ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ

#1

Θεωρώντας το γενικότερο πλαίσιο ενός M-ταξικού προβλήματος ταξινόμησης, υποθέτουμε την ισχύ των παρακάτω συνθηκών:

(i): οι εκ των προτέρων πιθανότητες εμφάνισης των κλάσεων είναι ίδιες:

$$\boxed{P(\omega_i) = P(\omega_j), \ \forall\, i \neq j.}$$

(ii): οι πίνακες συνδιακύμανσης των διαφόρων κλάσεων είναι ίδιοι:

$$\boxed{\underline{\underline{\Sigma}}_i = \underline{\underline{\Sigma}}_j = \underline{\underline{\Sigma}}, \ \forall\, i \neq j.}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συνάρτηση διάκρισης της i-οστής κλάσης μπορεί να απλοποιηθεί στην παρακάτω μορφή:

$$\boxed{g_i(\underline{x}) = -\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu}_i)\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}_i)}$$

(α): Στην περίπτωση κατά την οποία ο πίνακας $\underline{\underline{\Sigma}}$ είναι διαγώνιος, δηλαδή είναι της μορφής:

$$\boxed{\underline{\underline{\Sigma}} = \sigma^2 \underline{\underline{I}}},$$

η συνάρτηση διάκρισης της i-οστής κλάσης λαμβάνει την μορφή:

$$\boxed{g_i(\underline{x}) = -\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{x}-\underline{\mu}_i)^T(\underline{x}-\underline{\mu}_i) = -\frac{1}{2}\|\underline{x}-\underline{\mu}_i\|^2}$$

Αυτό σημαίνει πως ο κανόνας απόφασης που αναθέτει ένα άγνωστο πρότυπο στην κλάση με την <u>μεγαλύτερη τιμή της αντίστοιχης συνάρτησης διάκρισης</u>, μετασχηματίζεται στην ανάθεση του άγνωστου διανύσματος χαρακτηριστικών σε εκείνη την κλάση με την <u>μικρότερη ευκλείδια απόσταση από το αντίστοιχο κέντρο</u>.

<u>ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ:</u>

$\boxed{\text{Ανάθεση ενός άγνωστου προτύπου } \underline{x} \text{ στην κλάση } (\omega_i) \text{ εάν: } \|\underline{x}-\underline{\mu}_i\| < \|\underline{x}-\underline{\mu}_j\|, \ \forall\, i \neq j.}$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι περιοχές ίσης απόστασης από το κέντρο της κάθε κλάσης αντιστοιχούν σε υπερσφαίρες ακτίνας c που δίνονται από την σχέση:

$$d_E(\underline{x}, \underline{\mu}_i) = c \iff \|\underline{x}-\underline{\mu}_i\| = c \iff \|\underline{x}-\underline{\mu}_i\|^2 = c^2 \iff$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{l} (x_k - \mu_{ik})^2 = c^2, \quad \forall i \in [M].}$$

(β): Για την περίπτωση όπου ο κοινός πίνακας συνδιακύμανσης δεν είναι διαγώνιος, τότε η διαδικασία μεγιστοποίησης της τιμής της εκάστοτε συνάρτησης διάκρισης $g_i(\underline{x})$ οδηγεί στην ελαχιστοποίηση της απόστασης από το κάθε κέντρο σε σχέση με την νόρμα ως προς του πίνακα $\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}$.

<u>ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ:</u>

$$\boxed{\text{Ανάθεση ενός άγνωστου προτύπου } \underline{x} \text{ στην κλάση } (\omega_i) \text{ όταν: } \|\underline{x}-\underline{\mu}_i\|_{\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}} < \|x-\mu_j\|_{\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}}, \ \forall i \neq j.}$$

Αντίστοιχα, οι περιοχές ίσης απόστασης από το κέντρο της κάθε κλάσης θα δίνονται στην γενική περίπτωση από υπερελλειψοειδείς καμπύλες της μορφής:

$$d_m(\underline{x}, \mu_i) = \sqrt{(\underline{x}-\underline{\mu}_i)^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu}_i)} = c \iff$$

$$\boxed{(\underline{x}-\underline{\mu}_i)^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} (x-\mu_i) = c^2, \quad \forall i \in [M]}$$

Mahalanobis Distance

Η συμμετρικότητα του πίνακα συνδιακύμανσης $\underline{\underline{\Sigma}}$ παρέχει λοιπόν την δυνατότητα διαγωνιοποίησής του μέσω του μοναδιαίου μετασχηματισμού:

[Orthogonal Matrix] $\boxed{\underline{\underline{\Sigma}} = \Phi \Lambda \Phi^T}$

όπου $\boxed{\underline{\underline{\Phi}}^T = \underline{\underline{\Phi}}^{-1}}$ και $\underline{\underline{\Lambda}}$ ένας διαγώνιος πίνακας τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του οποίου είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\underline{\underline{\Sigma}}$. Αντίστοιχα, οι στήλες του πίνακα $\underline{\underline{\Phi}}$ δίνονται από τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα (⊛) του πίνακα $\underline{\underline{\Sigma}}$ έτσι ώστε:

$$\boxed{\underline{\underline{\Phi}} = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_\ell]}$$

⊛ Οι στήλες του πίνακα Φ ικανοποιούν την σχέση $\boxed{\underline{\underline{\Sigma}}\,\underline{u}_j = \lambda_j \cdot \underline{u}_j, \ \forall j \in [\ell]}$ με $\boxed{\|u_j\| = 1, \ \forall j \in [\ell].}$ και $\boxed{\underline{u}_r^T \underline{u}_s = 0}$, $\forall r \neq s$.

● Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε ότι:

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{-1} = (\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{\Phi}}^T)^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} = \underline{\underline{\Phi}}^{-T}\underline{\underline{\Lambda}}^{-1}\underline{\underline{\Phi}}^{-1} \Leftrightarrow$$

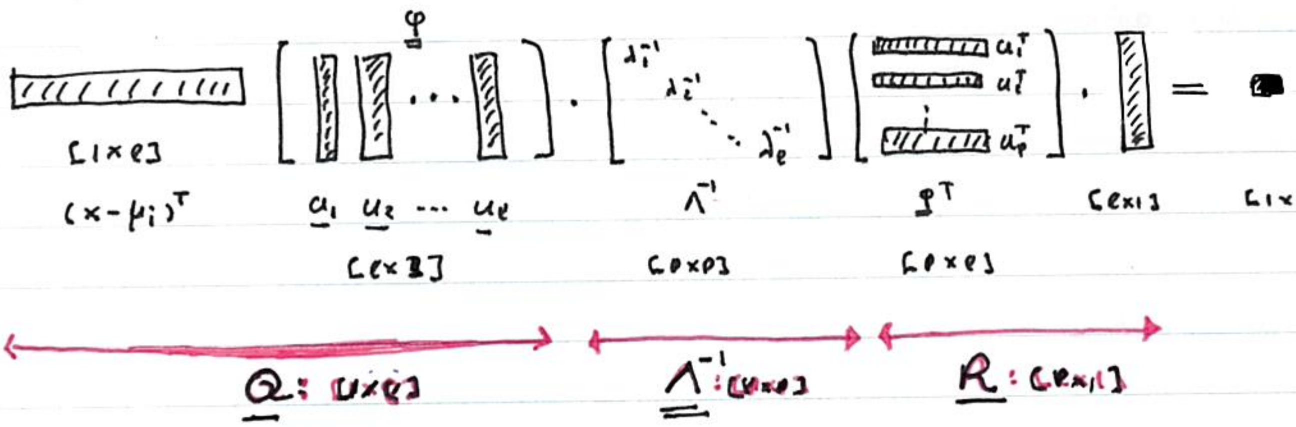
$$\underline{\underline{\Sigma}}^{-1} = (\underline{\underline{\Phi}}^T)^T\underline{\underline{\Lambda}}^{-1}\underline{\underline{\Phi}}^T \Leftrightarrow \boxed{\underline{\underline{\Sigma}}^{-1} = \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T}$$

Επιπλέον, η εξίσωση που θα περιγράφει τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν υπό την έννοια της απόστασης Mahalanobis από το κέντρο $\underline{\mu}$, θα δίνεται από την σχέση:

$$(\underline{x} - \underline{\mu}_i)^T \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{\underline{\Lambda}}^{-1}\underline{\underline{\Phi}}^T (\underline{x} - \underline{\mu}_i) = c^2 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(\underline{x} - \underline{\mu}_i)^T}_{[1\times\ell]} \underbrace{[u_1 \ u_2 \ \ldots \ u_\ell]}_{\substack{[\ell\times\ell] \\ (\underline{\underline{\Phi}})}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \lambda_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_\ell^{-1} \end{bmatrix}}_{\substack{[\ell\times\ell] \\ (\underline{\underline{\Lambda}}^{-1})}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_\ell^T \end{bmatrix}}_{\substack{[\ell\times\ell] \\ (\underline{\underline{\Phi}}^T)}} \underbrace{(\underline{x} - \underline{\mu}_i)}_{[\ell\times 1]} = \underbrace{c^2}_{[1\times 1]}$$

Η σχηματική αναπαράσταση της προηγούμενης πράξης έχει ως εξής:



$$\underline{Q} = [(x-\mu_i)^T u_1 \;\; (x-\mu_i)^T u_2 \cdots (x-\mu_i)^T u_\ell] \; [1\times \ell] = [q_1 \; q_2 \cdots q_\ell]$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} u_1^T(x-\mu_i) \\ u_2^T(x-\mu_i) \\ \vdots \\ u_\ell^T(x-\mu_i) \end{bmatrix} = Q^T$$

$$\boxed{q_j = (x-\mu_i)^T u_j = u_j^T (x-\mu_i)}$$

Επομένως, η προηγούμενη σχέση γράφεται ως εξής:

$$\underline{Q} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_\ell^{-1} \end{bmatrix} \cdot \underline{Q}^T = c^2 \iff$$

$$[q_1 \; q_2 \cdots q_\ell] \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_\ell^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_\ell \end{bmatrix} = c^2 \iff$$

$$[\lambda_1^{-1} q_1 \;\; \lambda_2^{-1} q_2 \cdots \lambda_\ell^{-1} q_\ell] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_\ell \end{bmatrix} = c^2 \iff \boxed{\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j^{-1} q_j^2 = c^2}$$

Στην πραγματικότητα ο πίνακας $\underline{\underline{\Phi}}$ ορίζει έναν γραμμικό μετασχηματισμό του εκάστοτε διανύσματος $\underline{x} \in \mathbb{R}^\ell$ έτσι ώστε το μετασχηματισμένο διάνυσμα $\underline{x}' \in \mathbb{R}^\ell$ να δίνεται από την σχέση:

$$\underline{x}' = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{x} \iff$$

LINEAR TRANSFORMATION

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} \underline{u}_1^T \\ \underline{u}_2^T \\ \vdots \\ \underline{u}_\ell^T \end{bmatrix} \cdot \underline{x} \iff [x_1' \; x_2' \dots x_\ell'] = [\underline{u}_1^T \underline{x} \;\; \underline{u}_2^T \underline{x} \dots \underline{u}_\ell^T \underline{x}]$$

Με άλλα λόγια, οι νέες συντεταγμένες του διανύσματος $\underline{x}$, $(\underline{x}')$, δίνονται ως οι προβολές του $\underline{x}$ στο εκάστοτε ορθομοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα ως:

$$\boxed{x_j' = \underline{u}_j^T \cdot \underline{x} \quad , \forall j \in [\ell].}$$

Με βάση τα παραπάνω, η ποσότητα q_j μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως:

$$q_j = \underline{u}_j^T \cdot \underline{x} - \underline{u}_j^T \cdot \underline{\mu}_i \Rightarrow \boxed{q_j = x_j' - \mu_{ij}'}$$

που με την σειρά της θα δώσει:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{\ell} \frac{(x_j' - \mu_{ij}')^2}{\lambda_j} = c^2}$$

ΥΠΕΡΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ

Άσκηση: Να ευρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του $\mathbb{R}^2$ που έχουν σταθερή απόσταση Mahanalobis από το κέντρο $\underline{\mu} = [0 \ 0]^T$ όταν ο πίνακας συνδιακύμανσης έχει την παρακάτω μορφή:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad \rho \in [-1, +1].$$

Η ζητούμενη εξίσωση έχει την μορφή:

$$d_m(\underline{x};\rho) = \|\underline{x}-\underline{\mu}\|_{\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}} = c \iff (\underline{x}-\underline{\mu})^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} (x-\mu) = c^2.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι $\underline{\mu} = [0 \ 0]^T$ και $\underline{x} = [x_1 \ x_2]^T$, θα έχουμε ότι: $\underline{x}-\underline{\mu} = [x_1 \ x_2]^T - [0 \ 0]^T = [x_1 \ x_2]^T = \underline{x}$. Επομένως, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\boxed{d_m(\underline{x};\rho) = \underline{x}^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} \underline{x} = c^2}$$

Αρχικά θα πρέπει να διαγωνιοποιήσουμε τον πίνακα $\underline{\underline{\Sigma}}$ έτσι ώστε:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Phi}} \, \underline{\underline{\Lambda}} \, \underline{\underline{\Phi}}^T$$

με $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Phi}} = [\underline{u}_1 \ \underline{u}_2] \ \text{ή} \\ \underline{\underline{\Phi}}^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix} \end{array} \right\}$ και $\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ όπου

$\underline{u}_1$ και $\underline{u}_2$ είναι τα ορθομοναδιαία διανύσματα του πίνακα $\underline{\underline{\Sigma}}$ και λ_1, λ_2 οι αντίστοιχες ιδιοτιμές.

Αρχικά υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $\underline{\underline{\Sigma}}$ προσδιορίζοντας τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $\underline{\underline{\Sigma}}$ ως εξής:

$$p(\lambda) = |\underline{\underline{\Sigma}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & \rho \\ \rho & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2 - \rho^2 = 0 \Leftrightarrow p(\lambda) = [(1-\lambda)-\rho][(1-\lambda)+\rho] = 0 \Leftrightarrow$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda-\rho)(1-\lambda+\rho) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \lambda_1 = 1-\rho \\ \lambda_2 = 1+\rho \end{Bmatrix}}$$

Εν συνεχεία, υπολογίζουμε τα ορθομοναδιαία διανύσματα του πίνακα $\underline{\underline{\Sigma}}$, $\underline{u_1}$ και $\underline{u_2}$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2.

$$(i): \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{u_1} = \lambda_1 \cdot \underline{u_1} \Leftrightarrow \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{u_1} - \lambda_1 \underline{u_1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{(\underline{\underline{\Sigma}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{u_1} = 0}$$

Θέτοντας, $u_1 = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} - (1-\rho) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1-(1-\rho) & \rho \\ \rho & 1-(1-\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \rho & \rho \\ \rho & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \rho w + \rho z = 0 \\ \rho w + \rho z = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \rho w = -\rho z \xrightarrow{\rho \neq 0} \boxed{w = -z}$$

#8

Επομένως, $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} -z \\ z \end{bmatrix}$ που με $z = \kappa$ έχουμε ότι: $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} -\kappa \\ \kappa \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\underline{u}_1 = \kappa \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Για να εξασφαλίσουμε ότι $\|u_1\| = 1$, η τιμή του κ

θα πρέπει να δίνεται ως: $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Άρα, θα έχουμε ότι: $\boxed{\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}$

(ii): $\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{u}_2 = \lambda_2 \cdot \underline{u}_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\Sigma}} \cdot u_2 - \lambda_2 \underline{u}_2 = \mathbb{0} \Leftrightarrow \boxed{(\underline{\underline{\Sigma}} - \lambda_2 \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{u}_2 = \mathbb{0}}$

Θέτοντας, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} - (1+\rho) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1-(1+\rho) & \rho \\ \rho & 1-(1+\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\rho & \rho \\ \rho & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\rho w + \rho z = 0 \\ -\rho w + \rho z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -\rho w = -\rho z \xrightarrow{\rho \neq 0} \boxed{w = z}$$

Επομένως, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix}$ που με $z = \kappa$ έχουμε ότι: $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \kappa$. Για να εξασφαλίσουμε ότι $\|u_2\| = 1$, η τιμή του κ θα πρέπει να

δίνεται ως: $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\boxed{\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}$

Επομένως, ο πίνακας $\underline{\underline{\Phi}}^T$ θα δίνεται από την σχέση:

$$\underline{\underline{\Phi}}^T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$ και το διάνυσμα $x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$ θα δίνεται ως:

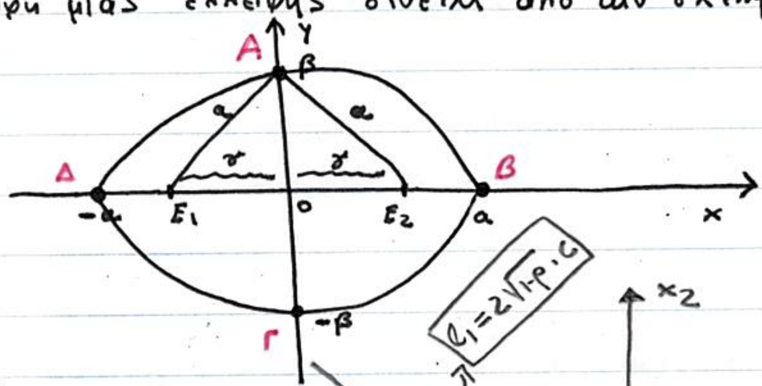
$$\underline{x}' = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot x \iff \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 \\ x_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει πως η εξίσωση $d_m(\underline{x};\rho) = c \iff \frac{(x_1')^2}{1-\rho} + \frac{(x_2')^2}{1+\rho} = c^2 \iff$

$$\frac{(x_1')^2}{\sqrt{(1-\rho)^2}} + \frac{(x_2')^2}{\sqrt{(1+\rho)^2}} = c^2 \iff \boxed{\frac{(x_1')^2}{c^2\sqrt{(1-\rho)^2}} + \frac{(x_2')^2}{c^2\sqrt{(1+\rho)^2}} = 1}$$

Η γενική μορφή μιας έλλειψης δίνεται από την σχέση: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$



$\boxed{\alpha > \gamma}$ και $\boxed{\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2}$

α: Μεγάλος ημιάξονας

β: Μικρός ημιάξονας

γ: Εστιακή απόσταση

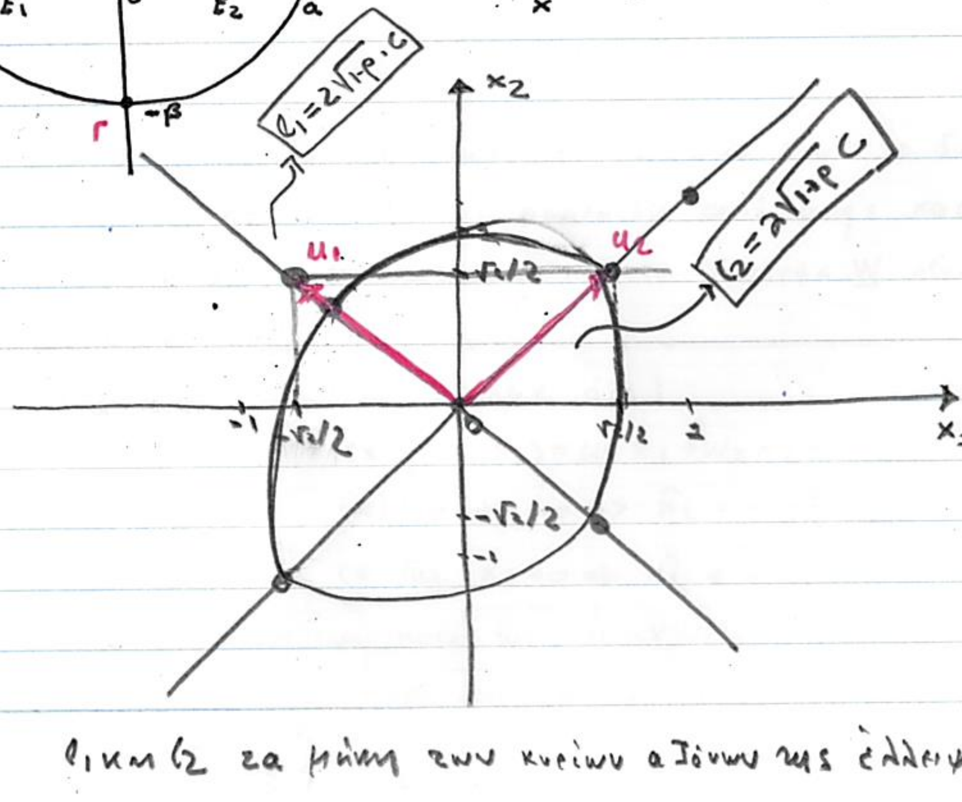
ΔΒ: Μεγάλος άξονας

ΑΓ: Μικρός άξονας

Ο: Κέντρο έλλειψης

$\alpha = c\sqrt{1-\rho}$

$\beta = c\sqrt{1+\rho}$



ℓ_1 και ℓ_2 τα μήκη των κυρίων αξόνων της έλλειψης.