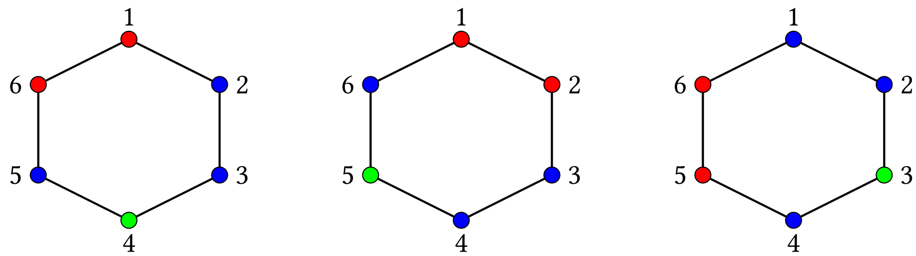
Εφαρμοσμένη Συνδυαστική - Απαρίθμηση με συμμετρίες

Δίδονται ένα σύνολο A και ένα σύνολο χρωμάτων Σ, και τα δύο μη κενά και πεπερασμένα. Ένας χρωματισμός του A είναι μια απεικόνιση $f : A \to \Sigma$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $A = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$, οπότε ένας χρωματισμός του A είναι απλά μια λέξη στο Σ^n και το πλήθος αυτών είναι k^n, όπου $k = |\Sigma|$.

Συχνά, έχει ορισθεί μια σχέση ισοδυναμίας στο Σ^n, ώστε κάποιοι χρωματισμοί να θεωρούνται ισοδύναμοι. Τότε προκύπτει το πρόβλημα της απαρίθμησης των κλάσεων ισοδυναμίας. Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα αυτό στην περίπτωση που η ισοδυναμία ορίζεται μέσω μεταθέσεων του Σ^n. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δύο λέξεις στο Σ^n είναι ισοδύναμες όταν η μια προκύπτει από την άλλη με κυκλική μετάθεση, οπότε θέλουμε να μετρήσουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας, οι οποίες στην περίπτωση αυτή ονομάζονται (n, k)-necklaces και το σύνολο αυτών συμβολίζεται με $N(n, k)$. Με ορολογία Άλγεβρας, έχουμε την ομάδα C_n των κυκλικών μεταθέσεων του $[n]$ να δρα στο σύνολο Σ^n και θέλουμε να μετρήσουμε τις τροχιές αυτής της δράσης.



Σχήμα 1: Οι λέξεις $rbbgbr$, $rrbbgb$ και $bbgbrr$ προκύπτουν με κυκλική μετάθεση η μία από την άλλη.

Ορισμός: Αν G μη κενό σύνολο και $* : G \times G \to G$, διμελής εσωτερική πράξη, τότε το ζεύγος $(G, *)$ ονομάζεται ομάδα ανν

- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$ (προσεταίριση)
- $\exists e \in G, \forall g \in G, g * e = e * g = g$ (ουδέτερο στοιχείο)
- $\forall g \in G, \exists g' \in G, g * g' = g' * g = e$ (συμμετρικό στοιχείο)

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το ουδέτερο στοιχείο e είναι μοναδικό και ότι κάθε $g \in G$ έχει μοναδικό συμμετρικό στοιχείο, το οποίο συμβολίζεται με g^{-1}.

Το σύνολο των μεταθέσεων ενός μη κενού, πεπερασμένου συνόλου A, δηλαδή των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων $\sigma : A \to A$, συμβολίζεται με $S(A)$ ή απλά με S_n, όταν $A = [n]$, και, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης, αποτελεί ομάδα, η οποία ονομάζεται συμμετρική ομάδα του A. Συμβολίζουμε για απλότητα την σύνθεση μεταθέσεων ως απλό γινόμενο, δηλαδή

$$(\sigma\pi)(i) := (\sigma \circ \pi)(i) = \sigma(\pi(i)), \qquad \sigma, \pi \in S_n, i \in [n].$$

Παράδειγμα: Για τις μεταθέσεις $\sigma, \pi \in S_4$, με $\sigma = 1\ 4\ 3\ 2$ και $\pi = 2\ 1\ 3\ 4$, ή σε γραφή πίνακα

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

είναι

$$\sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

Οι σ, π γράφονται ως γινόμενο ξένων κύκλων ως $\sigma = (1)(2,4)(3) = (2,4)$ και $\pi = (1,2)(3)(4)$, οπότε $\sigma\pi = (1,4,2)(3)$ και η $\sigma^{-1} = (1)(2,4)(3)$ προκύπτει αντιστρέφοντας κάθε κύκλο της σ.

Το πλήθος των κύκλων μιας μετάθεσης σ συμβολίζεται με $c(\sigma)$.

Ορισμός (Τάξη στοιχείου): Έστω G (πολλαπλασιαστική) ομάδα (με ουδέτερο στοιχείο το 1). Η τάξη ενός στοιχείου $a \in G$ συμβολίζεται ως $\mathrm{ord}(a)$ και ορίζεται ως ο ελάχιστος θετικός ακέραιος m ώστε $a^m = 1$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος m, τότε ορίζουμε $\mathrm{ord}(a) = +\infty$. Αν $\mathrm{ord}(a) < \infty$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες (για $k, \ell \in \mathbb{Z}$):

- $a^k = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ord}(a)|k$
- $a^k = a^\ell \Leftrightarrow \mathrm{ord}(a)|k - \ell$
- Αν $|G| = n < +\infty$, τότε $a^n = 1$ και $\mathrm{ord}(a)|n$.

Ορισμός (Κυκλική ομάδα): Μια (πολλαπλασιαστική) πεπερασμένη ομάδα G, τάξης $|G| = n$ ονομάζεται κυκλική (τάξης n) όταν υπάρχει $a \in G$, τέτοιο ώστε $G = \{a, a^2, \ldots, a^{n-1}, a^n = 1\}$, οπότε γράφουμε $G = \langle a \rangle$. Το στοιχείο a καλείται γεννήτορας της G. Στην περίπτωση αυτή, η G είναι αντιμεταθετική και ισχύουν τα ακόλουθα:

- Κάθε υποομάδα H της G είναι κυκλική της μορφής $H = \langle a^q \rangle$ για κάποιο θετικό διαιρέτη q του n και αντίστροφα κάθε θετικός διαιρέτης q αντιστοιχεί σε μια μοναδική υποομάδα.
- Αν $d = \gcd(n, k)$, $k > 0$, τότε $\langle a^k \rangle = \langle a^d \rangle$ και $\mathrm{ord}(a^k) = n/d$.
- $G = \langle a^k \rangle \Leftrightarrow \gcd(n, k) = 1$, άρα η G έχει $\phi(n)$ γεννήτορες,
  όπου $\phi(n) := |\{x \in [n] : \gcd(x, n) = 1\}|$ η συνάρτηση Euler.

Ορισμός (Δράση ομάδας): Η δράση μιας ομάδας $(G, *)$ (με ουδέτερο στοιχείο e) σε ένα σύνολο X είναι μια απεικόνιση $\alpha : G \times X \to X$, με συμβολισμό $gx := \alpha(g, x)$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $g(hx) = (g * h)x$, για κάθε $g, h \in G$ και $x \in X$,
- $ex = x$, για κάθε $x \in X$.

Παρατήρηση: Αν για κάθε $g \in G$ ορίσουμε την απεικόνιση $f_g : X \to X$, με $f_g(x) = gx$, τότε η f_g προφανώς είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή $f_g \in S(X)$. Πράγματι, η αντίστροφή της είναι η $f_{g^{-1}}$, αφού $(f_{g^{-1}} \circ f_g)(x) = f_{g^{-1}}(f_g(x)) = f_{g^{-1}}(gx) = g^{-1}(gx) = (g^{-1} * g)x = ex = x$ και ομοίως $(f_g \circ f_{g^{-1}})(x) = x$. Επομένως, η απεικόνιση $\psi : G \to S(X)$, με $\psi(g) = f_g$, είναι ένας μορφισμός ομάδων, δηλαδή $\psi(g * h) = \psi(g) \circ \psi(h)$, για κάθε $g, h \in G$.

Ορισμός (orbit): Αν η ομάδα G δρα στο σύνολο X, τότε για κάθε $x \in X$ ορίζεται το σύνολο $Gx := \{gx : g \in G\}$, το οποίο ονομάζεται τροχιά (orbit) του x. Οι τροχιές $\{Gx\}_{x \in X}$ αποτελούν διαμέριση του X. Για την απόδειξη αυτού, ορίζουμε τη σχέση

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = gx$$

και αρκεί να δείξουμε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας. Προφανώς είναι ανακλαστική, δηλαδή $x \sim x$, για κάθε $x \in X$, αφού $x = ex$. Επιπλέον, είναι συμμετρική, δηλαδή για κάθε $x, y \in X$ είναι $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, αφού $x \sim y \Rightarrow y = gx \Rightarrow g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1} * g)x = ex = x \Rightarrow y \sim x$. Τέλος, είναι μεταβατική, δηλαδή για κάθε $x, y, z \in X$ είναι $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$, αφού $x \sim y, y \sim z \Rightarrow y = gx, z = hy \Rightarrow z = h(gx) = (h * g)x \Rightarrow x \sim z$.

Το σύνολο των τροχιών στο X από τη δράση της G συμβολίζεται με $X/G := \{Gx : x \in X\}$.

Παράδειγμα: Τα (n, k)-necklaces είναι οι τροχιές που προκύπτουν από τη δράση $\alpha : C_n \times \Sigma^n \to \Sigma^n$ της κυκλικής ομάδας $C_n = \langle (1, 2, \ldots, n) \rangle$ των κυκλικών μεταθέσεων του $[n]$, στο σύνολο Σ^n, η οποία ορίζεται ως

$$\alpha(\sigma, w) = \sigma w = w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)} \cdots w_{\sigma(n)}, \qquad \sigma \in C_n, w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \Sigma^n.$$

Για παράδειγμα, για $n = 6$, η C_6 παράγεται από την $\rho = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, δηλαδή

$$C_6 = \langle \rho \rangle = \{\rho = (1,2,3,4,5,6), \rho^2 = (1,3,5)(2,4,6), \rho^3 = (1,4)(2,5)(3,6), \rho^4 = (1,5,3)(2,6,4), \\ \rho^5 = (1,6,5,4,3,2), \rho^6 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)\}.$$

Η C_6 έχει $\phi(6) = 2$ γεννήτορες, τις ρ και $\rho^5 = \rho^{-1}$, διότι $\gcd(6, k) = 1 \Rightarrow k \in \{1, 5\}$. Αν $w = rbbgbr$, τότε $\rho w = bbgbrr \sim w$, δηλαδή η ρ περιστρέφει την w αριστερόστροφα κατά μία θέση (και η ρ^i κατά i θέσεις).

Ορισμός (stabilizer): Έστω ομάδα G που δρα στο σύνολο X και έστω $x \in X$. Το σύνολο $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ ονομάζεται σταθεροποιητής του x στην G και αποτελεί υποομάδα της G (άσκηση).

Πρόταση 1 (Orbit-stabilizer theorem). *Έστω πεπερασμένη ομάδα G που δρα στο σύνολο X. Για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι*

$$|Gx||G_x| = |G|. \tag{1}$$

Απόδειξη. Το σύνολο G διαμερίζεται ως $G = \bigcup_{y \in Gx} \{g \in G : gx = y\}$. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι κάθε ένα από αυτά τα σύνολα-κλάσεις περιέχει $|G_x|$ στοιχεία. Έστω $g \in G$ και έστω η κλάση $C(g, x) = \{h \in G : hx = gx\}$ της παραπάνω διαμέρισης με αντιπρόσωπο το g. Για κάθε $h \in C(g, x)$ είναι

$$hx = gx \Rightarrow g^{-1}hx = x \Rightarrow g^{-1}h \in G_x.$$

Η απεικόνιση $f : C(g, x) \to G_x$, με $f(h) = g^{-1}h$, είναι ένα προς ένα, διότι

$$f(h_1) = f(h_2) \Rightarrow g^{-1}h_1 = g^{-1}h_2 \Rightarrow gg^{-1}h_1 = gg^{-1}h_2 \Rightarrow h_1 = h_2,$$

και είναι επί, διότι για κάθε $a \in G_x$ είναι $a \in G_x \Rightarrow gax = gx \Rightarrow ga \in C(g, x)$ και $f(ga) = g^{-1}ga = a$. Επομένως, $|C(g, x)| = |G_x|$, οπότε $|G| = \sum_{y \in Gx} |G_x| = |Gx||G_x|$. $\square$

Πρόταση 2 (Orbit-counting lemma). *Έστω πεπερασμένη ομάδα G που δρα στο σύνολο X και έστω $X_g := \{x \in X : gx = x\}$ το σύνολο των σταθερών σημείων $x \in X$ της $g \in G$. Το πλήθος $N = |X/G|$ όλων των τροχιών στο X, ισούται με το μέσο πλήθος σταθερών σημείων ανά στοιχείο $g \in G$, δηλαδή*

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Απόδειξη. Έστω $O_1, O_2, \ldots, O_N$ οι τροχιές όλων των $x \in X$. Βάσει των προηγουμένων, οι τροχιές αυτές αποτελούν διαμέριση του X. Επιπλέον, μετρώντας το σύνολο $\{(g, x) \in G \times X : gx = x\}$ με δύο τρόπους, πρώτα ως προς όλα τα g και έπειτα ως προς όλα τα x, προκύπτει ότι $|\{(g, x) \in G \times X : gx = x\}| = \sum_{g \in G} |X_g| = \sum_{x \in X} |G_x|$. Επομένως,

$$\sum_{g \in G} |X_g| = \sum_{x \in X} |G_x| \overset{(1)}{=} \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{x \in O_i} \frac{|G|}{|Gx|} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{x \in O_i} \frac{|G|}{|O_i|} = \sum_{i=1}^{N} \frac{|G|}{|O_i|} \sum_{x \in O_i} 1 = |G| \sum_{i=1}^{N} \frac{|O_i|}{|O_i|} = N|G|. \quad \square$$

Παράδειγμα: Για $G = C_n = \langle (1, 2, \ldots, n) \rangle$ και $X = \Sigma^n$, το πλήθος $|X_\sigma|$ των λέξεων που παραμένουν σταθερές από τη δράση της $\sigma \in C_n$ ισούται με $|\Sigma|^{c(\sigma)}$, διότι είναι $\sigma w = w$ αν και μόνο αν ταυτίζονται (έχουν το ίδιο χρώμα) τα γράμματα της w των οποίων οι θέσεις αντιστοιχούν σε ίδιο κύκλο της σ.

Για παράδειγμα, για $n = 6$ και $k = |\Sigma| = 3$, έχουμε

$\sigma \in C_6$	$\lvert X_\sigma \rvert$
$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	3^6
$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$	3
$(1, 3, 5)(2, 4, 6)$	3^2
$(1, 4)(2, 5)(3, 6)$	3^3
$(1, 5, 3)(2, 6, 4)$	3^2
$(1, 6, 5, 4, 3, 2)$	3

οπότε $|N(6, 3)| = \dfrac{1}{|C_6|} \displaystyle\sum_{\sigma \in C_6} |X_\sigma| = 130.$

Πόρισμα 3. *Το πλήθος των (n,k)-necklaces ισούται με*

$$|N(n,k)| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k^{\gcd(n,i)} = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)k^{n/d}.$$

Απόδειξη. Έστω $\rho = (1,2,\ldots,n)$. Βάσει της Πρότασης 2, είναι $N(n,k) = \dfrac{1}{|C_n|}\displaystyle\sum_{\sigma\in C_n}|X_\sigma|$, όπου $X = \Sigma^n$ και $\Sigma = [k]$. Έχουμε ήδη δει ότι $|X_\sigma| = k^{c(\sigma)}$, οπότε, για την πρώτη ισότητα, αρκεί να δειχθεί ότι $c(\rho^i) = \gcd(n,i)$, για κάθε $i \in [n]$. Θέτουμε $d := \gcd(n,i)$ και $i = ad$, $n = bd$, $a,b \in \mathbb{N}^*$. Προφανώς, είναι $\gcd(a,b) = \gcd(i/d, n/d) = 1$.

Έστω $x \in [n]$. Ο κύκλος του x στην ρ^i είναι ο

$$c_x = ((x+i) \pmod n, (x+2i) \pmod n, \ldots, (x+k_x i) \pmod n = x), \qquad i \in [n],$$

όπου k_x είναι ο ελάχιστος φυσικός ώστε $k_x i$ πολλαπλάσιο του n. Επειδή

$$n|k_x i \Rightarrow k_x i = \lambda n, \lambda \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k_x i/d = \lambda n/d \Rightarrow n/d | k_x,$$

έπεται ότι k_x πολλαπλάσιο του n/d. Επιπλέον, ο in/d είναι πολλαπλάσιο του n, αφού $in/d = adn/d = an$. Κατόπιν τούτων, ο κύκλος c_x έχει μήκος n/d, πράγμα που σημαίνει ότι όλοι οι κύκλοι της ρ^i έχουν το ίδιο μήκος n/d και άρα είναι σε πλήθος $c(\rho^i) = d$ (αφού το συνολικό μήκος τους ισούται με n).

Για τη δεύτερη ισότητα, έστω d διαιρέτης του n, οπότε $n = dn/d$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$I_d := \{i \in [n] : \gcd(n,i) = n/d\} \qquad \text{και} \qquad \Phi_d := \{a \in [d] : \gcd(a,d) = 1\}$$

και την απεικόνιση $f_d : \Phi_d \to I_d$, με $f(a) = an/d$. Η f_d είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη και η οικογένεια $(I_d)_{d|n}$ διαμερίζει το $[n]$, οπότε

$$\sum_{i=1}^{n} k^{\gcd(n,i)} = \sum_{d|n}\sum_{i\in I_d} k^{\gcd(n,i)} = \sum_{d|n}\sum_{i\in I_d} k^{n/d} = \sum_{d|n} k^{n/d}\sum_{i\in I_d} 1 = \sum_{d|n}|I_d|k^{n/d} = \sum_{d|n}|\Phi_d|k^{n/d} = \sum_{d|n}\phi(d)k^{n/d}. \quad \square$$

Ορισμός (cycle index): Για κάθε ομάδα μεταθέσεων G (υποομάδα της $S(A)$, $|A| = n$) ορίζεται το πολυώνυμο

$$Z(G; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x_1^{c_1(g)} x_2^{c_2(g)} \cdots x_n^{c_n(g)}$$

το οποίο ονομάζεται ευρετήριο κύκλων (cycle index) της G, όπου $c_i(g)$ το πλήθος κύκλων μήκους i στην μετάθεση g.

Για παράδειγμα, για την κυκλική ομάδα C_n των μεταθέσεων του $[n]$, βάσει της απόδειξης του Πορίσματος 3, είναι

$$Z(C_n; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d) x_d^{n/d}.$$

Παρατήρηση: Η ακολουθία $(c_1(g), c_2(g), \ldots, c_n(g))$ ονομάζεται τύπος της g και ισοδυναμεί με μια διαμέριση του ακεραίου n σε $c(g)$ όρους, αφού είναι

$$c_1(g) + c_2(g) + \cdots + c_n(g) = c(g), \qquad c_1(g) + 2c_2(g) + \cdots + nc_n(g) = n,$$

δηλαδή το $c_i(g)$ ισούται με το πλήθος των εμφανίσεων του όρου i στη διαμέριση του n.

Το πολυώνυμο Z, όταν είναι γνωστό, διευκολύνει την απαρίθμηση με την Πρόταση 2, όπου η βασική δυσκολία είναι ο υπολογισμός των $|X_g|$. Συγκεκριμένα, αν $X = \Sigma^n$ με $|\Sigma| = k$, όπως είδαμε είναι $|X_g| = k^{c(g)}$, οπότε προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πόρισμα 4 (Polya Enumeration Theorem). *Έστω G ομάδα μεταθέσεων του A που δρα στο σύνολο $X = \Sigma^A$, με $|\Sigma| = k$, $|A| = n$. Το πλήθος $N = |X/G|$ όλων των τροχιών στο X ισούται με*

$$N = Z(G; k, k, \ldots, k).$$

Το μονώνυμο $Z_g(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{i=1}^{n} x_i^{c_i(g)}$ κωδικοποιεί την κυκλική δομή της g. Με κατάλληλη αλλαγή των μεταβλητών $x_1, \ldots, x_n$, μπορούμε να εκλεπτύνουμε την απαρίθμηση. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε μια συνάρτηση βάρους $W : \Sigma \to R$ (το R μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αντιμεταθετικός δακτύλιος, συνήθως είναι ο δακτύλιος των πολυωνύμων ή των δυναμοσειρών ως προς κάποιες μεταβλητές) στο σύνολο Σ των χρωμάτων (το οποίο μπορεί να είναι και άπειρο αλλά αριθμήσιμο) και ορίζουμε το βάρος κάθε λέξης $w = w_1 \cdots w_n \in X = \Sigma^n$ να είναι $W(w) = \prod_{i=1}^{n} W(w_i)$. Επίσης ορίζουμε

$$W(X_g) := \sum_{x \in X_g} W(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in \Sigma} W(j)^i \right)^{c_i(g)}. \tag{2}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει παρατηρώντας ότι αφού $x \in X_g$, τα στοιχεία που ανήκουν στον ίδιο κύκλο της g χρωματίζονται με το ίδιο χρώμα. Αν $C = \{C_1, \ldots C_t\}$, όπου $t = c(g)$, το σύνολο των κύκλων της g, τότε η x αντιστοιχεί σε μια επιλογή χρωμάτων $(j_1, \ldots, j_t) \in \Sigma^t$ για τους κύκλους αυτούς, με βάρος $W(x) = W(j_1)^{|C_1|} \cdots W(j_t)^{|C_t|}$, οπότε

$$\begin{aligned} W(X_g) &:= \sum_{x \in X_g} W(x) = \sum_{(j_1, \ldots, j_t) \in \Sigma^t} W(j_1)^{|C_1|} \cdots W(j_t)^{|C_t|} = \prod_{i=1}^{t} \sum_{j \in \Sigma} W(j)^{|C_i|} = \prod_{c \in C} \sum_{j \in \Sigma} W(j)^{|c|} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \prod_{c \in C : |c| = i} \sum_{j \in \Sigma} W(j)^i = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in \Sigma} W(j)^i \right)^{c_i(g)}. \end{aligned}$$

Υπό την προϋπόθεση ότι οι λέξεις στην ίδια τροχιά O έχουν το ίδιο βάρος $W(O)$, τότε το αποτέλεσμα της Πρότασης 2 γενικεύεται στο ακόλουθο:

$$W(X/G) := \sum_{O \in X/G} W(O) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} W(X_g) \tag{3}$$

Η απόδειξη είναι ανάλογη:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} W(X_g) &= \sum_{g \in G} \sum_{x \in X_g} W(x) = \sum_{(g,x) \in G \times X : gx = x} W(x) = \sum_{x \in X} |G_x| W(x) \sum_{O \in X/G} \sum_{x \in O} |G_x| W(x) \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{O \in X/G} \sum_{x \in O} \frac{|G|}{|Gx|} W(x) = \sum_{O \in X/G} \frac{|G|}{|O|} \sum_{x \in O} W(O) = \sum_{O \in X/G} |G| W(O) = |G| W(X/G). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις (2) και (3), παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πόρισμα 5 (Polya Weighted Enumeration Theorem). *Έστω G ομάδα μεταθέσεων του A που δρα στο σύνολο $X = \Sigma^A$, με $|\Sigma| = k$, $|A| = n$. Για τη συνάρτηση βάρους W όπως ορίσθηκε στα προηγούμενα, ισχύει ότι*

$$W(X/G) = Z(G; s_1, s_2, \ldots, s_n), \qquad \text{όπου } s_i = \sum_{j \in \Sigma} W(j)^i.$$

Το Πόρισμα 4 προκύπτει θέτοντας $W(j) = 1$, για κάθε $j \in \Sigma$.

Ειδικά αν ορίσουμε το βάρος $W(j)$ του χρώματος $j \in \Sigma$ να είναι κάποια δύναμη του x και θέτοντας r_i να είναι το πλήθος των χρωμάτων βάρους x^i, τότε $R(x) = \sum_{i \geq 0} r_i x^i = \sum_{j \in \Sigma} W(j)$ είναι η ΓΣ του Σ ως προς τη συνάρτηση βάρους W. Υποθέτοντας ξανά ότι τα στοιχεία στην ίδια τροχιά έχουν το ίδιο βάρος και θέτοντας m_i το πλήθος των τροχιών βάρους x^i, τότε, εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5, προκύπτει ότι

$$\sum_{i \geq 0} m_k x^k = W(X/G) = Z(G; R(x), R(x^2), \ldots, R(x^n)) \tag{4}$$

Παράδειγμα: Αντικαθιστώντας κάθε x_i στο Z με την παράσταση $s_i = y_1^i + y_2^i + \cdots + y_k^i$, αναθέτουμε ένα βάρος $W(j) = y_j$ στο χρώμα $j \in \Sigma$ και το ίδιο χρώμα στα στοιχεία κάθε κύκλου μήκους i, οπότε ο συντελεστής του $y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_k^{n_k}$ στο $Z(G; s_1, s_2, \ldots, s_n)$ θα ισούται με το πλήθος των τροχιών με n_j εμφανίσεις του χρώματος j, για κάθε $j \in \Sigma$, όπου $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, διότι κάθε τροχιά με βάρος $y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_k^{n_k}$ περιέχει μόνο στοιχεία με το βάρος αυτό.

Έτσι, για τα $(6, 3)$-necklaces, έχουμε

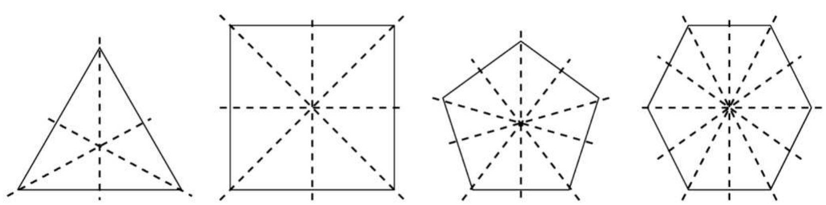
$\sigma \in C_6$	Z_σ
$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	x_1^6
$(1,2,3,4,5,6)$	x_6
$(1,3,5)(2,4,6)$	x_3^2
$(1,4)(2,5)(3,6)$	x_2^3
$(1,5,3)(2,6,4)$	x_3^2
$(1,6,5,4,3,2)$	x_6

οπότε $Z(C_6; x_1, \ldots, x_6) = \dfrac{1}{6}(x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6)$ και αντικαθιστώντας κάθε x_i με $s_i = r^i + g^i + b^i$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Z(C_6; s_1, \ldots, s_6) &= \frac{1}{6}\left((r+g+b)^6 + (r^2+g^2+b^2)^3 + 2(r^3+g^3+b^3)^2 + 2(r^6+g^6+b^6)\right) \\ &= b^6 + b^5 g + b^5 r + 3b^4 g^2 + 5b^4 gr + 3b^4 r^2 + 4b^3 g^3 + 10b^3 g^2 r + 10b^3 g r^2 + 4b^3 r^3 + 3b^2 g^4 \\ &\quad + 10b^2 g^3 r + 16b^2 g^2 r^2 + 10b^2 g r^3 + 3b^2 r^4 + bg^5 + 5bg^4 r + 10bg^3 r^2 + 10bg^2 r^3 + 5bgr^4 \\ &\quad + br^5 + g^6 + g^5 r + 3g^4 r^2 + 4g^3 r^3 + 3g^2 r^4 + gr^5 + r^6 \end{aligned}$$

οπότε, υπάρχουν π.χ. 10 τροχιές με 3 μπλε (b), 1 πράσινο (g) και 2 κόκκινα (r) γράμματα, αφού $[b^3 g r^2]Z = 10$.

Παράδειγμα: Αν στο σύνολο $X = \Sigma^n$ θεωρήσουμε ότι οι συμμετρίες προκύπτουν όχι μόνο με περιστροφή αλλά και με ανάκλαση, τότε η ομάδα που δρα δεν είναι πλέον η C_n αλλά η διεδρική ομάδα $D_n \subseteq S_n$ που αντιπροσωπεύει τις συμμετρίες ενός κανονικού n-γώνου, το οποίο έχει n άξονες συμμετρίας, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Όταν n άρτιος, κάθε άξονας περνά από δύο αντικριστές κορυφές, όταν είναι περιττός, περνά από μια κορυφή και το κέντρο της απέναντι ακμής. Έτσι, η D_n αποτελείται από $2n$ μεταθέσεις, τις n που περιέχει και η C_n συν τις n που αντιστοιχούν στις ανακλάσεις γύρω από τους άξονες συμμετρίας. Κάθε μετάθεση σ που αντιστοιχεί σε ανάκλαση έχει $Z_\sigma = x_1 x_2^{(n-1)/2}$, όταν n περιττός, διότι ο άξονας συμμετρίας περνά από μία μόνο κορυφή, η οποία μένει σταθερή. Όταν n άρτιος, τότε $n/2$ ανακλάσεις δίνουν $Z_\sigma = x_1^2 x_2^{n/2-1}$, διότι ο άξονας συμμετρίας περνά από δύο κορυφές που αντιστοιχούν στα σταθερά σημεία της μετάθεσης, ενώ οι υπόλοιπες $n/2$ ανακλάσεις σχηματίζουν ζευγάρια που αντιστοιχούν σε κύκλους μήκους 2 και δίνουν $Z_\sigma = x_2^{n/2}$.

Έτσι λοιπόν προκύπτει ότι

$$Z(D_n; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} Z(C_n; x_1, \ldots, x_n) + \begin{cases} \frac{1}{2} x_1 x_2^{(n-1)/2}, & n \text{ περιττός}, \\ \frac{1}{4} x_2^{n/2} + \frac{1}{4} x_1^2 x_2^{n/2-1}, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Οι τροχιές που προκύπτουν από τη δράση της D_n στο Σ^n ονομάζονται (n, k)-bracelets και βάσει των παραπάνω, το πλήθος τους ισούται με

$$Z(D_n; k, \ldots, k) = |N(n,k)|/2 + \begin{cases} \frac{1}{2} k^{(n+1)/2}, & n \text{ περιττός}, \\ \frac{1+k}{4} k^{n/2}, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Παράδειγμα: Έστω N_5 το πλήθος των χρωματισμών με k χρώματα των κελιών μιας 5×5 σκακιέρας, όταν οι χρωματισμοί που προκύπτουν από περιστροφή ή ανάκλαση της σκακιέρας είναι ισοδύναμοι. Το σύνολο των κελιών είναι το $A = \{(i,j) : i,j \in [5]\}$ και κάθε χρωματισμός είναι μια λέξη στο $X = \Sigma^{|A|}$, όπου $\Sigma = [k]$. Οι συμμετρίες της σκακιέρας περιγράφονται από τη διεδρική ομάδα D_4, η οποία περιέχει 4 περιστροφές και 4 ανακλάσεις, οπότε η ομάδα $G \subset S(A)$ που δρα στο X είναι ισόμορφη της D_4. Δεν χρειάζεται να προσδιορίσουμε κάθε $g \in G$, παρά μόνο τα μονώνυμα Z_g, τα οποία δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Συμμετρία	Z_g
περιστροφή 0^o	x_1^{25}
περιστροφή 90^o	$x_1 x_4^{4+2}$
περιστροφή 180^o	$x_1 x_2^{8+4}$
περιστροφή 270^o	$x_1 x_4^{4+2}$
ανάκλαση (οριζόντιος)	$x_1^5 x_2^{5+5}$
ανάκλαση (κάθετος)	$x_1^5 x_2^{5+5}$
ανάκλαση (διαγώνιος)	$x_1^5 x_2^{5\cdot 4/2}$
ανάκλαση (αντιδιαγώνιος)	$x_1^5 x_2^{5\cdot 4/2}$

Επομένως,

$$Z(G; x_1, x_2, \ldots, x_{25}) = \frac{1}{8}(x_1^{25} + 2x_1x_4^6 + x_1x_2^{12} + 4x_1^5x_2^{10})$$

και $N_5 = Z(G; k, \ldots k) = \dfrac{1}{8}(k^{25} + 2k^7 + k^{13} + 4k^{15})$.

Αν υπάρχουν 2 χρώματα, άσπρο και μαύρο, πόσοι χρωματισμοί περιέχουν ακριβώς 10 μαύρα κελιά;

Παράδειγμα: Ο κύβος έχει 24 συμμετρίες: Εκτός της ταυτοτικής, υπάρχουν

- 3 περιστροφές (κατά 90, 180 και 270 μοίρες) γύρω από τον άξονα που διέρχεται από τα κέντρα δύο αντικριστών εδρών (υπάρχουν 3 ζεύγη αντικριστών εδρών),
- 2 περιστροφές (κατά 120 και 240 μοίρες) γύρω από τον άξονα που διέρχεται από δύο αντικριστές κορυφές (υπάρχουν 4 ζεύγη αντικριστών κορυφών) και
- 1 περιστροφή (κατά 180 μοίρες) γύρω από τον άξονα που διέρχεται από τα κέντρα δύο αντικριστών ακμών (υπάρχουν 6 ζεύγη αντικριστών ακμών).

Έστω G_V, G_E, G_F η ομάδα που δρα στο σύνολο χρωματισμών του κύβου, όταν χρωματίζουμε αντίστοιχα κορυφές ή ακμές ή έδρες. (Οι ομάδες αυτές είναι ισόμορφες με την S_4.) Τα μονώνυμα Z_g δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Άξονας Συμμετρίας	Μοίρες	Πλήθος	$Z_g, g \in G_V$	$Z_g, g \in G_F$	$Z_g, g \in G_E$
$-$	0^o	1	x_1^8	x_1^6	x_1^{12}
απέναντι έδρες	$90^o, 270^o$	6	x_4^2	$x_1^2 x_4$	x_4^3
απέναντι έδρες	180^o	3	x_2^4	$x_1^2 x_2^2$	x_2^6
απέναντι κορυφές	$120^o, 240^o$	8	$x_1^2 x_3^2$	x_3^2	x_3^4
απέναντι ακμές	180^o	6	x_2^4	x_2^3	$x_1^2 x_2^5$

Επομένως, είναι

$$Z(G_V; x_1, \ldots) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2),$$
$$Z(G_F; x_1, \ldots) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2^3),$$
$$Z(G_E; x_1, \ldots) = \frac{1}{24}(x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 8x_3^4 + 6x_1^2x_2^5).$$

Παράδειγμα: Έστω N_n το πλήθος των διαφορετικών (μη ισόμορφων) απλών (χωρίς βρόχους ή πολλαπλές ακμές) μη κατευθυνόμενων γραφημάτων με n κορυφές. Θεωρούμε $V = [n]$ το σύνολο κορυφών, οπότε κάθε γράφημα περιγράφεται από το σύνολο ακμών του E, όπου $E \subseteq A = \{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Επομένως το E μπορεί να θεωρηθεί ως ένας χρωματισμός των στοιχείων του A με δύο χρώματα: ''ακμή'' ή ''όχι ακμή''. Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ των κορυφών μετατρέπει έναν χρωματισμό E_1 σε έναν άλλον E_2, ορίζοντας μια μετάθεση $\sigma' \in S(A)$ ως εξής:

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(j_1) = j_2 \Leftrightarrow \sigma'(\{i_1, j_1\}) = \{i_2, j_2\},$$

δηλαδή αν $\{i_1, j_1\} \in E_1$, τότε $\{i_2, j_2\} \in E_2$. Επομένως, η ομάδα που δρα στο σύνολο $X = 2^A$ των γραφημάτων, είναι η $S(A)$ και κάθε τροχιά της αποτελείται από ισόμορφα γραφήματα. Η $S(A)$ συμβολίζεται ως $S_n^{(2)}$ και βάσει των παραπάνω είναι ισόμορφη με την S_n. Στον επόμενο πίνακα φαίνονται τα μονώνυμα $Z_{\sigma'}$, $\sigma' \in S_n^{(2)}$, για $n = 4$:

$\sigma \in S_4$	πλήθος	$\sigma' \in S_4^{(2)}$	$Z_{\sigma'}$
$(1)(2)(3)(4)$	1	$(12)(13)(14)(23)(24)(34)$	x_1^6
$(1,2,3,4)$	6	$(12,23,34,14)(13,24)$	x_4x_2
$(1,2,3)(4)$	8	$(12,23,13)(14,24,34)$	x_3^2
$(1,2)(3,4)$	3	$(12)(13,24)(14,23)(34)$	$x_1^2x_2^2$
$(1,2)(3)(4)$	6	$(12)(13,23)(14,24)(34)$	$x_1^2x_2^2$

Επομένως, είναι $Z_{S_4^{(2)}} = \dfrac{1}{24}(x_1^6 + 6x_2x_4 + 8x_3^2 + 9x_1^2x_2^2)$ και άρα $N_4 = 11$.

Ασκήσεις.

1. Με πόσους τρόπους στήνονται σε ένα τρίγωνο τα 8 διαφορετικά χρώματα που περιέχουν οι 15 μπάλες του αμερικάνικου μπιλιάρδου, αν η περιστροφή του τριγώνου είναι αδιάφορη;
2. Πόσες δυαδικές λέξεις υπάρχουν με n μηδενικά και n μονάδες, αν δύο λέξεις θεωρούνται ίδιες όταν η μια προκύπτει από περιστροφή ή ανάκλαση της άλλης;
3. Πόσοι είναι οι χρωματισμοί μιας 4×4 σκακιέρας με k χρώματα, όταν οι χρωματισμοί που προκύπτουν από περιστροφή θεωρούνται ίδιοι;
4. Πόσα είναι (n,k)-necklaces, για $n = 4$ και $n = 7$, στα οποία κάθε χρώμα εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά;
5. Πόσα είναι τα μη ισόμορφα γραφήματα με 5 κορυφές και 4 ακμές;
6. Πόσα είναι τα μη ισόμορφα υπογραφήματα του $K_{3,3}$ με 6 κορυφές;