεται μια ερώτηση επιπέδου i, τότε θα πρέπει να επιλεχθεί και τουλάχιστον μια ερώτηση από κάθε μικρότερο επίπεδο.

Λύση. Έχουμε $k = 4$ επίπεδα δυσκολίας και $s_i = i$ είναι το μέγεθος (αξία) κάθε ερώτησης επιπέδου i.

1) Η ΓΣ για το πλήθος των λύσεων της

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = n, \qquad 0 \leq n_i \leq u_i, i \in [4], n \in \mathbb{N},$$

είναι η

$$T(x) = \prod_{i=1}^{4} \sum_{n_i=0}^{u_i} x^{in_i} = \prod_{i=1}^{4} \frac{1 - x^{i(u_i+1)}}{1 - x^i},$$

άρα το ζητούμενο πλήθος τύπων είναι ίσο με $[x^n]T(x)$.

2) Το σύνολο ερωτήσεων επιπέδου i είναι το $A_i = \{q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,u_i}\}$. Ορίζουμε το βάρος κάθε ερώτησης στο A_i να είναι $w_i = yx^i$. Η μεταβλητή y κωδικοποιεί τη δεύτερη παράμετρο που είναι το πλήθος ερωτήσεων στο τεστ και το βάρος αυτό υποδηλώνει ότι κάθε ερώτηση συνεισφέρει κατά 1 στο πλήθος αυτό και κατά s_i στον συνολικό βαθμό του τεστ.

$2i)$ Το σύνολο επιλογών C_i από το σύνολο A_i έχει ΓΣ την

$$F_i(x, y) = \sum_{n_i=0}^{u_i} \binom{u_i}{n_i} (yx^i)^{n_i} = (1 + xy^i)^{u_i},$$

οπότε η ζητούμενη ΓΣ είναι η $F(x, y) = \prod_{i=1}^{k} (1 + xy^i)^{u_i}$ και το ζητούμενο πλήθος δίνεται από τον συντελεστή $[x^n y^k]F(x, y)$.

$2ii)$ Επειδή επιλέγεται τουλάχιστον μια ερώτηση από το A_i, η ΓΣ του C_i σε αυτήν την περίπτωση είναι η $F_i(x, y) = (1 + xy^i)^{u_i} - 1$ και $F(x, y) = \prod_{i=1}^{k} F_i(x, y)$ όπως και πριν.

$2iii)$ Η ΓΣ για το σύνολο επιλογών από το επίπεδο i είναι η $F_i(x, y) = (1 + xy^i)^{u_i} - 1$. Θέτουμε $G_i(x, y)$ την ΓΣ για το σύνολο τεστ με μέγιστο επίπεδο i. Είναι

$$G_j(x, y) = \prod_{j=1}^{i} F_j(x, y), \qquad j \in [4]$$

και το ζητούμενο πλήθος ισούται με $[x^n y^k]F(x, y)$, όπου $F(x, y) = G_1(x, y) + G_2(x, y) + G_3(x, y) + G_4(x, y)$.

Αν δεν μας ενδιαφέρει το πλήθος ερωτήσεων k, τότε θέτουμε $y = 1$ και παίρνουμε τη ΓΣ (μίας μεταβλητής) ως προς το μέγεθος s (συνολικός βαθμός του τεστ), σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις. $\square$

Άσκηση 2. Να λυθεί η παραπάνω άσκηση όταν κάθε ερώτηση επιτρέπεται να επιλεχθεί πάνω από μια φορά.

Άσκηση 3. Να δειχθεί ότι το άθροισμα n που φέρνουν δύο τετράπλευρα (αμερόληπτα) ζάρια με ενδείξεις $(1,2,2,3)$ και $(1,3,3,5)$ έχει την ίδια κατανομή με δύο κανονικά τετράπλευρα ζάρια με ενδείξεις $(1,2,3,4)$. Επιπλέον, να δειχθεί ότι κανένα άλλο ζεύγος ζαριών δεν έχει αυτή την ιδιότητα.
Πόσα είναι τα ζεύγη 6-πλευρων ζαριών με ίδια κατανομή αθροίσματος με το ζεύγος κανονικών εξάπλευρων ζαριών;

Λύση. Επιλέγουμε μια πλευρά με ένδειξη n_i από κάθε ζάρι $i \in [2]$ και προκύπτει το άθροισμα $n_1 + n_2 = n$. Άρα, μπορούμε να θέσουμε

$$C_1 = A_1 = \{1_1, 2_2, 2_3, 3_4\}, \quad C_2 = A_2 = \{1_1, 3_2, 3_3, 5_4\},$$

όπου το j_ν δηλώνει την ένδειξη j στην πλευρά ν. Επιπλέον, θέτουμε $s(j_\nu) = j$ και $w(j_\nu) = x^j$, οπότε οι ΓΣ για το πρώτο και δεύτερο ζάρι είναι αντίστοιχα οι

$$F_1(x) = \sum_{c \in C_1} w(c) = x + x^2 + x^2 + x^3 = x + 2x^2 + x^3 \quad \text{και} \quad F_2(x) = \sum_{c \in C_2} w(c) = x + x^3 + x^3 + x^5 = x + 2x^3 + x^5$$

και το πλήθος των τρόπων που προκύπτει το άθροισμα n ισούται με τον συντελεστή του x^n στη ΓΣ

$$F(x) = F_1(x)F_2(x) = (x + 2x^2 + x^3)(x + 2x^3 + x^5) = x^2(1+x)^2(1+x^2)^2,$$

ενώ η αντίστοιχη ΓΣ για τα δύο κανονικά ζάρια είναι η

$$G(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^2 = x^2(1 + x + x^2 + x^3)^2 = x^2(1 + x^2 + x(1+x^2))^2 = x^2(1+x^2)^2(1+x)^2.$$

Επομένως είναι $F(x) = G(x)$, άρα και $[x^n]F(x) = [x^n]G(x)$, για κάθε άθροισμα n.

Έστω τώρα ένα ζεύγος ζαριών με την ίδια ιδιότητα. Η αντίστοιχη ΓΣ για αυτό το ζεύγος θα είναι επίσης η $F(x) = x^2(1+x)^2(1+x^2)^2$. Θέτουμε $p(x) = 1+x$ και $q(x) = 1+x^2$ και αναζητούμε όλους τους τρόπους που μπορούμε να προσεταιρίσουμε τους όρους του γινομένου $F(x)$ στη μορφή $F(x) = F_1(x)F_2(x)$, ώστε η $F_i(x)$ να αποτελεί τη ΓΣ για το ζάρι i, δηλαδή να ισχύει $F_1(1) = F_2(1) = 4$ (επειδή κάθε ζάρι έχει 4 πλευρές) και $F_1(0) = F_2(0) = 0$ (επειδή επιλέγεται οπωσδήποτε μια πλευρά). Αφού είναι $p(1) = q(1) = 2$, αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: Ο πρώτος αντιστοιχεί στο ζεύγος κανονικών ζαριών και προκύπτει θέτοντας $F_1(x) = xp(x)q(x) = F_2(x)$ και δεύτερος προκύπτει θέτοντας $F_1(x) = xp^2(x)$ και $F_2(x) = xq^2(x)$.

Αν έχουμε 6-πλευρα ζάρια, τότε η ΓΣ για το ζεύγος κανονικών ζαριών είναι η

$$F(x) = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2 = x^2(1+x^3)^2(1+x+x^2)^2 = x^2(1+x+x^2)^2(1+x)^2(1-x+x^2)^2.$$

Θέτουμε $p(x) = 1+x$, $q(x) = 1+x+x^2$ και $r(x) = 1-x+x^2$, οπότε $p(1) = 2, q(1) = 3, r(1) = 1$. Επειδή θα πρέπει να είναι $F_1(1) = F_2(1) = 6$ και $F_1(0) = F_2(0) = 0$, έπεται ότι οι δυνατοί τρόποι είναι ο $F_1(x) = F_2(x) = xp(x)q(x)r(x)$ (2 κανονικά ζάρια) και ο

$$F_1(x) = xp(x)q(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4, \qquad F_2(x) = xp(x)q(x)r^2(x) = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8,$$

που αντιστοιχεί στο ζεύγος ζαριών $(1,2,2,3,3,4)$, $(1,3,4,5,6,8)$. □

Άσκηση 4. Ρίχνουμε ένα κέρμα 14 φορές και φέρνει (ακριβώς) τρεις φορές Γράμματα (Γ). Ποια είναι η πιθανότητα να μην έφερε 5 διαδοχικές φορές Κορώνα (Κ);

Λύση. Κάθε ευνοϊκό ενδεχόμενο είναι μια ακολουθία ρίψεων $K^{n_1}\Gamma K^{n_2}\Gamma K^{n_3}\Gamma K^{n_4}$, με

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 14 - 3 = 11, \qquad 0 \le n_i \le 4, i \in [4].$$

Έχουμε, για κάθε $i \in [4]$, $A_i = \{K\}$, $C_i = \{K^j : 0 \le j \le 4\}$, με $s(K^j) = j$ και $w(K^j) = x^j$. Το σύνολο C όλων των ευνοϊκών ενδεχομένων μπορεί να θεωρηθεί ως το $C = C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4$, οπότε οι ΓΣ των C_i και του C είναι αντίστοιχα οι

$$F_i(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \qquad \text{και} \qquad F(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^4 = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^4$$

και το ζητούμενο πλήθος ισούται με $[x^{11}]F(x) = 52$. Από την άλλη, τα δυνατά ενδεχόμενα είναι $\binom{14}{3} = 364$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $52/364 = 1/7$. □

Άσκηση 5. Υπάρχουν k είδη κερμάτων. Να βρεθεί η ΓΣ της ακολουθίας $a_{n,m}$ των διακεκριμένων τρόπων να έχουμε n κέρματα με ακριβώς m Κορώνες.

Λύση. Κάθε αποτέλεσμα κωδικοποιείται από μια ακολουθία $(h_1, h_2, \ldots, h_k, t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{N}^{2k}$ όπου h_i (αντ t_i) το πλήθος κορώνων (αντ. γραμμάτων) από το i είδος. Θέλουμε το πλήθος αυτών που ικανοποιούν $h_1 + \cdots + h_k = m$ και $t_1 + \cdots + t_k = n - m$. Θέτουμε το βάρος ενός νομίσματος με γράμματα (αντ. κορώνα) να είναι x (αντ. xy), οπότε η ΓΣ για την συνιστώσα h_i είναι η $1 + xy + (xy)^2 + \cdots = (1 - xy)^{-1}$, ενώ η ΓΣ για την συνιστώσα t_i είναι η $1 + x + x^2 + \cdots = (1 - x)^{-1}$. Επομένως, έχουμε ότι $a_{n,m} = [x^n y^m](1 - x)^{-k}(1 - xy)^{-k}$. □

Άσκηση 6. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε n γράμματα από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ ώστε να επιλεχθεί άρτιος αριθμός από 0;

Λύση. Η ΓΣ για το σύνολο επιλογών του 0 είναι η $F_0(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x^2}$, ενώ οι ΓΣ για τα σύνολα επιλογών των 0 και 1 είναι οι $F_1(x) = F_2(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x}$, επομένως η ΓΣ του συνόλου επιλογών είναι

$$F(x) = \frac{1}{(1 - x)^2(1 - x^2)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} + \frac{2}{(1 - x)^2} + \frac{4}{(1 - x)^3}\right)$$

και το ζητούμενο πλήθος ισούται με

$$[x^n]F(x) = \frac{1}{8}\left((-1)^n + 1 + 2(n + 1) + 4\binom{n + 2}{2}\right)\frac{1}{8}\left(1 + (-1)^n + 2(n + 1)(n + 3)\right).$$ □

Άσκηση 7. Να δειχθεί ότι το πλήθος o_n των διαμερίσεων του n με περιττούς όρους ισούται με το πλήθος d_n των διαμερίσεων του n με διαφορετικούς όρους.

Λύση. Η ΓΣ για το σύνολο των τρόπων που συμμετέχει ο περιττός $2k + 1$ στη διαμέριση του n είναι η $F_{2k+1}(x) = 1 + x^{2k+1} + x^{2(2k+1)} + \cdots = \dfrac{1}{1 - x^{2k+1}}$, δηλαδή ο $2k + 1$ συμμετέχει i φορές με βάρος $x^{i(2k+1)}$, για κάποιο $i \in \mathbb{N}$. Κατόπιν τούτου, είναι $o_n = [x^n]F(x)$, όπου $F(x) = \displaystyle\prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - x^{2k+1}}$. Από την άλλη, σε μια διαμέριση με διαφορετικούς όρους, κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ συμμετέχει το πολύ μια φορά με βάρος x^k, οπότε $d_n = [x^n]G(x)$, με $G(x) = \displaystyle\prod_{k \in \mathbb{N}^*}(1 + x^k)$. Απομένει να δειχθεί ότι $F(x) = G(x)$. Είναι $G(x) = \displaystyle\prod_{k \geq 1}(1 + x^k) = \prod_{k \geq 1}\frac{1 - x^{2k}}{1 - x^k} = \prod_{k \geq 1}\frac{1}{1 - x^{2k-1}} = F(x)$. □

Άσκηση 8. Να βρεθεί η ΓΣ της ακολουθίας (a_n), όπου a_n είναι το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της

$$n_1 + n_2 + 2n_3 + 3n_4 + n_5 = n,$$

με τους περιορισμούς $n_1 + 2n_3 \leq 10$, $n_4 \neq n_5$ και $n_1 + n_2 + 2n_3$ άρτιος.

Λύση. Η ΓΣ για το πλήθος των λύσεων της $n_1 + 2n_3 = n$ χωρίς τους περιορισμούς είναι η $G_1(x) = \dfrac{1}{1 - x}\dfrac{1}{1 - x^2}$. Επομένως, με τον περιορισμό $n \leq 10$, προκύπτει μια ΓΣ $F_1(x)$ ως το (πεπερασμένο) άθροισμα των όρων της $G_1(x)$ βαθμού από 0 έως και 10.

Η ΓΣ για το πλήθος των λύσεων της $n_1 + n_2 + 2n_3 = n$ χωρίς τους περιορισμούς είναι η $G_2(x) = \dfrac{1}{1 - x}F_1(x)$. Επομένως, με τον περιορισμό $n_1 + n_2 + 2n_3$ άρτιος, προκύπτει η ΓΣ $F_2(x) = (G_2(x) + G_2(-x))/2$.

Η ΓΣ για το πλήθος των λύσεων της $3n_4 + n_5 = n$ χωρίς τους περιορισμούς είναι η $G_3(x) = \dfrac{1}{1 - x^3}\dfrac{1}{1 - x}$. Η περίπτωση $n_4 = n_5$ προκύπτει όταν $n = 4m$ και $n_4 = n_5 = m$, δηλαδή υπάρχει ένα ζεύγος (n_4, n_5) που δίνει άθροισμα n και αυτό μόνο όταν n πολλαπλάσιο του 4. Η ΓΣ για το πλήθος των λύσεων είναι η $1/(1 - x^4)$, επομένως με τον περιορισμό $n_4 \neq n_5$, προκύπτει η ΓΣ $F_3(x) = G_3(x) - 1/(1 - x^4)$.

Τέλος, το γινόμενο $F(x) = F_2(x)F_3(x)$ αποτελεί τη ζητούμενη ΓΣ, αφού θέτοντας $n_1 + n_2 + 2n_3 = m_1$ και $3n_4 + n_5 = m_2$, η $F(x)$ απαριθμεί το πλήθος λύσεων της $m_1 + m_2 = n$ με τους παραπάνω περιορισμούς. □

Οι παραπάνω συντελεστές $[x^n]F(x)$ για $n \leq 50$, υπολογίζονται με τον ακόλουθο κώδικα Sage:

```
G1(x) = 1/(1-x)/(1-x^2) #n_1 + 2n_3 free
F1(x) = taylor(G1(x), x, 0, 10) #n_1 + 2n_3 <= 10
G2(x) = F1(x)/(1-x) #n_1 +  n_2 + 2n_3 n_2 free
F2(x) = (G2(x)+G2(-x))/2 #n_1 + n_2 +2n3 even
G3(x) = 1/(1-x^3)/(1-x) #3n_4 + n_5 free
F3(x) = G3(x) - 1/(1-x^4) #n_4 != n_5
F(x) = F2(x)*F3(x)
F(x).series(x, 51)
```

και μπορούν να επαληθευθούν κατασκευάζοντας όλες τις λύσεις, με τον ακόλουθο κώδικα:

```
import time
def isValid(n1, n2, n3, n4, n5):
    return n1 + 2*n3 <= 10 and n4 != n5 and (n1+n2+2*n3)%2 == 0

start = time.time()
n = 50
coeffs = (n+1)*[0]
for n1 in range(11):
    for n2 in range(n+1):
        for n3 in range(6):
            for n4 in range(n//3 + 1):
                for n5 in range(n+1):
                    if isValid(n1, n2, n3, n4, n5):
                        m = (n1 + n2 + 2*n3 + 3*n4 + n5)
                        if m <= n: coeffs[m] += 1

end = time.time()
for i in range(len(coeffs)): print("%s: %s"%(i, coeffs[i]))
print("Time elapsed:", end-start)
```

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η ΓΣ της ακολουθίας (a_n), όπου a_n το πλήθος των λύσεων της $4n_1 + 2n_2 + n_3 + 2n_4 = n$, $n_i \in \mathbb{N}$.

2. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεχθούν με επανατοποθέτηση n αντικείμενα από ένα σύνολο 10 διακεκριμένων αντικειμένων, ώστε το πρώτο να επιλεχθεί το πολύ 2 φορές, το δεύτερο το πολύ 3 φορές και τα υπόλοιπα από 1 το πολύ φορά;

3. Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν $2n + 1$ επιβάτες σε 3 διακεκριμένα λεωφορεία, έτσι ώστε κάθε λεωφορείο να περιέχει το πολύ n επιβάτες;

4. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 24 σφαίρες σε 4 στρατιώτες έτσι, ώστε καθένας να πάρει από 3 έως και 8;

5. Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 25 όμοια αντικείμενα σε 7 διαφορετικά κουτιά έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει το πολύ 10 αντικείμενα;

6. Να βρεθεί το πλήθος των διαμερίσεων του 2^n με όρους ίσους με 1, 2 ή 4.

7. Με πόσους τρόπους μπορεί να εκφραστεί ο $n \in \mathbb{N}^*$ ως άθροισμα διαφορετικών θετικών ακεραίων;

Σχηματισμοί με διάταξη

Στην περίπτωση αυτή, ο τελικός σχηματισμός c αποτελείται όπως και πριν από τα επιλεγμένα αντικείμενα που περιέχουν τα A_i $i \in [k]$, αλλά τώρα έχει σημασία η σειρά (διάταξη) των αντικειμένων αυτών στον c. Ο σχηματισμός c μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί ως μια λέξη στο αλφάβητο $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Επειδή το σύνολο επιλογών C είναι σύνολο λέξεων, για την απαρίθμηση χρησιμοποιούμε εκθετικές ΓΣ (ΕΓΣ).

Υπενθυμίζεται ότι η ΕΓΣ της ακολουθίας $(a_n)_{n\geq 0}$ ορίζεται ως το άθροισμα

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!},$$

οπότε $a_n = n![x^n]A(x)$. Το γινόμενο δύο ΕΓΣ $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ και $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$ δίνει την ΕΓΣ $C(x)$ της ακολουθίας (c_n) που ονομάζεται *διωνυμική συνέλιξη* των $(a_n), (b_n)$. Συγκεκριμένα, είναι

$$C(x) = A(x)B(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}x^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\frac{x^n}{n!},$$

οπότε

$$c_n = n![x^n]C(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

Η ΕΓΣ της ακολουθίας $(k^n)_{n\geq 0}$ των λέξεων μήκους n στο αλφάβητο $[k]$ είναι η $e^{kx} = \sum_{n\geq 0} k^n \frac{x^n}{n!}$. Γενικότερα, η ΕΓΣ του συνόλου των λέξεων σε ένα αλφάβητο A είναι η

$$A(x) = \sum_{\alpha\in A^*} \frac{x^{|\alpha|}}{|\alpha|!} = \sum_{n\geq 0}\sum_{\alpha\in A^n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |A^n| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |A|^n \frac{x^n}{n!} = e^{|A|x}$$

και αν B είναι ένα αλφάβητο με $A\cap B = \varnothing$, τότε η ΕΓΣ του συνόλου $(A\cup B)^*$ είναι η

$$A(x)B(x) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |A|^k |B|^{n-k} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} |A\cup B|^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{\alpha\in (A\cup B)^*} \frac{x^{|\alpha|}}{|\alpha|!},$$

αφού κάθε λέξη $\alpha \in (A\cup B)^n$ σχηματίζεται επιλέγοντας τις k θέσεις από τις n οι οποίες θα περιέχουν γράμματα από το A, ενώ οι υπόλοιπες θέσεις θα περιέχουν γράμματα από το B, και τέλος επιλέγοντας μια λέξη στο A^k και μια λέξη στο B^{n-k} για να γεμίσουν αυτές τις θέσεις με τα γράμματά τους. Το μέγεθος $s(\alpha)$ της λέξης α ορίζεται ως το άθροισμα των μεγεθών των γραμμάτων της, και το βάρος της είναι $w(\alpha) = x^{s(\alpha)}/|\alpha|!$.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να συνδυάσουμε δύο οποιαδήποτε σύνολα λέξεων $L_A \subseteq A^*$ και $L_B \subseteq B^*$, παίρνοντας ένα σύνολο που θα συμβολίζουμε ως $L_A \circ L_B$. Κάθε λέξη στο σύνολο αυτό έχει προέλθει ανακατεύοντας τα γράμματα μιας λέξης $\alpha \in L_A$ και μιας λέξης $\beta \in L_B$, χωρίς να αλλάζουμε τη σχετική σειρά των γραμμάτων σε κάθε λέξη. Η ΕΓΣ $L_A \circ L_B$ θα είναι το γινόμενο των ΕΓΣ των L_A, L_B.

Γενικότερα, αν έχουμε $A_1, \ldots, A_k$ ξένα αλφάβητα, με το μέγεθος κάθε γράμματος στο A_i να είναι s_i, και κάποια υποσύνολα $C_1 \subseteq A_1^*, \ldots, C_k \subseteq A_k^*$, τότε η ΕΓΣ του $C = C_1 \circ \cdots \circ C_k$ ως προς το μέγεθος είναι η

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{c\in C} \frac{x^{s(c)}}{|c|!} = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{c\in C\\ s(c)=n}} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k\\ s_1n_1+\cdots+s_kn_k=n}} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k} a_{1,n_1}\cdots a_{k,n_k}\frac{x^n}{n!},\\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k\\ s_1n_1+\cdots+s_kn_k=n}} \prod_{i=1}^{k} a_{i,n_i}\frac{x^{s_in_i}}{n_i!} = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k\\ s_1n_1+\cdots+s_kn_k=n}} \prod_{i=1}^{k} \sum_{\substack{c_i\in C_i\\ |c_i|=n_i}} \frac{x^{s_in_i}}{n_i!} = \prod_{i=1}^{k}\sum_{c_i\in C_i} \frac{x^{s(c_i)}}{|c_i|!}
\end{aligned}$$

όπου a_{i,n_i} το πλήθος λέξεων μήκους n_i στο C_i και $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$.

Σε αυτήν την συνδυαστική ερμηνεία της διωνυμικής συνέλιξης βασίζεται και η απαρίθμηση των διατεταγμένων σχηματισμών με ΕΓΣ. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, όπως και πριν:

i) Τα αντικείμενα της ίδιας κατηγορίας είναι όμοια, οπότε $A_i = \{x_i\}$ και $A = [k]$. Τότε, το σύνολο επιλογών $C_i = \{x_i^j : j \in N_i\}$ έχει ΕΓΣ

$$F_i(x) = \sum_{n_i \in N_i} \frac{x^{s_i n_i}}{n_i!}.$$

ii) Τα αντικείμενα της ίδιας κατηγορίας είναι διακεκριμένα και επιλέγονται χωρίς επανατοποθέτηση. Τότε είναι $A_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,u_i}\}$, $u_i = |A_i|$. Το σύνολο επιλογών είναι το $C_i = \{\alpha \in A_i^* : |\alpha| \in N_i, |\alpha|_{x_{i,j}} \leq 1, j \in [u_i]\}$, όπου $|\alpha|_{x_{i,j}}$ είναι το πλήθος εμφανίσεων του γράμματος $x_{i,j}$ στη λέξη α, και το πλήθος λέξεων στο C_i μήκους n_i ισούται με $\dfrac{u_i!}{(u_i - n_i)!}$, οπότε, θέτοντας $s_i = s(x_i)$, η ΕΓΣ του C_i είναι η

$$F_i(x) = \sum_{n_i \in N_i} \frac{u_i!}{(u_i - n_i)!} \frac{x^{s_i n_i}}{n_i!} = \sum_{n_i \in N_i} \binom{u_i}{n_i} x^{s_i n_i}.$$

iii) Τα αντικείμενα της ίδιας κατηγορίας είναι διακεκριμένα και επιλέγονται με επανατοποθέτηση. Τότε, είναι $A_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,u_i}\}$, $u_i = |A_i|$. Το σύνολο επιλογών είναι το $C_i = \{\alpha \in A_i^* : |\alpha| \in N_i\}$ και το πλήθος λέξεων στο C_i μήκους n_i ισούται με $u_i^{n_i}$, οπότε θέτοντας $s_i = s(x_{i,j})$, για κάθε $j \in [u_i]$, η ΕΓΣ του C_i είναι η

$$F_i(x) = \sum_{n_i \in N_i} u_i^{n_i} \frac{x^{s_i n_i}}{n_i!}$$

Και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις, το σύνολο σχηματισμών είναι $C = C_1 \circ \cdots \circ C_k$, οπότε η ΕΓΣ του ως προς το μέγεθος είναι η

$$F(x) = \prod_{i=1}^{k} F_i(x)$$

και το πλήθος σχηματισμών μεγέθους n ισούται με $n![x^n]F(x)$.

Παράδειγμα 3. Να βρεθεί Η ΕΓΣ της ακολουθίας $(a_n)_{n \geq 0}$, όπου a_n το πλήθος των διατάξεων (χωρίς επανάληψη) n στοιχείων του $[k]$ ($k \geq n$).

Λύση. Ισοδύναμα, a_n είναι το πλήθος των λέξεων μήκους n στο αλφάβητο $[k]$, όπου κάθε γράμμα εμφανίζεται το πολύ μια φορά. Ως γνωστό, το πλήθος αυτό ισούται με $a_n = \dfrac{k!}{(k-n)!}$, οπότε η ΕΓΣ της (a_n) είναι η

$$\sum_{n \geq 0} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \binom{k}{n} x^n = (1+x)^k.$$

Ακολουθώντας τον συμβολισμό της θεωρίας, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα ως εξής: Θέτουμε $A_i = \{x_i\}$, για κάθε $i \in [k]$, οπότε είναι $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Το σύνολο επιλογών για το γράμμα x_i είναι το $C_i = \{x_i^j : j \in N_i\}$, όπου $N_i = \{0, 1\}$, και το μέγεθος του x_i είναι $s_i = s(x_i) = 1$, οπότε η ΕΓΣ του C_i είναι η $F_i(x) = 1 + x$, για κάθε $i \in [k]$. Κατόπιν τούτων, η ΕΓΣ του συνόλου $C = C_1 \circ \cdots \circ C_k = \{\alpha \in A^* : |\alpha|_{x_i} \in N_i, i \in [k]\}$ των λέξεων αυτών ως προς το μέγεθος (το οποίο εδώ ταυτίζεται με το μήκος) είναι η

$$F(x) = \prod_{i=1}^{k} F_i(x) = (1+x)^k = \sum_{n \geq 0} \binom{k}{n} x^n,$$

οπότε $a_n = n![x^n]F(x) = n!\dbinom{k}{n} = \dfrac{k!}{(k-n)!}$. □

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων 4 κατηγοριών, όταν από κάθε κατηγορία επιλέγονται από 2 έως και 5 αντικείμενα. (Τα αντικείμενα της ίδιας κατηγορίας είναι όμοια.)

Λύση. Έχουμε $k = 4$ κατηγορίες και, για κάθε $i \in [k]$, επιλέγουμε από το σύνολο $A_i = \{x_i\}$ δύο έως και πέντε φορές (με επανατοποθέτηση), δηλαδή $N_i = \{2, 3, 4, 5\}$. (Τα αντικείμενα είναι μεγέθους $s_i = 1$.) Επομένως, το σύνολο επιλογών από το A_i είναι το $C_i = \{x_i^j : j \in N_i\}$, με ΕΓΣ ως προς το μέγεθος την

$$F_i(x) = \sum_{n_i \in N_i} \frac{x_i^n}{n_i!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

και η ΕΓΣ του συνόλου επιλογών $C = C_1 \circ C_2 \circ C_3 \circ C_4$ είναι η

$$F(x) = \prod_{i=1}^{4} F_i(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4,$$

οπότε το ζητούμενο πλήθος ισούται με $n![x^n]F(x)$. □

Οι παραπάνω συντελεστές $n![x^n]F(x)$ υπολογίζονται με τον ακόλουθο κώδικα Sage:

```
F(x) = (x^2/factorial(2) + x^3/factorial(3) + x^4/factorial(4) + x^5/factorial(5))^4
#taylor(F(x), x, 0, 20)
L=F(x).coefficients()
coeffs={c[1]:c[0]*factorial(c[1]) for c in L}
coeffs
```

Output:

```
{8: 2520,
 9: 30240,
 10: 226800,
 11: 1367520,
 12: 6939240,
 13: 30750720,
 14: 120912792,
 15: 418738320,
 16: 1273872600,
 17: 3327708384,
 18: 7101398304,
 19: 11732745024,
 20: 11732745024}
```

Παράδειγμα 5. Να βρεθεί το πλήθος $S(n, k)$ των διαμερίσεων του $[n]$ σε k (μη κενά) μπλοκ. (Οι αριθμοί $S(n, k)$ ονομάζονται αριθμοί Stirling δευτέρου είδους.)

Λύση. Αρχικά, θα βρεθεί η ΕΓΣ για το πλήθος των διατεταγμένων διαμερίσεων. Σε αυτές, η σειρά των μπλοκ έχει σημασία, οπότε συμβολίζουμε με B_i το i-οστό μπλοκ, $i \in [k]$, και το πλήθος τους είναι προφανώς ίσο με $k!S(n, k)$. Μια διατεταγμένη διαμέριση ισοδυναμεί με μια λέξη $\alpha \in [k]^n$ με $|\alpha|_i \geq 1$, για κάθε $i \in [k]$: Το j-οστό γράμμα της α είναι το i ανν το στοιχείο $j \in [n]$ ανήκει στο B_i. Η ΕΓΣ για το πλήθος αυτών είναι η $(e^x - 1)^k$, δηλαδή

$$\sum_{n \geq 0} k!S(n, k) \frac{x^n}{n!} = (e^x - 1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} e^{jx} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \sum_{n \geq 0} j^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n \frac{x^n}{n!},$$

οπότε $S(n, k) = \frac{1}{k!} n![x^n](e^x - 1)^k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n$. □

Παράδειγμα 6. Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης n (διακεκριμένων) ατόμων σε k διακεκριμένες αίθουσες, όταν κάθε αίθουσα θα πρέπει να έχει: $i)$ ένα τουλάχιστον άτομο, $ii)$ ζυγό αριθμό ατόμων.

Λύση. Έχουμε k αίθουσες (κατηγορίες) και $A_i = \{x_i\}$, για κάθε $i \in [k]$.

$i)$ Είναι $C_i = \{\alpha \in A_i^* : |\alpha| \geq 1\}$, οπότε $F_i(x) = \sum_{n_i \geq 1} \frac{x^{n_i}}{n_i!} = e^x - 1$ και $F(x) = \prod_{i=1}^{k} F_i(x) = (e^x-1)^k$, με

$$(e^x-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(-1)^{k-j} e^{jx} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{n \geq 0} \binom{k}{j}(-1)^{k-j} \frac{j^n}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(-1)^{k-j} \frac{j^n}{n!} x^n.$$

Επομένως, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$n![x^n]G(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(-1)^{k-j} j^n = k!S(n,k).$$

$ii)$ Η ΕΓΣ του C_i στην περίπτωση αυτή είναι η $F_i(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ και

$$F(x) = \frac{1}{2^k}(e^x + e^{-x})^k = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} e^{(k-2j)x}$$

οπότε, για $n > 0$, είναι $n![x^n]F(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n![x^n] e^{(k-2j)x} = \frac{n!}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-2j)^n$. □

Παρατήρηση: Για κάθε ΓΣ $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ισχύουν οι σχέσεις

$$E(x) = \frac{A(x) + A(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} a_n (-1)^n x^n\right) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} a_n (1 + (-1)^n) x^n = \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n}$$

και ομοίως

$$O(x) = \frac{A(x) - A(-x)}{2} = \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1},$$

δηλαδή οι $E(x)$ και $O(x)$ είναι οι ΓΣ των υπακολουθιών της (a_n) των άρτιων και περιττών δεικτών αντίστοιχα.

Παράδειγμα 7. Να βρεθεί το πλήθος των τετραδικών λέξεων στο αλφάβητο $A = \{0, 1, 2, 3\}$, μήκους n, με άρτιο πλήθος μηδενικών και περιττό πλήθος μονάδων.

Λύση. Έχουμε $A_i = \{i\}$, για κάθε $i \in A$ και οι αντίστοιχες ΕΓΣ είναι οι

$$F_0(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad F_1(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad F_2(x) = F_3(x) = e^x,$$

οπότε

$$F(x) = \prod_{i=0}^{3} F_i(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})e^{2x} = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x})e^{2x} = \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)$$

και το ζητούμενο πλήθος ισούται με $n![x^n]F(x) = 4^{n-1}$, όταν $n > 0$. □

Άσκηση 9. Να βρεθεί η ΕΓΣ για το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$, στις οποίες κάθε μπλοκ έχει *i*) πάνω από b στοιχεία, *ii*) το πολύ b στοιχεία.

Λύση. Θέτουμε $e_b(x) := 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^b/b!$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, οι διατεταγμένες διαμερίσεις με k μπλοκ είναι λέξεις στο $[k]^n$.

i) Η ΕΓΣ για το σύνολο λέξεων στο αλφάβητο $\{i\}$ με πάνω από b γράμματα είναι η $F_i(x) = e^x - e_b(x)$, οπότε Η ΕΓΣ των λέξεων στο $[k]^n$ με πάνω από b γράμματα είναι η $(e^x - e_b(x))^k$ και επομένως η ΕΓΣ για τις αντίστοιχες μη διατεταγμένες διαμερίσεις είναι η $\frac{1}{k!}(e^x - e_b(x))^k$. Αθροίζοντας για όλες τις δυνατές τιμές του k, παίρνουμε την ΕΓΣ $F(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(e^x - e_b(x))^k = e^{e^x - e_b(x)}$ για τις (μη διατεταγμένες) διαμερίσεις με πάνω από b γράμματα και οποιοδήποτε πλήθος μπλοκ.

Ειδικά, για $b = 0$, έχουμε $F(x) = e^{e^x-1}$ την ΕΓΣ όλων των διαμερίσεων. Οι συντελεστές $n![x^n]e^{e^x-1}$ είναι οι γνωστοί αριθμοί Bell.

ii) Ομοίως, όταν απαιτούμε το πολύ b στοιχεία, τότε είναι $F_i(x) = e_b(x)$ και $F(x) = e^{e_b(x)}$. □

Παρατήρηση: Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να βρούμε την ΕΓΣ των διαμερίσεων στις ακόλουθες περιπτώσεις:

Διαμερίσεις	οποιοδήποτε πλήθος μπλοκ	άρτιο πλήθος μπλοκ	περιττό πλήθος μπλοκ
οποιοδήποτε μέγεθος μπλοκ	e^{e^x-1}	$\cosh(e^x-1)$	$\sinh(e^x-1)$
άρτιο μέγεθος μπλοκ	$e^{\cosh x-1}$	$\cosh(\cosh x-1)$	$\sinh(\cosh x-1)$
περιττό μέγεθος μπλοκ	$e^{\sinh x}$	$\cosh(\sinh x)$	$\sinh(\sinh x)$

Άσκηση 10. n διακεκριμένα αντικείμενα τοποθετούνται τυχαία σε k διακεκριμένους κάδους. Αν X και Y είναι αντίστοιχα το ελάχιστο και μέγιστο πλήθος αντικειμένων σε κάδο, να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(X > b)$ και $P(Y \leq b)$, όπου $0 \leq b \leq n$.

Λύση. Κάθε τοποθέτηση ισοδυναμεί με μια λέξη στο $[k]^n$. Η ΕΓΣ για το πλήθος των τρόπων που ικανοποιούν την $X > b$ είναι η $F(x) = (e^x - e_b(x))^k$, οπότε

$$P(X > b) = \frac{1}{k^n} n![x^n](e^x - e_b(x))^k = n![x^n](e^{x/k} - e_b(x/k))^k$$

και ομοίως,

$$P(Y \leq b) = \frac{1}{k^n} n![x^n](e_b(x))^k = n![x^n](e_b(x/k))^k.$$ □

Ασκήσεις

1. Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν 10 διαφορετικοί άνθρωποι σε 3 διαφορετικά αυτοκίνητα, ώστε κάθε αυτοκίνητο να έχει τουλάχιστον έναν επιβάτη;

2. 11 νέοι υπάλληλοι τοποθετούνται σε 4 υποκαταστήματα μιας εταιρείας, έτσι ώστε κάθε υποκατάστημα να πάρει τουλάχιστον έναν υπάλληλο. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση αυτή;

3. Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων που μπορούν να τοποθετηθούν n διακεκριμένα αντικείμενα σε k διακεκριμένα κουτιά, ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον m αντικείμενα. Ποιο είναι το πλήθος όταν τα κουτιά δεν είναι διακεκριμένα;

4. Να βρεθεί το πλήθος των λιστών (μεταθέσεων) του $[n]$ όπου κάθε περιττός εμφανίζεται περιττό πλήθος φορών και κάθε άρτιος εμφανίζεται άρτιο πλήθος φορών.

5. Έστω a_n το πλήθος των τρόπων που n άτομα χωρίζονται σε ομάδες με κάθε ομάδα να έχει έναν αρχηγό που επιλέγεται μεταξύ των μελών της. Να δειχθεί ότι η ΕΓΣ της (a_n) είναι η e^{xe^x}.

6. Να βρεθεί η πιθανότητα μια λέξη μήκους n από το αλφάβητο $A = [r]$ να έχει $k \leq r$ διαφορετικά γράμματα.