Ν.Δ.Ο ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την διακύμανση ($\hat{\sigma}^2_{ML}$) της κανονικής κατανομής δεν είναι αμερόληπτος.

Λύση: Έχουμε υπολογίσει ότι:

$$\boxed{\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \hat{\mu}_{ML})^2 \quad [1]}$$

με $\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \Longrightarrow \boxed{\hat{\mu}_{ML} = \bar{x} \quad [2]}$

Γνωρίζοντας ότι $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ με $x_k \in \mathbb{R}$ και $x_k \sim N(\mu, \sigma^2)$, έχουμε προφανώς ότι:

$$\begin{cases} E[x_k] = \mu, \ \forall k \in [N] \quad [3] \\ \text{και} \\ Var[x_k] = \sigma^2, \ \forall k \in [N] \quad [4] \end{cases}$$

$E[x_k] = E[x] = \mu$

Ο εκτιμητής $\hat{\mu}_{ML}$ είναι αμερόληπτος καθώς:

$= \frac{1}{N} \cdot N \cdot E[x] = E[x] = \mu$

$$E[\hat{\mu}_{ML}] = E[\bar{x}] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E[x_k] = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \mu = \mu \quad [5]$$

- Για την περίπτωση του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου $\hat{\sigma}^2_{ML}$ έχουμε ότι: $E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2\right] \Rightarrow$ [6]

$$E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2\right]$$

$$E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \frac{1}{N} \cdot E\left[\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{N} x_k\bar{x} + \sum_{k=1}^{N}\bar{x}^2\right] \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{N} x_k = N\bar{x} \quad [7]}$$

$$E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \frac{1}{N} \cdot E\left[\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - 2N\bar{x}^2 + N\bar{x}^2\right] \Rightarrow$$

$$E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - N\bar{x}^2\right] \Rightarrow E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \frac{1}{N}\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right] - N E[\bar{x}^2]\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right] - E[\bar{x}^2] \quad [8]}$$

- Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\boxed{E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E[x_k^2] - E[\bar{x}^2] \quad [9]}$$

- Γνωρίζουμε ότι τα τυχαία δείγματα $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ είναι ανεξάρτητα και ισοκατανεμημένα, που σημαίνει πως:

⊛ $E[x_k^2] = m_2$ [10] ροπή 2ης τάξης μιας τυχαίας μεταβλητής $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με $m_2 = E[X^2]$, $\forall k \in [N]$

⊛ $Var[x_k] = \sigma_x^2$, $\forall k \in [N]$ [11]

- Άρα, η τελευταία σχέση δίνει ότι:

$$E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \frac{1}{N} \cdot N \cdot E[x^2] - E[\bar{x}^2] \Rightarrow$$

$$\boxed{E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = E[x^2] - E[\bar{x}^2] \quad [12]}$$

- Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = Var[x] = E[x^2] - E^2[x] & [13] \\ \sigma_{\bar{x}}^2 = Var[\bar{x}] = E[\bar{x}^2] - E^2[\bar{x}] & [14] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E[x^2] = \sigma_x^2 + E^2[x] = \sigma_x^2 + \mu^2 & [15] \\ E[\bar{x}^2] = \sigma_{\bar{x}}^2 + E^2[\bar{x}] = \sigma_{\bar{x}}^2 + \mu^2 & [16] \end{cases} \Rightarrow E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = (\sigma_x^2 + \mu^2) - (\sigma_{\bar{x}}^2 + \mu^2) \Rightarrow$$

$$\boxed{E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \sigma_x^2 - \sigma_{\bar{x}}^2 \quad [17]}$$

- Έχουμε όμως ότι: $\sigma_{\bar{x}}^2 = Var[\bar{x}] = Var\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k\right] \overset{iid}{=} \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} Var[x_k] \Rightarrow$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot Var[x_k] \Rightarrow \boxed{\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N}\sigma_x^2} \quad [18]$$

⊛ Άρα, προκύπτει ότι:

$$\boxed{E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \sigma_x^2 - \frac{1}{N}\sigma_x^2 = \frac{N-1}{N}\sigma_x^2 \neq \sigma_x^2 \quad [19]}$$

★ Η σχέση (19) υποδηλώνει ότι τείνουμε να υποτιμούμε (να υποεκτιμούμε) την τιμή της διακύμανσης.

★ Ωστόσο, καθώς συγκεντρώνονται όλο και περισσότερα δείγματα έχουμε ότι:

$$\lim_{N \to \infty} E[\hat{\sigma}^2_{ML}] = \lim_{N \to \infty} \frac{N-1}{N} \sigma^2 = \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sigma^2 = \sigma^2$$

ΔΗΛΑΔΗ Ο ΕΚΤΙΜΗΤΗΣ $\hat{\sigma}^2_{ML}$ ΕΙΝΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΟΣ!!!